D0420c Ausarbeitung (System: Mathematica)

■ Beispiel 11 - Bevölkerungswachstum

Beispieltext

Die folgende Tabelle stellt die Bevölkerungsentwicklung in Österreich im Zeitraum 1950 bis 1996 dar.

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Bevölkerung (in Mill.)	6.935	7.047	7.467	7.549	7.718	7.808	7.907	7.995	8.059	8.101	8.126

Dabei wird eine Stabilisierung bei ca. 8.2 Millionen angenommen.

(a) Beschreibe die Bevölkerungsentwicklung durch ein ungebremstes exponentielles, ein bebremstes, ein kontinuierliches logistisches Wachstum.

(b) Prognostiziere mit allen drei Wachstumsmodellen die Bevölkerungszahlen für Österreich für die Jahre 2002, 2010, 2020, 2030, 2050.

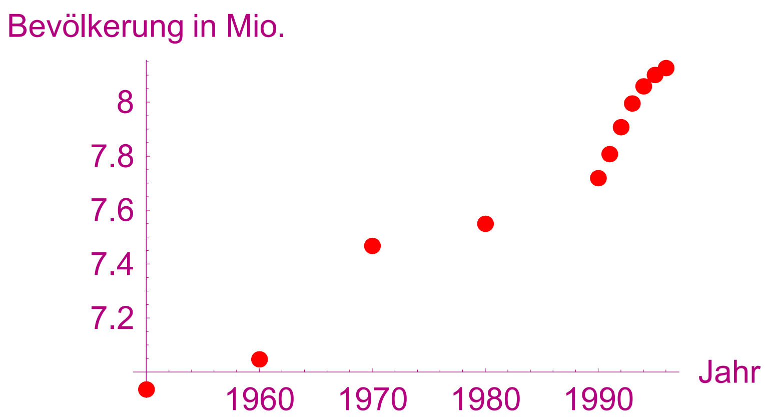
Lösungsvorschlag

Eingabe und Darstellung der Daten:

```
In[14]:= data = {{1950, 6.935}, {1960, 7.047}, {1970, 7.467},
           {1980, 7.549}, {1990, 7.718}, {1991, 7.808}, {1992, 7.907},
           {1993, 7.995}, {1994, 8.059}, {1995, 8.101}, {1996, 8.126}}

Out[14]= {{1950, 6.935}, {1960, 7.047}, {1970, 7.467},
          {1980, 7.549}, {1990, 7.718}, {1991, 7.808}, {1992, 7.907},
          {1993, 7.995}, {1994, 8.059}, {1995, 8.101}, {1996, 8.126}}

In[175]:= lp = ListPlot[data, AxesLabel -> { "Jahr", "Bevölkerung in Mio." }];
```



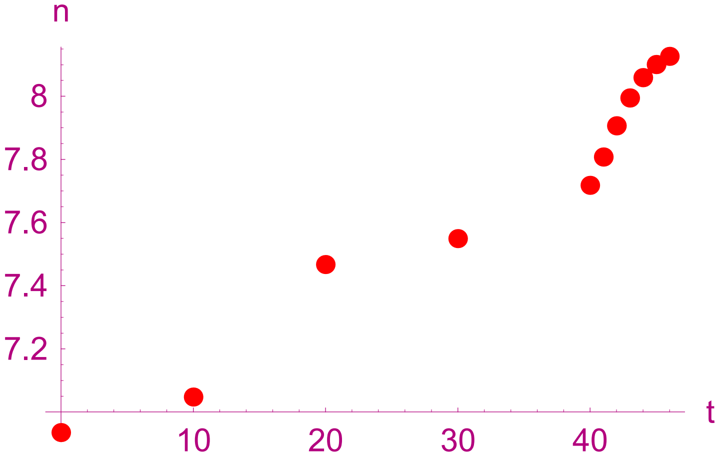
Ungebremstes exponentielles Wachstum:

