BspNr: D0613

Themenbereich	
Dynamische Prozesse - Differentialgleichungen	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Eine Differentialgleichung aufstellen können • Eine einfache Differentialgleichung durch Trennen der Variablen lösen können • Eine einfache Differentialgleichung mit dem CAS lösen können • Ein Richtungsfeld zeichnen können • Eine Lösungskurve in das Richtungsfeld legen können • Die Gestalt einer Lösungskurve aus dem Richtungsfeld erkennen können • Fächerübergreifender Unterricht – Mathematik und Physik	TI-92+ (D0613a), DERIVE (D0613b), Mathematica (D0613c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Eingangsvoraussetzungen
- Kenntnisse über Differentialrechnung, Integralrechnung und einfache Differentialgleichungen
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Stromkreis

Angabe:

Die Stromstärke ändert sich in einem Stromkreis nach $\frac{di}{dt} = 5 - 2.i$

Fragen:
Welchem Wert nähert sich *i* bei wachsender Zeit *t*? Löse zunächst allgemein und teste die Lösungen im Richtungsfeld!

Literatur:

- Rüdeger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

BspNr: D0613a

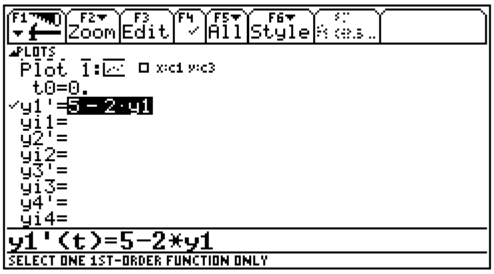
Ausarbeitung (System: TI-92+)

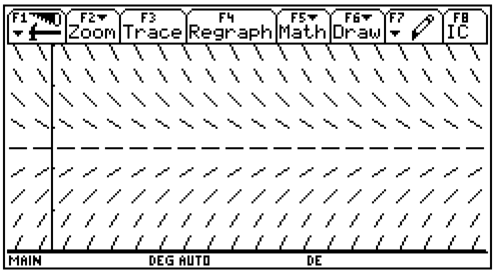
Händisch formt man etwa so um:

$$\frac{di}{dt} = 5 - 2i \Rightarrow \frac{di}{5-2i} = dt \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(5-2i\right) = t + c' \Rightarrow \ln\left(5-2i\right) = -2t + c$$

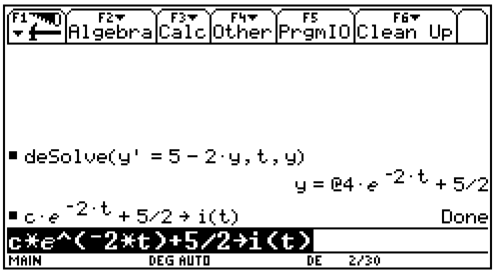
$$5 - 2i = c \cdot e^{-2t} \Rightarrow i = \frac{5}{2} - c \cdot e^{-2t}$$

Die Eingabe der Differentialgleichung im Funktioneneditor liefert das dargestellte Richtungsfeld.

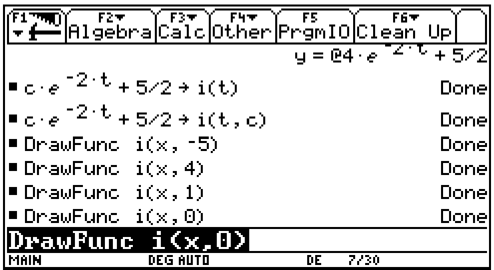


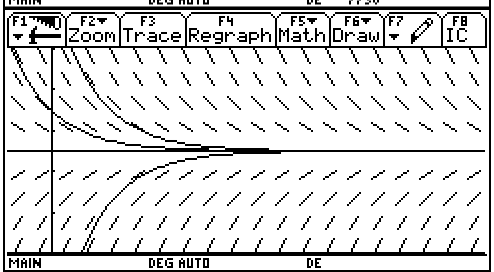


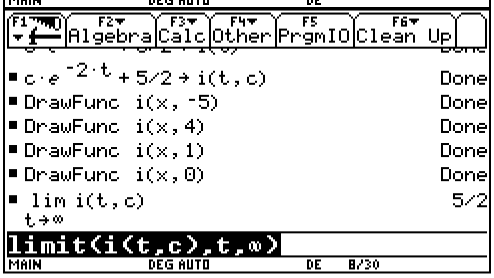
Für die Lösungen der Differentialgleichung erhält man



Da keine Randbedingungen vorgegeben sind, ist eine weitere Vereinfachung nicht möglich. Zur Vereinfachung wird eine neue Funktion definiert, die wir mit $i(t, c)$ bezeichnen.
Diese Funktion verwenden wir, um einige exemplarische spezielle Lösungsfunktionen anzuzeigen. Diese passen genau ins Richtungsfeld.







