

■ Beispiel 3

Beispieltext

Die Bevölkerung eines Landes hat eine Zuwachsrate, die proportional zu ihrer jeweiligen Größe. Im Zeitpunkt, in dem der Bevölkerungsstand bei 30 Millionen liegt, beträgt die Zuwachsrate 1 Million/Jahr.

Bestimme eine Differentialgleichung, die diesen Sachverhalt darstellt. Löse sie zuerst allgemein und teste dann einige Lösungen im Richtungsfeld.

Lösungsvorschlag

Es sei $y[t]$ die Bevölkerungszahl (in Millionen) zum Zeitpunkt t (in Jahren). Dann erhält man als Differentialgleichung:

```
Clear[y, t]
```

```
diffgl3 = y'[t] == k y[t]
```

$$y'[t] == \frac{y[t]}{30}$$

Bestimmung der Konstante k : Bei $y[t] = 30$ beträgt $y'[t] = 1$.

```
Clear[k]
```

```
Solve[1 == 30 k]
```

$$\left\{ \left\{ k \rightarrow \frac{1}{30} \right\} \right\}$$

$$k := \frac{1}{30}$$

Lösung der Differentialgleichung:

```
Clear[y, t]
```

```
DSolve[{diffgl3, y[0] == y0}, y[t], t]
```

$$\left\{ \left\{ y[t] \rightarrow e^{t/30} y_0 \right\} \right\}$$

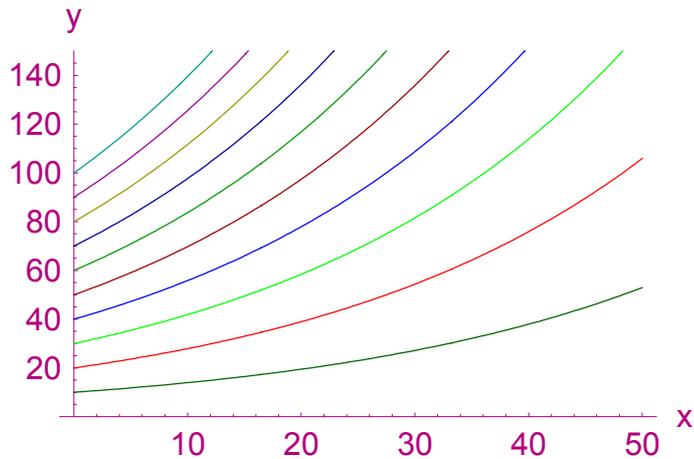
```
y[t_] := e^{t/30} y0;
```

Darstellung der Lösung für verschiedene Anfangswerte y_0 :

```
Table[y[t], {y0, 10, 100, 10}]
```

$$\{10 e^{t/30}, 20 e^{t/30}, 30 e^{t/30}, 40 e^{t/30}, 50 e^{t/30}, 60 e^{t/30}, 70 e^{t/30}, 80 e^{t/30}, 90 e^{t/30}, 100 e^{t/30}\}$$

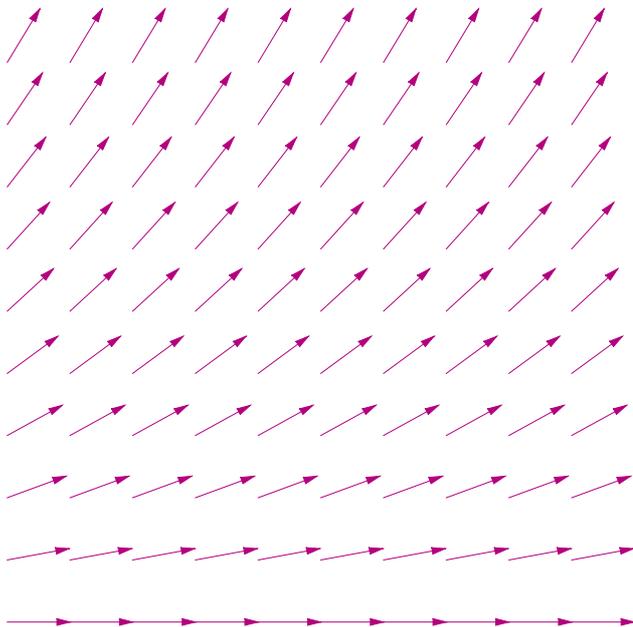
```
FPlot = Plot[{10 et/30, 20 et/30, 30 et/30, 40 et/30, 50 et/30, 60 et/30, 70 et/30,
80 et/30, 90 et/30, 100 et/30}, {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 150}];
```



Um das Richtungsfeld einer Differentialgleichung zu zeichnen, kann man den Befehl **PlotVectorField** verwenden. Man zeichnet im Punkt (x/y) den Vektor $(1, y'[x])$ ein. Die Anzahl der Vektoren kann man über die Option **PlotPoints** eingeben. Die Option **ScaleFunction** skaliert die Länge der Vektoren.

```
Clear[y, t]
```

```
RField = PlotVectorField[{1,  $\frac{y}{30}$ }, {t, 0, 50},
{y, 0, 50}, PlotPoints -> 10, ScaleFunction -> (1 &)];
```



Darstellung der partikulären Lösungen im Richtungsfeld:

```
Show[FPlot, RFeld, PlotRange -> {{0, 50}, {0, 50}}];
```

