BspNr: D0610

Themenbereich	
Dynamische Prozesse – Differentialgleichungen	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Eine Differentialgleichung aufstellen können • Eine einfache Differentialgleichung durch Trennen der Variablen lösen können • Eine einfache Differentialgleichung mit dem CAS lösen können • Ergebnisse interpretieren können	TI-92+ (D0610a), DERIVE (D0610b), Mathematica (D0610c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0610 – D0620
Lehrplanbezug (Österreich):	7. – 8. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner, Günter Schödl	

Geschoss in einen Sandwall

Eingangsvoraussetzungen

- Kenntnisse über Differentialrechnung und Integralrechnung
- CAS: sicherer Gebrauch der Grundfunktionen

Angabe:
Wird ein Geschoss in einen Sandwall geschossen, dann ist seine Verzögerung proportional zu seiner Eintrittsgeschwindigkeit. Der Proportionalitätsfaktor beträgt ca. 1 : 147.

Fragen:

1) Wie lange dauert es, bis das Geschoss praktisch zum Stillstand kommt, wenn seine Geschwindigkeit beim Eintritt in den Sandwall 440 m/s beträgt?

2) Wie tief dringt es in den Sand ein?

Literatur:

- Rüdeger Baumann : Analysis1, Ein Arbeitsbuch mit Derive, Klett Verlag, Düsseldorf 1998
- Fran Ayres Jr. : Differentialgleichungen, Schaums Outline, Mc Graw Hill Inc, London 1978

BspNr: D0610a

Ausarbeitung (System: TI-92+)

Wichtiger Hinweis zu den Lösungen:

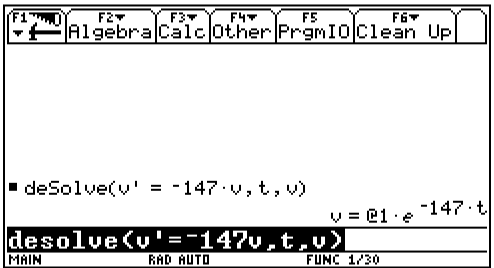
Die Aufgaben zum Thema „Differentialgleichungen“ können nur mit einem TI92-Plus Rechner gelöst werden!

Wir bezeichnen mit v die Geschwindigkeit t Sekunden nach dem Auftreffen auf den Sandwall.

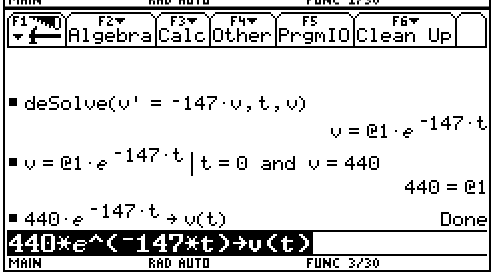
Für die Differentialgleichung gilt dann: $-\frac{dv}{dt} = 147 \cdot v$

$$\frac{dv}{v} = -147 \cdot dt \Rightarrow v(t) = c \cdot e^{-147 \cdot t}$$

Der Befehl `deSolve` löst eine Differentialgleichung

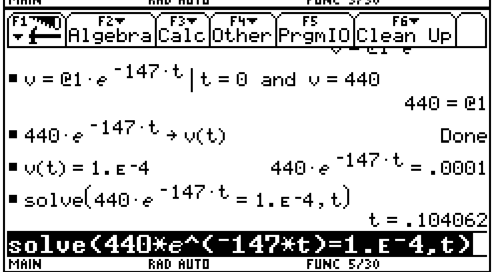


Mit den Anfangsbedingungen $t = 0$ und $v = 440$ erhält man @1 = 440.
Somit lautet die partikuläre Lösung $v(t) = 440 \cdot e^{-147 \cdot t}$

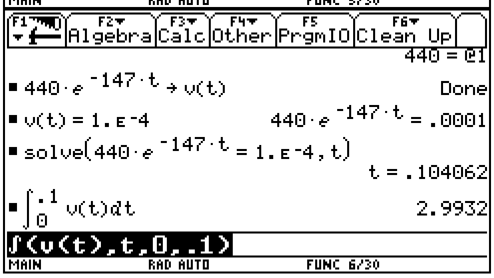


Diese Funktion erreicht nie den Wert 0. Wir nehmen daher willkürlich an, dass das Geschoß zum Stillstand kommt, wenn es die Geschwindigkeit v = 0,0001 m/s hat.