Für die Regression erweist es sich als günstig, bei den Daten das Jahr 1950 als t = 0 anzunehmen.

```
In[12]:= data1 = {{0, 6.935}, {10, 7.047}, {20, 7.467},
           {30, 7.549}, {40, 7.718}, {41, 7.808}, {42, 7.907},
           {43, 7.995}, {44, 8.059}, {45, 8.101}, {46, 8.126}}

Out[12]= {{0, 6.935}, {10, 7.047}, {20, 7.467}, {30, 7.549}, {40, 7.718}, {41, 7.808},
          {42, 7.907}, {43, 7.995}, {44, 8.059}, {45, 8.101}, {46, 8.126}}
```

In[13]:=
```
lp1 = ListPlot[data1, AxesLabel -> { "t", "n" }];
```

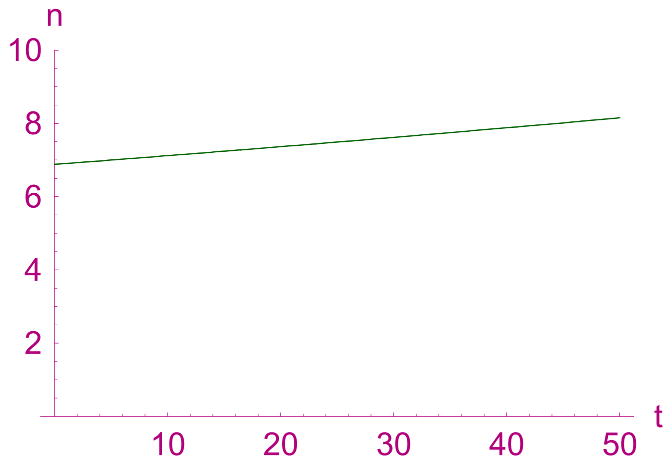


In[11]:=
```
<< Statistics`NonlinearFit`
```

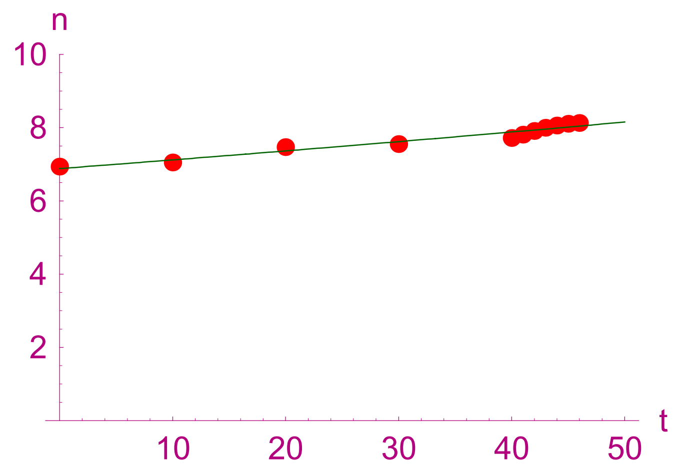
In[19]:=
```
model = a b^t;
Clear[t]; var = {t};
Clear[a, b]; parameters = {a, b};
f[t_] = Chop[NonlinearFit[data1, model, var, parameters]]
```

Out[22]= $6.88147\ 1.0034^{t}$

In[25]:=
```
p = Plot[f[t], {t, 0, 50}, PlotRange → {0, 10}, AxesLabel -> { "t", "n" }];
```



```
In[26]:= Show[lp1, p, PlotRange → {0, 10}];
```



Berechnung der Bevölkerungszahl für das Jahr 2002 (t = 52):

```
In[27]:= f[52]
Out[27]= 8.20775
```

Die Bevölkerungszahlen für die Jahre 2010, 2020, 2030 und 2050 können der folgenden Tabelle entnommen werden:

```
In[28]:= TableForm[Table[{t + 1950, f[t]}, {t, 50, 120, 10}],
          TableHeadings → {None, {Jahr, Bevölkerung}}]
```

Out[28]//TableForm=

Jahr	Bevölkerung
2000	8.1523
2010	8.43334
2020	8.72407
2030	9.02483
2040	9.33596
2050	9.65781
2060	9.99075
2070	10.3352

Folgerung: Diese Entwicklung ist eher unrealistisch - das Wachstum kann nicht ungebremst sein.

