

BspNr: D0618

Themenbereich	
Dynamische Prozesse - Differentialgleichungen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none">• Eine Näherungsmethode zum Lösen von Differentialgleichungen kennen	TI-92+ (D0618a), DERIVE (D0618b), Mathematica (D0618c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Eingangsvoraussetzungen:

- Kenntnisse über Differentialrechnung, Integralrechnung und einfache Differentialgleichungen
- Exponentialdarstellung komplexer Zahlen, Formel von Euler
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Lösen einer Differentialgleichung - Näherungsmethode

Angabe und Fragen:

Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = x \cdot y$

mit der Anfangsbedingung $x_0 = 1, y_0 = 4$ an der Stelle $x = 1,5$.

Bestimme auch eine Näherungslösung zur gegebenen Anfangsbedingung.

Literatur:

- Rüdiger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

Ausarbeitung (System: TI-92+)

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
deSolve(y' = x*y, x, y)      y = 01.e x^2/2
x^2
c.e x^2/2 → y(x)           Done
y(1) = 4                    c.√e = 4
solve(c.e1/2 = 4, c)      c = 4.e-1/2
deSolve(y' = x*y, x, y)
MAIN          DEG AUTO      DE 5/30

```

Die Lösung der Gleichung liefert dieses folgende Ergebnis.

```

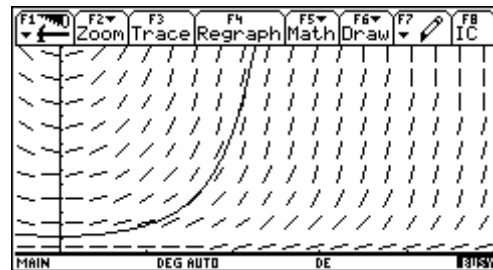
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
c.e x^2/2 → y(x)           Done
y(1) = 4                    c.√e = 4
solve(c.e1/2 = 4, c)      c = 4.e-1/2
4.e-1/2 → c              4.e-1/2
x^2
y(x)                       4.e x^2/2 - 1/2
y(x)
MAIN          DEG AUTO      DE 6/30

```

Nach Einsetzen der Anfangsbedingung erhält man dann die gesuchte partikuläre Lösung :

$$y(x) = 4 \cdot e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}$$

Für das Richtungsfeld erhalten wir:



Für die Berechnung einer Näherungslösung verwenden wir das EULER-Verfahren. Da der TI 92 keine eingebaute Funktion für dieses Verfahren besitzt, ist es sinnvoll, ein eigenes kleines Programm zu schreiben.

```

eulerode(x0,y0,h,anz)
Func
Local  i,m,m1,f(x,y),xm,xn,ym,yn

Define f(x,y)=x.y
[[x0,y0]]→m
x0→xm:y0→ym
For i,1,anz
  xm+h→xn
  f(xm,ym)*xn+ym-f(xm,ym)*xm→yn
  [[xn][yn]]→m1
  xn→xm:yn→ym
  (augment(mT,m1))T→m
EndFor

