

BspNr: D0612

Themenbereich	
Dynamische Prozesse - Differentialgleichungen	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none">• Eine Differentialgleichung aufstellen können• Eine einfache Differentialgleichung durch Trennen der Variablen lösen können• Eine einfache Differentialgleichung mit dem CAS lösen können• Ein Richtungsfeld zeichnen können• Eine Lösungskurve in das Richtungsfeld legen können• Die Gestalt einer Lösungskurve aus dem Richtungsfeld erkennen können	TI-92+ (D0612a), DERIVE (D0612b), Mathematica (D0612c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Eingangsvoraussetzungen

- Kenntnisse über Differentialrechnung, Integralrechnung und einfache Differentialgleichungen
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Zuwachsrate der Bevölkerung

Angabe:

Die Bevölkerung eines Landes hat eine Zuwachsrate, die proportional ist zu ihrer jeweiligen Größe. Im Zeitpunkt, in dem der Bevölkerungsstand bei 30 Millionen liegt, beträgt die Zuwachsrate 1 Million/Jahr.

Fragen:

Bestimme eine Differentialgleichung, die diesen Sachverhalt darstellt. Löse sie zuerst allgemein und teste dann einige Lösungen im Richtungsfeld.

Literatur:

- Rüdiger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

Ausarbeitung (System: TI-92+)

Es sei $y(t)$ die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t - dann erhält man

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \wedge \quad y = 30 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{30}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{30} \quad y' = \frac{y}{30}$$

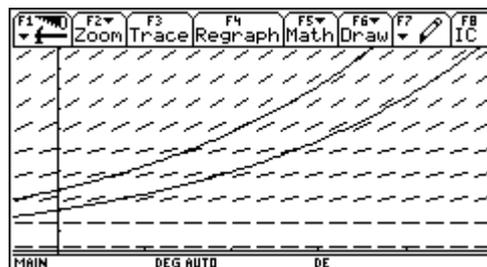
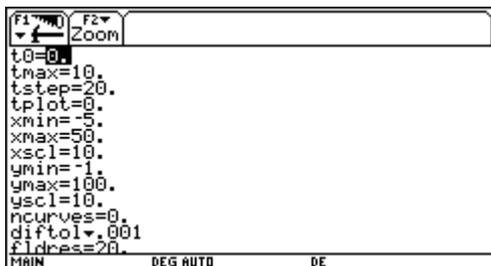
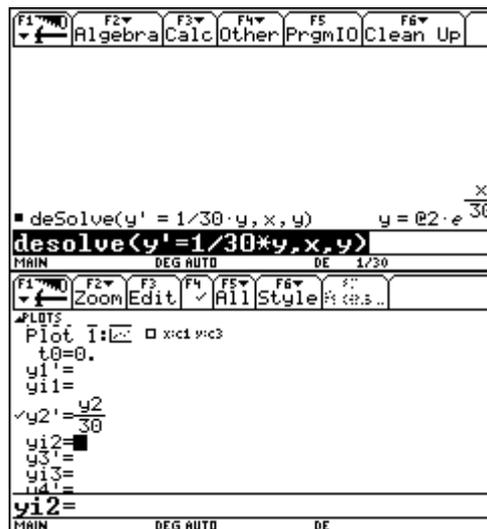
als Differentialgleichung des Vorgangs. Damit ist aber für einen beliebigen Punkt (t/y) der t - y Ebene eine Steigung festgelegt, die nicht von t abhängt sondern nur von y ! Wir können in einer Auswahl von Punkten die Steigungen einzeichnen und erhalten ein so genanntes Richtungsfeld.

Mit obigem Ansatz erhält man für die Lösungen der Diffgl. diese Funktionen.

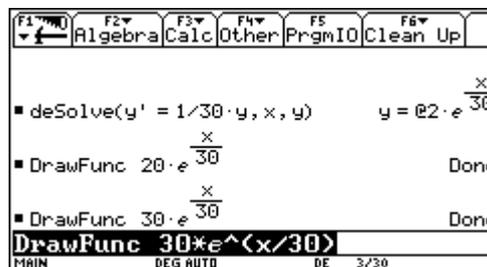
Für die Darstellung des Richtungsfeldes muss der Rechner auf den Modus Diff Equations umgestellt werden.