Gebremstes Wachstum

Dazu benötigt man zwei Wertepaare und den Grenzwert. Für die Wertepaare wurden von uns die Werte von 1995 (t=0) und 1996 (t=1) gewählt. Es ist jedoch auch möglich andere Wertepaare aus der Tabelle zu nehmen. Der Leser wird aufgefordert, andere Varianten zu probieren und mit der vorgegebenen zu vergleichen.

Wir verwenden die kontinuierliche Formel mit der Kapazitätsgrenze K = 8,2 und den Werten n(0) = 8.101 und n(1) = 8.126.

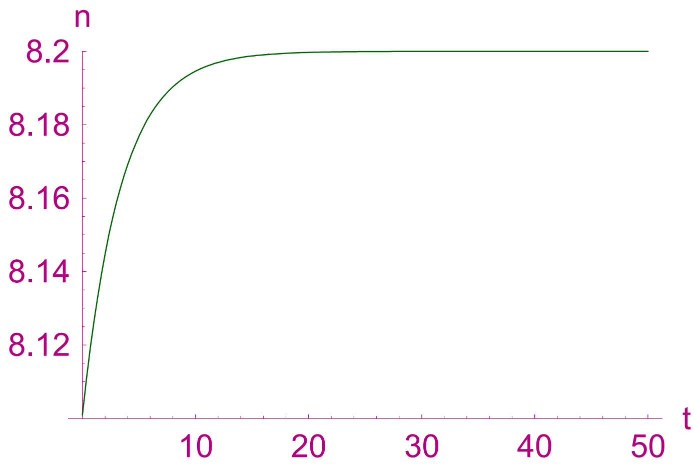
```
In[208]:= n[t_] := K + (n0 - K) * ⅇ^(k*t)
          K := 8.2
          n0 := 8.101

In[98]:= Solve[n[1] == 8.126, k]
Out[98]= {{k → -0.291055}}
```

```
In[211]:= k := -0.29105475693040633`
```

Die grafische Darstellung ergibt das folgende Bild. Es kommt dabei sehr schnell zu einer Stabilisierung.

```
In[212]:= Plot[n[t], {t, 0, 50}, PlotRange → {8.1, 8.2}, AxesLabel -> { "t", "n" }];
```



Für $t = 7$ erhält man den Wert (aus der Grafik: ca. 8.18) für das Jahr 2002, weil ja bei 1995 begonnen wurde.

Die Werte für die Jahre 2000, 2010, 2020, 2030, 2040 und 2050 ermittelt man mit der Tabelle.

```
In[101]:= TableForm[Table[{t + 1995, n[t]}, {t, 5, 55, 5}],
           TableHeadings → {None, {Jahr, Bevölkerung}}]
```

Out[101]//TableForm=

Jahr	Bevölkerung
2000	8.1769
2005	8.19461
2010	8.19874
2015	8.19971
2020	8.19993
2025	8.19998
2030	8.2
2035	8.2
2040	8.2
2045	8.2
2050	8.2

Kontinuierliches logistisches Wachstum

Analog zum obigen Beispielteil verwendet man die Formel $n(t) = K.\mathrm{n0} / (\mathrm{n0} + (K - \mathrm{n0}).e^{at})$ und erhält für den Parameter a den Wert -0,294136. Zur besseren Unterscheidung verwenden wir hier n1 an Stelle von n.

$$\text{In[213]:=}\quad \mathtt{n1[t\_]} := \frac{\mathtt{K * n10}}{\mathtt{n10 + (K - n10) * e^{a*t}}}$$

```
n10 := 8.101
K := 8.2
```

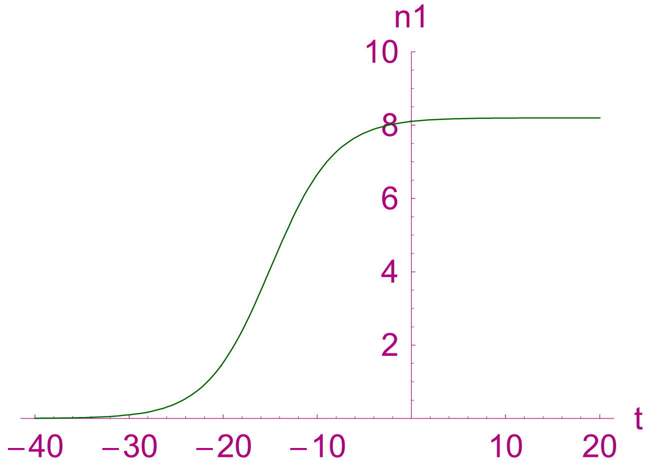
```
In[10]:= Solve[n1[1] == 8.126, a]
```

```
Out[10]= {{a → -0.294136}}
```

```
In[216]:= a := -0.2941360436475838`
```

