BspNr: D0611

Themenbereich	
Dynamische Prozesse – Differentialgleichungen	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Eine Differentialgleichung aufstellen können • Eine einfache Differentialgleichung durch Trennen der Variablen lösen können • Eine einfache Differentialgleichung mit dem CAS lösen können	TI-92+ (D0611a), DERIVE (D0611b), Mathematica (D0611c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Eingangsvoraussetzungen:
- Kenntnisse über Differentialrechnung und Integralrechnung
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Salzlösung in einem Tank

Angabe:
Ein Tank enthält 400 Liter Salzlösung, in der 100 kg Salz gelöst sind. Pro Minute fließen 12 Liter einer Salzlösung, die 1/8 kg Salz auf 1 Liter enthält, in den Tank, und die Mischung, die durch ständiges Rühren gleichmäßig gehalten wird, fließt mit der gleichen Geschwindigkeit aus.

Fragen:
Bestimme die Salzmenge im Tank nach 90 Minuten!

Literatur:

- Rüdeger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

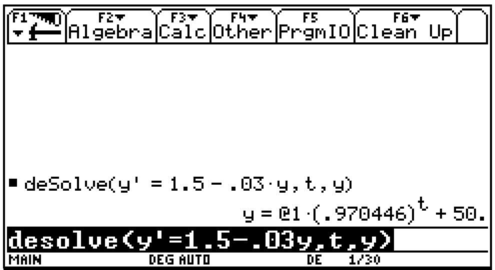
BspNr: D0611a

Ausarbeitung (System: TI-92+)

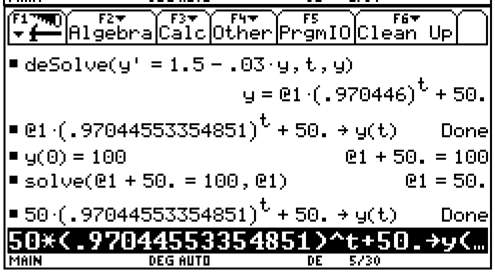
Es sei *y* die Menge Salz in kg die der Tank nach *x* Minuten enthält:
Je Minute fließen 1,5 kg Salz zu.
Je Minute fließen $12/400 \cdot y = 0{,}03\,y$ kg Salz ab.

Für die Differentialgleichung setzen wir an: $\frac{dy}{dx} = 1{,}5 - 0{,}03y$

Die Lösung der Differentialgleichung liefert :



Mit der Randbedingung $t = 0$ und $y = 100$ erhalten wir die Funktion



$y(t) = 50 \cdot 0{,}9704455^{t} + 50$

$y(90) = 53{,}36$ kg

Nach 90 Minuten sind 53,36 kg Salz in der Lösung enthalten.

BspNr: D0611b

Ausarbeitung (System: DERIVE)

Es sei *y* die Menge Salz in kg die der Tank nach *x* Minuten enthält.
Je Minute fließen 1,5 kg Salz zu.
Je Minute fließen 12/400 $y = 0{,}03\, y$ Salz ab

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}5 - 0{,}03y$$

$$\frac{dy}{dx} = 1{,}5 - 0{,}03y \Rightarrow 0{,}03y + 1 \cdot y' = 1{,}5 \Rightarrow 0{,}03y - 1{,}5 + 1 \cdot y' = 0$$

Diesen Term können wir zur weiteren Lösung verwenden.

Händische Lösung:

$$\frac{dy}{1{,}5 - 0{,}03y} = dx \Rightarrow \frac{\ln(1{,}5 - 0{,}03y)}{0{,}03} = -x + c$$

Lösung mit Derive:

```
DSOLVE1_GEN(0.03·y, 1, x, y, c)
```

Simplify liefert $\mathrm{LN}(y - 50) + \frac{3 \cdot x}{100} = c$

Dieses Ergebnis ist mit dem händisch ermittelten Term ident, was man sofort erkennt, wenn man *c* durch *c* + ln(100/3) ersetzt. Berechnung von *c*: zunächst lösen wir nach *y* auf, dann berechnen wir *c*.

$$\left[y = \hat{e}^{c - 3 \cdot x/100} + 50\right]$$

$$F(x) := \hat{e}^{c - 3 \cdot x/100} + 50$$

$$F(0) = 100$$

$$[c = \mathrm{LN}(50)]$$

$$[c = 3.91202]$$

$$c := 3.91202$$

Jetzt die Lösung des Problems:

$$F(x) := \hat{e}^{195601/50000 - 3 \cdot x/100} + 50$$

$$F(90) = \hat{e}^{60601/50000} + 50$$

$$F(90) = 53.3602$$