Zusätzlich wird die Differentialgleichung im Funktioneneditor eingegeben.

Diese Fenstereinstellungen liefern das rechte Ergebnis



Zusätzlich wurden über die Eingabe im HOME Screen noch zwei willkürlich gewählte Funktionen aus der Lösungsschar eingezeichnet.



Ausarbeitung (System: DERIVE)

Es sei $y(t)$ die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t - dann erhält man

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \wedge \quad y = 30 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{30}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{30} \quad y' = \frac{y}{30}$$

als Differentialgleichung des Vorgangs. Damit ist aber für einen beliebigen Punkt (t/y) der t - y Ebene eine Steigung festgelegt, die nicht von t abhängt sondern nur von y ! Wir können in einer Auswahl von Punkten die Steigungen einzeichnen und erhalten ein so genanntes Richtungsfeld.

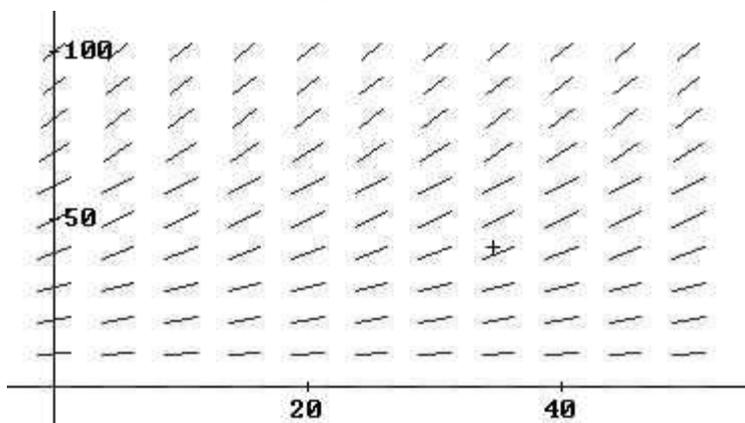
In der Datei **ODE_APPR.MTH** werden Funktionen zum Lösen der meisten gewöhnlichen Differentialgleichungen und jener Systeme von Gleichungen definiert, für die man Reihenentwicklungen und numerisch Näherungsmethoden benötigt. Um die unten angeführten Funktionen nutzen zu können, muss zuerst die Datei **ODE_APPR.MTH** mit Hilfe des Befehls <Datei Laden Zusatzdatei> geladen werden.

DIRECTION_FIELD($r, x, x0, xm, m, y, y0, yn, n$) liefert eine Matrix von 2-komponentigen Vektoren, die gezeichnet ein Richtungsfeld für die Gleichung $y' = r(x, y)$ ergeben. x läuft dabei in m Schritten von $x0$ bis xm und y in n Schritten von $y0$ bis yn .

Vor dem Zeichnen sollte man mit dem 2D-Graphik-Fenster Befehl <Extras Punkte> die Endpunkte der Tangentenstücke verbinden und ihre Endpunkte klein zeichnen lassen. Schalten Sie in ein 2D-Graphik-Fenster und verwenden Sie den Befehl <Extras Punkte> dazu, die Tangentenstücke zu verbinden und kleine Endpunkte zu zeichnen. Stellen Sie auch mit dem Befehl <Extras Farbe> die Farbe so ein, dass alle Linien in derselben Farbe gezeichnet werden. Dann zeichnen Sie das Richtungsfeld.

Wir zeichnen die Steigungen für t [0,50] in 10er Schritten und für y [0,100] in 10er Schritten

DIRECTION_FIELD $\left(\frac{y}{30}, t, 0, 50, 10, y, 0, 100, 10 \right)$



Wir ermitteln jetzt die allgemeine Lösung:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{30} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{30} \Rightarrow \ln y = \frac{t}{30} + c \Rightarrow y = c \cdot e^{\frac{t}{30}}$$

Jede Lösungskurve schmiegt sich in dieses Richtungsfeld. Um dies deutlich zu machen zeichnen wir eine Schar von Lösungskurven mit dem Vector Befehl:

`VECTOR(c - et/30, c, 10, 100, 10) =`