Grafische Darstellung:

```
In[217]:= Plot[n1[t], {t, -40, 20}, PlotRange → {0, 10}, AxesLabel -> { "t", "n1" }];
```

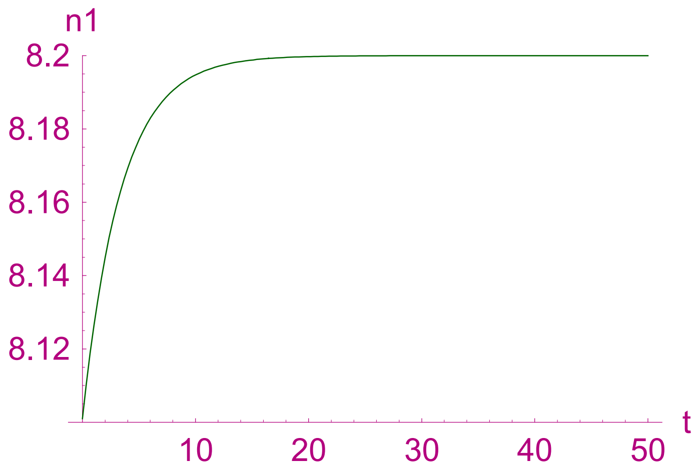


Aus der Grafik ist abzulesen, dass vor etwa 40 Jahren die Bevölkerungszahl 0 war, oder anders ausgedrückt, in 40 Jahren ist die Bevölkerungszahl von 0 auf 8 Millionen gewachsen! Diese Werte stimmen auch nicht mit den Vorgaben überein.

D.h. jedes Modell ist nur innerhalb bestimmter Grenzen gültig und sinnvoll!

"Sinnvoller" Bereich:

```
In[218]:= Plot[n1[t], {t, 0, 50}, PlotRange → {8.1, 8.2}, AxesLabel -> { "t", "n1" }];
```



Für das Jahr 2002 erhält man ein Bevölkerungsanzahl von 8.187 Millionen:

```
n1[7]
8.18723
```

Die Werte für die Jahre 2000, 2010, 2020, 2030, 2040 und 2050 erhält man wieder mit der Tabelle.

```
In[107]:= TableForm[Table[{1995 + t, n1[t]}, {t, 0, 55, 5}],
           TableHeadings → {None, {Jahr, Bevölkerung}}]
```

Out[107]//TableForm=

Jahr	Bevölkerung
1995	8.101
2000	8.17704
2005	8.19471
2010	8.19878
2015	8.19972
2020	8.19994
2025	8.19999
2030	8.2
2035	8.2
2040	8.2
2045	8.2
2050	8.2

Als Vergleich wird abschließend noch das gebremste Wachstum dem logistischen Wachstum gegenübergestellt.

```
In[109]:= TableForm[Table[{1995 + t, n[t], n1[t]}, {t, 0, 15}],
           TableHeadings → {None, {Jahr, gebremstes, logistisches Wachstum}}]
```

Out[109]//TableForm=

Jahr	gebremstes	logistisches Wachstum
1995	1	8.101
1996	8.126	8.126
1997	8.14469	8.14473
1998	8.15865	8.15874
1999	8.1691	8.16922
2000	8.1769	8.17704
2001	8.18273	8.18288
2002	8.18709	8.18723
2003	8.19035	8.19048
2004	8.19279	8.19291
2005	8.19461	8.19471
2006	8.19597	8.19606
2007	8.19699	8.19706
2008	8.19775	8.19781
2009	8.19832	8.19837
2010	8.19874	8.19878