

Themenbereich	
Wachstumsprozesse	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none">• Rekursiv definierte Folgen als mathematisches Modell• Gegenüberstellung von rekursiver und expliziter Folgendefinition	TI-92 (D0512a), EXCEL – Teile (D0512b)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Franz Hauser	

Erwärmungsvorgang

Angabe und Fragen:

Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen. Zu Beginn hat es eine Temperatur von 5°C , die Umgebung hat eine Temperatur von 21°C . Pro Minute nimmt die Temperatur um 25% der Differenz zwischen Umgebungstemperatur und Flüssigkeitstemperatur zu.

- Kopfrechnung: Wie lange muss man warten, bis das Getränk eine Temperatur von 12°C hat?
- Beschreibe den Erwärmungsvorgang mit Hilfe einer Rekursionsgleichung.
Gib die zeitliche Entwicklung in einer Grafik an. Welchem Wert nähert sich die Temperatur?
- Gib auch einen expliziten Term an und zeige die Übereinstimmung der Werte mit jenen aus der Rekursionsgleichung.

Ausarbeitung (System: TI-92)

ad a)

Nach einer Minute hat sich das Getränk um 25% von $(21^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C}) = 16^\circ\text{C}$, also um 4°C auf 9°C erwärmt. Nach einer weiteren Minute steigt die Temperatur um 25% von $(21^\circ\text{C} - 9^\circ\text{C}) = 12^\circ\text{C}$, also um 3°C dh. nach 2 Minuten hat das Getränk eine Temperatur von 12°C .

ad b) Überlegungen

Die Erwärmung von einer Minute auf die nächste lässt sich am einfachsten durch eine Rekursionsgleichung beschreiben. Die Temperatur nach einer Minute ergibt sich aus der Addition von 25% der Temperaturdifferenz zwischen Umgebungs- und Flüssigkeitstemperatur zur momentanen Temperatur:

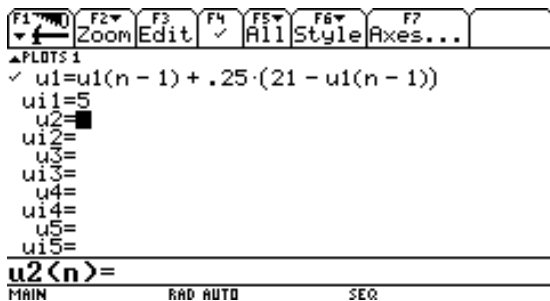
$$T_{n+1} = T_n + 0,25 \cdot (21 - T_n) \quad \text{und} \quad T_0 = 5$$

T_n Flüssigkeitstemperatur nach n Minuten

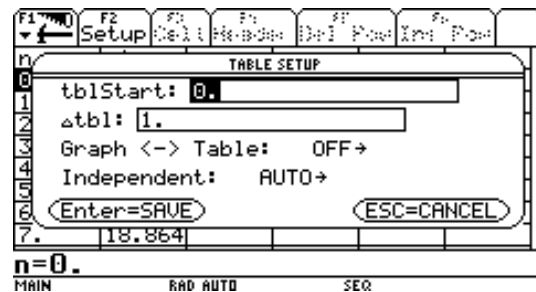
T_{n+1} Flüssigkeitstemperatur nach (n+1) Minuten

T_0 Anfangstemperatur

Zuerst stellen wir den TI auf den Sequenz-Mode um.
Eingabe des Folgenterms in den Y=-Editor



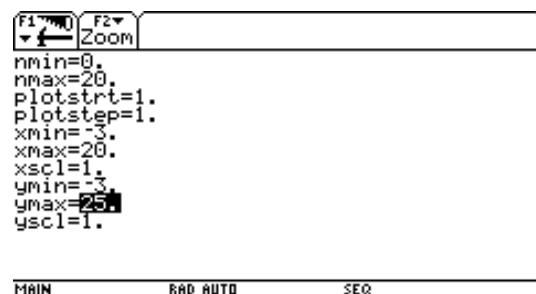
Festlegen der Tabellenoptionen



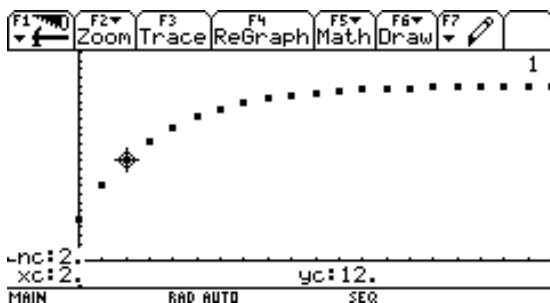
Wertetabelle

n	u1				
0.	5.				
1.	9.				
2.	12.				
3.	14.25				
4.	15.938				
5.	17.203				
6.	18.152				
7.	18.864				

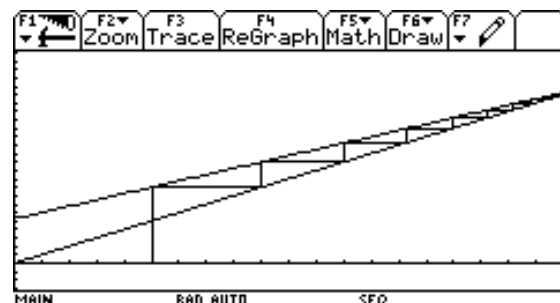
Einstellen der Grafikoptionen Im WINDOW-Fenster



Zeitliche Entwicklung im (n, T_n) -Diagramm



oder im $(T_n - T_{n+1})$ -Diagramm



Die Temperatur nähert sich wie zu erwarten immer mehr der Umgebungstemperatur von 21°C .

ad c)

Die Umgebungstemperatur ist 21°C; das Getränk hat zu Beginn 5°C, also um 16° weniger als die Umgebungstemperatur: $T_0 = 21 - 16$.