Das Geschoß kommt nach ca. 0,1 Sekunden zum Stillstand.



Zur Berechnung der Eindringtiefe integrieren wir die Geschwindigkeitsfunktion von $t = 0$ bis $t = 0{,}1$.
Die Eindringtiefe beträgt ca. 3m.



BspNr: D0610b

Ausarbeitung (System: DERIVE)

Sei v die Geschwindigkeit und t die Zeit in Sekunden nach dem Auftreffen auf den Sandwall.

Für die Differentialgleichung setzen wir an: $-\frac{dv}{dt} = 147 \cdot v$

Zur Lösung von einfachen Differentialgleichungen benötigt man die Zusatzdatei **`ODE1.MTH`** (Ordinary Differential Equations) - mit der Funktion **`DSOLVE1_GEN(p(x,y),q(x,y),x,y,c)`** kann man nun Gleichungen der Form

$p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0$ lösen.

`DSOLVE1_GEN(p,q,x,y,c)` liefert die allgemeine Lösung einer Gleichung der Gestalt $p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0$ in Abhängigkeit der symbolischen Konstanten c. Man beachte, dass die meisten Differentialgleichungen erster Ordnung auf diese Gestalt gebracht werden können.
`DSOLVE1_GEN` löst exakte, lineare, separierbare, homogene und verallgemeinert homogene Differentialgleichungen und Gleichungen mit einem integrierenden Faktor, der nur von x oder nur von y abhängt. In anderen Worten, man kann mit `DSOLVE1_GEN` die meisten Differentialgleichungen erster Ordnung, wie sie in Grundkursen zu Differentialgleichungen auftreten, lösen.
Ist eine Differentialgleichung nicht von obiger Gestalt, so gibt `DSOLVE1_GEN` das Wort „inapplicable" (= unanwendbar) aus. In diesem Falle muss man versuchen, mit fortgeschritteneren Funktionen die Gleichung zu lösen.
Wir haben hier eine Funktion $v(t)$ mit $v' = -147 \cdot v \Rightarrow 147 \cdot v + v' = 0$
daher setzen wir

```
DSOLVE1_GEN(147*v,1,t,v,c)
```

Vereinfacht ergibt sich:

```
LN(v)+147*t=c
```

Aufsuchen der dazugehörigen Exponentialgleichung.

Nach Exponenzieren erhalten wir nun

```
EXP(LN(v)+147*t=c)
```

$$v \cdot \hat{e}^{147 \cdot t} = \hat{e}^{c}$$

Das Auflösen der Gleichung nach v unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt:

$$\frac{v \cdot \hat{e}^{147 \cdot t} = \hat{e}^{c}}{\hat{e}^{147 \cdot t}}$$

$$v = \hat{e}^{c - 147 \cdot t}$$

$$440 = \hat{e}^{c}$$

also ist die Bewegungsgleichung

$$v(t) := 440 \cdot \hat{e}^{-147 \cdot t}$$

Für die Lösung der Aufgabe setzen wir (willkürlich) an, dass ein Geschoß dann zur Ruhe gekommen ist, wenn seine Geschwindigkeit nur mehr 0,0001 m/s beträgt.

$$v(t) = 0.0001$$

SOLVE(v(t) = 0.0001, t, Real)

$$t = \frac{LN(4400000)}{147}$$

$$t = 0.1040620074$$

Damit wurde die Zeit bis zum Stillstand ermittelt.

Für den 2. Teil berechnen wir das Integral der Geschwindigkeitsfunktion über das Zeitintervall bis zum Stillstand

$$\int_0^{0.1040620074} v(t)\ dt$$

$$2.993196598$$

Die Eindringtiefe beträgt somit etwa 3 m.