

Themenbereich	
Dynamische Prozesse - Differentialgleichungen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> • Eine Differentialgleichung aufstellen können • Eine einfache Differentialgleichung durch Trennen der Variablen lösen können • Eine einfache Differentialgleichung mit dem CAS lösen können • Ein Richtungsfeld zeichnen können • Eine Lösungskurve in das Richtungsfeld legen können • Die Gestalt einer Lösungskurve aus dem Richtungsfeld erkennen können 	TI-92+ (D0617a), DERIVE (D0617b), Mathematica (D0617c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Eingangsvoraussetzungen

- Kenntnisse über Differentialrechnung, Integralrechnung und einfache Differentialgleichungen
- Exponentialdarstellung komplexer Zahlen, Formel von Euler
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Senkrecht fallender Körper**Angabe:**

Die Geschwindigkeit eines senkrecht fallenden Körpers gehorcht der Differentialgleichung $\frac{dv}{dt} = 10 - 0,2 \cdot v$

Fragen:

- a) Wie lautet die allgemeine Lösung?
- b) Wie lautet die Lösung, wenn die Fallbewegung aus der Ruhelage beginnt?
- c) Zeichne die Lösungskurve in das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Wähle einen geeigneten Bereich.

Literatur:

- Rüdiger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

BspNr: D0617a

Ausarbeitung (System: TI-92+)

Wir ermitteln vorerst die allgemeine Lösung.

Wir speichern als $v(t)$.

```
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6  
deSolve(v' = 10 - .2·v, t, v)  
v = @4·(.818731)^t + 50.  
c·(.81873075307798)^t + 50. → v(t) Done  
<.81873075307798>^t+50.→v(t)  
MAIN DEG AUTO DE 2/30
```

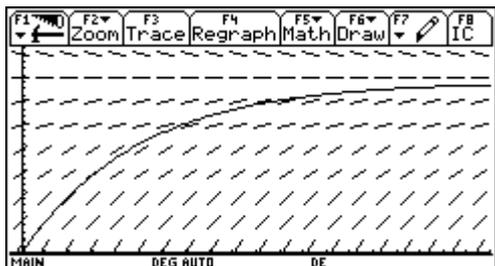
Wenn die Fallbewegung aus der Ruhelage beginnt, gilt die Anfangsbedingung $(0, 0)$. Damit lässt sich für diese spezielle Lösung die Konstante c ermitteln.

```
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6  
v = @4·(.818731)^t + 50.  
c·(.81873075307798)^t + 50. → v(t) Done  
v(0) = 0 c + 50. = 0  
solve(c + 50. = 0, c) c = -50.  
-50. → c -50.  
v(t) 50. - 50.·(.818731)^t  
MAIN DEG AUTO DE 6/30
```

Ein geeigneter Bereich für das Richtungsfeld wäre etwa:

```
F1 Zoom F2  
t0=0  
tmax=10.  
tstep=20.  
tplot=0.  
xmin=-.5  
xmax=20.  
xscl=1.  
ymin=0.  
ymax=60.  
yscl=2.  
ncurves=0.  
diftol=.001  
fldres=20.  
MAIN DEG AUTO DE
```

Das Richtungsfeld mit der partikulären Lösung sieht dann so aus:



Ausarbeitung (System: DERIVE)

ad a) Wie lautet die allgemeine Lösung?

$$"0.2v - 10 + v' = 0 \Rightarrow"$$

$$[v :=, t :=, c :=]$$

$$DSOLVE1_GEN(0.2 \cdot v - 10, 1, t, v, c)$$

$$\text{LN}(v - 50) + \frac{t}{5} = c$$

$$\left[v = \hat{e}^{c - t/5} + 50 \right]$$

$$U(t) := \hat{e}^{c - t/5} + 50$$

ad b) Wie lautet die Lösung, wenn die Fallbewegung aus der Ruhelage beginnt?

$$U(0) = 0$$

$$[c = \text{LN}(50) + \pi \cdot \hat{i}, c = \text{LN}(50) - \pi \cdot \hat{i}, c = \text{LN}(50) + 3 \cdot \pi \cdot \hat{i}]$$

$$c := \text{LN}(50) + \pi \cdot \hat{i}$$

$$U(t) := 50 - 50 \cdot \hat{e}^{-t/5}$$

Anm.: Hier lohnt sich die Diskussion über die komplexe Lösung für c :

$$e^{\ln 50 + i\pi - \frac{t}{5}} + 50 = e^{\ln 50} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-\frac{t}{5}} + 50 = 50 \cdot (-1) \cdot e^{-\frac{t}{5}} + 50$$

ad c) Zeichne die Lösungskurve in das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Wähle einen geeigneten Bereich.

$$v :=$$

$$\text{DIRECTION_FIELD}(10 - 0.2 \cdot v, t, 0, 60, 20, v, 0, 60, 20)$$