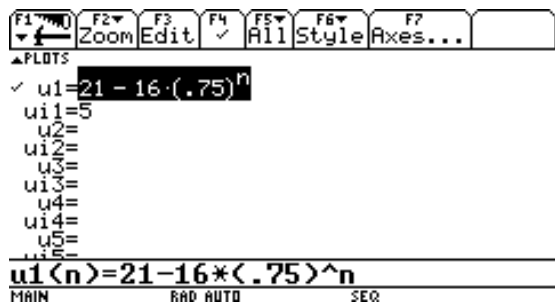
Nach einer Minute steigt die Temperatur um 25% von 16°C oder anders formuliert: die Temperatur des Getränk ist nur mehr um 75% von der Temperaturdifferenz unter der Umgebungstemperatur: $T_1 = 21 - 0,75 \cdot 16$, nach 2 Minuten: $T_2 = 21 - 0,75 \cdot (0,75 \cdot 16) = 21 - 0,75^2 \cdot 16$, usw.

Die Temperatur des Getränks nach n Minuten lässt sich also durch folgenden Term explizit angeben:

$$T_n = 21 - 0,75^n \cdot 16$$

Übereinstimmung der Werte mit jenen aus der Rekursionsgleichung zeigt die Tabelle:

Eingabe des Folgeterms im SEQUENZ-Mode



Wertetabelle

n	u1				
0.	5.				
1.	9.				
2.	12.				
3.	14.25				
4.	15.938				
5.	17.203				
6.	18.152				
7.	18.864				

Below the table, the status bar shows: n=0., MAIN, RAD AUTO, SEQ.

Herleitung über die Summenformel der geometrischen Reihe:

Aus der rekursive Formel $T_{n+1} = T_n + 0,25 \cdot (21 - T_n)$, $T_0 = 5$ folgt

$$T_1 = T_0 + 0,25 \cdot (21 - T_0) = 0,75 \cdot T_0 + 0,25 \cdot 21$$

$$T_2 = T_1 + 0,25 \cdot (21 - T_1) = 0,75 \cdot T_1 + 0,25 \cdot 21 = 0,75 \cdot (0,75 \cdot T_0 + 0,25 \cdot 21) + 0,25 \cdot 21 = 0,75^2 \cdot T_0 + 0,75 \cdot 0,25 \cdot 21 + 0,25 \cdot 21$$

$$T_3 = T_2 + 0,25 \cdot (21 - T_2) = 0,75 \cdot T_2 + 0,25 \cdot 21 = 0,75 \cdot (0,75^2 \cdot T_0 + 0,75 \cdot 0,25 \cdot 21 + 0,25 \cdot 21) + 0,25 \cdot 21 = 0,75^3 \cdot T_0 + 0,75^2 \cdot 0,25 \cdot 21 + 0,75 \cdot 0,25 \cdot 21 + 0,25 \cdot 21$$

.....

$$T_n = 0,75^n \cdot T_0 + 0,75^{n-1} \cdot 0,25 \cdot 21 + \dots + 0,75 \cdot 0,25 \cdot 21 + 0,25 \cdot 21 =$$

$$= 0,75^n \cdot T_0 + 0,25 \cdot 21 \cdot (0,75^{n-1} + \dots + 0,75 + 1) =$$

$$= 0,75^n \cdot T_0 + 0,25 \cdot 21 \cdot \frac{0,75^n - 1}{0,75 - 1} = 0,75^n \cdot T_0 - 21 \cdot (0,75^n - 1) =$$

$$= 0,75^n \cdot T_0 - 21 \cdot 0,75^n + 21 = 21 - 0,75^n \cdot (21 - T_0) = 21 - 0,75^n \cdot 16$$

Ausarbeitung (System: EXCEL)

Erwärmungsvorgang	
Zeit (in Minuten)	Temperatur (in °C)
0	5
1	9,00
2	12,00
3	14,25
4	15,94
5	17,20
6	18,15
7	18,86
8	19,40
9	19,80
10	20,10
11	20,32
12	20,49
13	20,62
14	20,71
15	20,79
16	20,84
17	20,88
18	20,91
19	20,93
20	20,95

Im Excel-Arbeitsblatt wird in der Spalte A die Zeit in Minutenschritten eingegeben.

Die Zelle B4 erhält die Ausgangstemperatur 5°C.

In die Zelle B5 wird die Rekursionsformel

$$=B4+0,25*(21-B4)$$

eingegeben und durch „Hinunterziehen bei gedrückter Maustaste“ in die folgenden Zellen kopiert.

Nach dem Markieren der Werte in den Spalten A und B kann mit Hilfe des Diagramm-Assistenten von Excel der Erwärmungsvorgang dargestellt werden.

