

| <b>Themenbereich</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Dynamische Prozesse - Differentialgleichungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                        |
| <b>Ziele</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>vorhandene Ausarbeitungen</b>                       |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eine Differentialgleichung aufstellen können</li> <li>• Eine einfache Differentialgleichung durch Trennen der Variablen lösen können</li> <li>• Eine einfache Differentialgleichung mit dem CAS lösen können</li> <li>• Ein Richtungsfeld zeichnen können</li> <li>• Eine Lösungskurve in das Richtungsfeld legen können</li> <li>• Die Gestalt einer Lösungskurve aus dem Richtungsfeld erkennen können</li> </ul> | TI-92+ (D0617a), DERIVE (D0617b), Mathematica (D0617c) |
| Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | D0610 – D0620                                          |
| Lehrplanbezug (Österreich):                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 7. – 8. Klasse                                         |
| <b>Quelle:</b> Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                        |

**Eingangsvoraussetzungen**

- Kenntnisse über Differentialrechnung, Integralrechnung und einfache Differentialgleichungen
- Exponentialdarstellung komplexer Zahlen, Formel von Euler
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

**Senkrecht fallender Körper****Angabe:**

Die Geschwindigkeit eines senkrecht fallenden Körpers gehorcht der Differentialgleichung  $\frac{dv}{dt} = 10 - 0,2 \cdot v$

**Fragen:**

- a) Wie lautet die allgemeine Lösung?
- b) Wie lautet die Lösung, wenn die Fallbewegung aus der Ruhelage beginnt?
- c) Zeichne die Lösungskurve in das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Wähle einen geeigneten Bereich.

**Literatur:**

- Rüdiger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

BspNr: D0617a

## Ausarbeitung (System: TI-92+)

Wir ermitteln vorerst die allgemeine Lösung.

Wir speichern als  $v(t)$ .

```
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6  
deSolve(v' = 10 - .2·v, t, v)  
v = @4·(.818731)^t + 50.  
c·(.81873075307798)^t + 50. → v(t) Done  
<.81873075307798>^t+50.→v(t)  
MAIN DEG AUTO DE 2/30
```

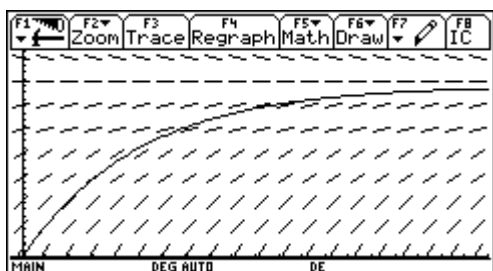
Wenn die Fallbewegung aus der Ruhelage beginnt, gilt die Anfangsbedingung  $(0, 0)$ . Damit lässt sich für diese spezielle Lösung die Konstante  $c$  ermitteln.

```
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6  
v = @4·(.818731)^t + 50.  
c·(.81873075307798)^t + 50. → v(t) Done  
v(0) = 0 c + 50. = 0  
solve(c + 50. = 0, c) c = -50.  
-50. → c -50.  
v(t) 50. - 50.·(.818731)^t  
MAIN DEG AUTO DE 6/30
```

Ein geeigneter Bereich für das Richtungsfeld wäre etwa:

```
F1 Zoom F2  
t0=0  
tmax=10.  
tstep=20.  
tplot=0.  
xmin=-.5  
xmax=20.  
xscl=1.  
ymin=0.  
ymax=60.  
yscl=2.  
ncurves=0.  
diftol=.001  
fldres=20.  
MAIN DEG AUTO DE
```

Das Richtungsfeld mit der partikulären Lösung sieht dann so aus:



## Ausarbeitung (System: DERIVE)

ad a) Wie lautet die allgemeine Lösung?

$$"0.2v - 10 + v' = 0 \Rightarrow"$$

$$[v :=, t :=, c :=]$$

$$DSOLVE1\_GEN(0.2 \cdot v - 10, 1, t, v, c)$$

$$\text{LN}(v - 50) + \frac{t}{5} = c$$

$$\left[ v = \hat{e}^{c - t/5} + 50 \right]$$

$$U(t) := \hat{e}^{c - t/5} + 50$$

ad b) Wie lautet die Lösung, wenn die Fallbewegung aus der Ruhelage beginnt?

$$U(0) = 0$$

$$[c = \text{LN}(50) + \pi \cdot \hat{i}, c = \text{LN}(50) - \pi \cdot \hat{i}, c = \text{LN}(50) + 3 \cdot \pi \cdot \hat{i}]$$

$$c := \text{LN}(50) + \pi \cdot \hat{i}$$

$$U(t) := 50 - 50 \cdot \hat{e}^{-t/5}$$

Anm.: Hier lohnt sich die Diskussion über die komplexe Lösung für  $c$ :

$$e^{\ln 50 + i\pi - \frac{t}{5}} + 50 = e^{\ln 50} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-\frac{t}{5}} + 50 = 50 \cdot (-1) \cdot e^{-\frac{t}{5}} + 50$$

ad c) Zeichne die Lösungskurve in das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Wähle einen geeigneten Bereich.

$$v :=$$

$$\text{DIRECTION\_FIELD}(10 - 0.2 \cdot v, t, 0, 60, 20, v, 0, 60, 20)$$