Welchem Wert nähert sich nun die Funktion für $t \rightarrow 4$? Aus der Grafik lässt sich der Grenzwert 5/2 ablesen.

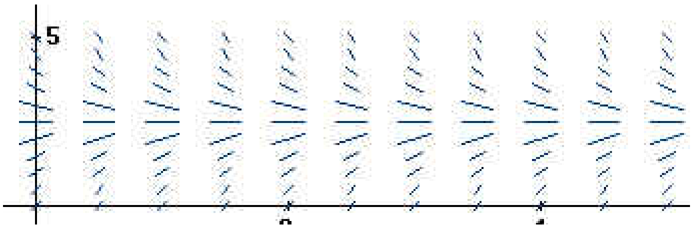
Mit Hilfe der Grenzwertberechnung erkennt man ebenfalls, dass sich für beliebiges c der Strom dem Wert 5/2 nähert.

BspNr: D0613b

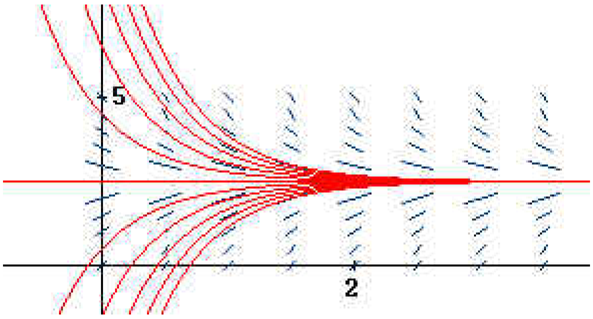
Ausarbeitung (System: DERIVE)

$$\frac{di}{dt}=5-2i \Rightarrow \frac{di}{5-2i}=dt \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(5-2i)=t+c' \Rightarrow \ln(5-2i)=-2t+c$$

$$5-2i=c\cdot e^{-2t} \Rightarrow i=\frac{5}{2}-c\cdot e^{-2t}$$



$$\mathrm{VECTOR}(2.5-2\cdot c\cdot \hat{e}^{-2\cdot t},\ c,\ -5,\ 5)=$$



Mit Derive bearbeiten wir die Differentialgleichung in der Normalform $p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0$

$5-2i-i'=0 \Rightarrow p=5-2i,\quad q=-1$

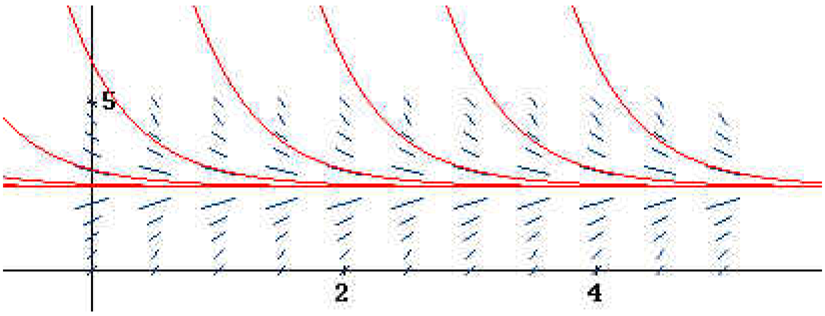
$$\mathrm{DSOLVE1\_GEN}(5-2\cdot i,\ -1,\ t,\ i,\ c)=\left[-\frac{\mathrm{LN}(2\cdot i-5)}{2}-t=c\right]$$

Wir formen ein wenig um (Auflösen nach *i*):

$$-\frac{\mathrm{LN}(2\cdot i-5)}{2}-t=c$$

$$\left[i=\frac{\hat{e}^{-2\cdot c-2\cdot t}}{2}+\frac{5}{2}\right]$$

$$\mathrm{VECTOR}\left(\frac{\hat{e}^{-2\cdot c-2\cdot t}}{2}+\frac{5}{2},\ c,\ -5,\ 5\right)=$$



Die Kurvenschar passt ebenfalls ins Richtungsfeld!