Return m
EndFunc

```

Das Programm selbst verlangt 4 Parameter, die Werte für x_0 und y_0 , die Schrittweite und die Anzahl der Iterationen. In der 4. Programmzeile ist die jeweilige Funktion einzutragen. Dies ist zwar nicht sehr komfortabel, vereinfacht das Programm jedoch ungemein. Als Ergebnis erhalten wir einen Vektor mit $n+1$ Lösungspunkten.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
■ eulerode(1,4,.1,5)					[2. 4.64154] 1 4 1.1 4.4 1.2 4.884 1.3 5.47008 1.4 6.18119 1.5 7.04656]
eulerode(1,4,.1,5)					
MAIN					FUNC 30/30

Die erhaltene Näherungslösung (1,5/7,04656) soll jetzt überprüft werden.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
■ $4 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1/2 \rightarrow y(x)$					Done
■ y(1)					4
■ y(1.5)					7.47298
y(1.5)					
MAIN					FUNC 30/30

Wert der exakten Rechnung : (1,5/7,4729)

Ausarbeitung (System: DERIVE)

Verwendung der in ODE_APPR.MTH implementierten Funktion:

EULER_ODE(r, x, y, x_0, y_0, h, n) liefert einen approximierten Vektor von $n+1$ Lösungspunkten für die Gleichung $y' = r(x, y)$ mit $y = y_0$ bei $x = x_0$. EULER_ODE verwendet die Eulersche Methode, um einen Vektor von $n+1$ Koordinatenpaaren der Gestalt

$$[[x_0, y_0], [x_0+h, y_1], [x_0+2\cdot h, y_2], \dots, [x_0+n\cdot h, y_n]]$$

zu erzeugen. Dieser Vektor stellt eine Menge von Punkten dar, die auf der Lösungskurve der Gleichung liegen.

Wir formen um: $y' = xy$ bzw. $xy - y' = 0$ und lösen zunächst exakt und erstellen eine Grafik:

```
LOAD(D:\DfW5\Math\Ode1.mth)
```

```
LOAD(D:\DfW5\Math\Ode_appr.mth)
```

```
DSOLVE1_GEN(x·y, -1, x, y, c)
```

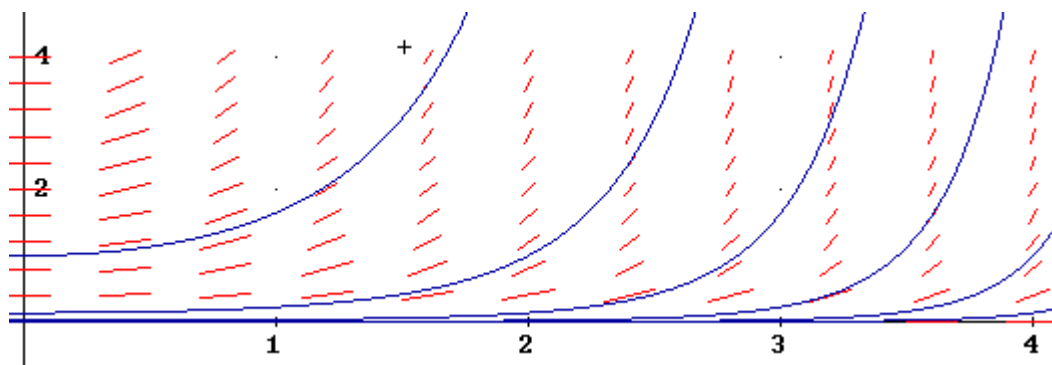
$$2 \cdot \text{LN}(y) - x^2 = -2 \cdot c$$

```
SOLVE(2·LN(y) - x2 = -2·c, y, Real)
```

$$y = \hat{e}^{x^2/2 - c}$$

```
DIRECTION_FIELD(x·y, x, 0, 4, 10, y, 0, 4, 10)
```

```
VECTOR( $\hat{e}^{x^2/2 - c}$ , c, 0, 10, 2)
```



Startwert 1 und $x = 1.5$ ergibt bei 5 Schritten eine Schrittweite $h = 0.1$

```
EULER_ODE(x·y, x, y, 1, 4, 0.1, 5)
```

1	4
1.1	4.4
1.2	4.884
1.3	5.47008
1.4	6.1811904
1.5	7.046557055

Überprüfen dieser Lösung:

$$f(x) := \hat{e}^{x^2/2} - c$$

$$f(1) = 4$$

$$\text{SOLVE}(f(1) = 4, c)$$

$$\text{SOLVE}(\text{SOLVE}(f(1) = 4, c), c, \text{Real})$$

$$c = \frac{1}{2} - 2 \cdot \text{LN}(2)$$

$$c = -0.8862943611$$

$$c := -0.8862943611$$

$$f(x) := 2.426122638 \cdot \hat{e}^{0.5 \cdot x^2}$$

$$f(1.5) = 7.472983829$$