BspNr: D0420

Themenbereich	
Wachstumsprozesse	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Entscheiden können, welche Wachstumsmodelle bei einem konkreten Beispiel sinnvoll sind	TI-92 (D0420a), DERIVE (D0420b), Mathematica (D0420c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0410 – D0420
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner	

Vergleich verschiedener Wachstumsmodelle

Eingangsvoraussetzungen
- Die einzelnen Wachstumsmodelle kennen und ihre Anwendbarkeit und Grenzen abschätzen können.
- Die Formeln für das exponentielle, begrenzte und das logistische Modell kennen.

Angabe und Fragen:
Die folgende Tabelle stellt die Bevölkerungsentwicklung in Österreich im Zeitraum 1950 bis 1996 dar.

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Bev. (Mill)	6,935	7,047	7,467	7,549	7,718	7,808	7,907	7,995	8,059	8,101	8,126

Dabei wird eine Stabilisierung bei etwa 8,2 Mill angenommen.

1) Beschreibe die Bevölkerungsentwicklung durch ein
   - Ungebremstes exponentielles
   - Gebremstes
   - Kontinuierliches logistisches Wachstum.

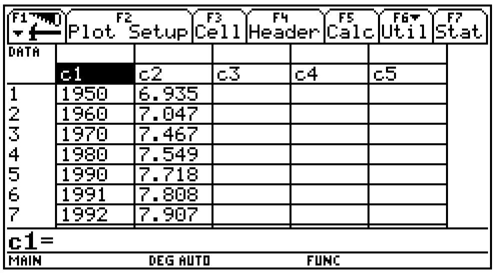
2) Prognostiziere mit allen drei Wachstumsmodellen die Bevölkerungszahlen für Österreich für die Jahre 2002, 2010, 2020, 2030, 2050

BspNr: D0420a

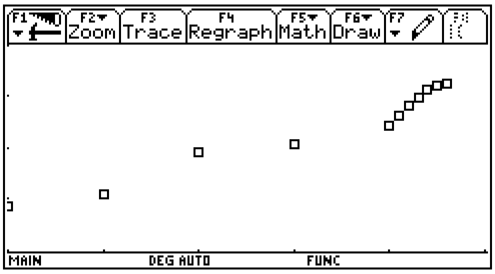
Ausarbeitung (System: TI-92)

Ungebremstes exponentielles Wachstum – mit Regression

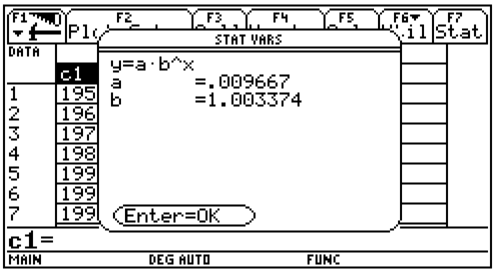
Man verwendet wieder den `Data/Matrix-Editor` und gibt die Tabelle ein. Das Druckbild mit den geeigneten WINDOW-Einstellungen (*ymin* = 6,5 und *ymax* = 8,5) ergibt die folgende grafische Darstellung der Messwerte.

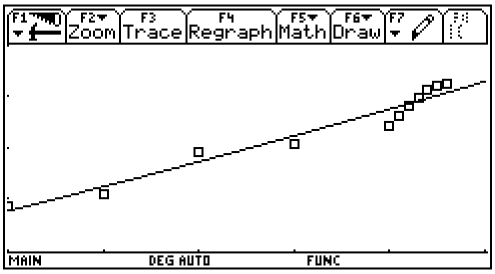


	c1	c2	c3	c4	c5
1	1950	6.935			
2	1960	7.047			
3	1970	7.467			
4	1980	7.549			
5	1990	7.718			
6	1991	7.808			
7	1992	7.907			



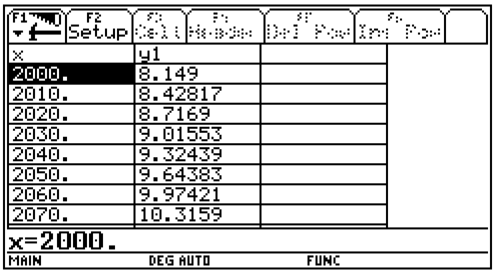
Für die exponentielle Regression wählt man `F5/Calculation Type/ExpReg` und erhält die folgende Gleichung:





Die Regressionsfunktion wurde als $y1(x)$ gespeichert und dargestellt.

Den Bevölkerungswert für 2002 (8,2 Mill) kann man im `HOME Screen` mittels $y1(2002)$ ermitteln, die restlichen Werte können auch mit einer Tabelle berechnet werden.



x	y1
2000.	8.149
2010.	8.42817
2020.	8.7169
2030.	9.01553
2040.	9.32439
2050.	9.64383
2060.	9.97421
2070.	10.3159

Die Bevölkerungszahlen in Millionen können abgelesen werden.

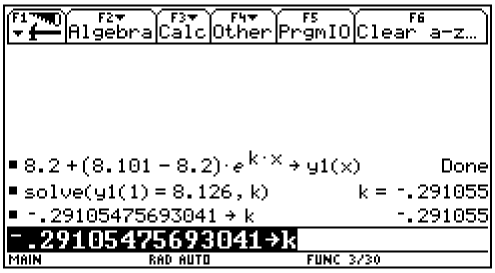
Folgerung : Diese Entwicklung ist eher unrealistisch – das Wachstum kann nicht ungebremst sein.

Gebremstes Wachstum

Dazu benötigt man zwei Wertepaare und den Grenzwert. Für die Wertepaare wurden von uns die Werte von 1995 (t=0) und 1996 (t=1) gewählt. Es ist jedoch auch möglich andere Wertepaare aus der Tabelle zu nehmen. Der Leser wird aufgefordert, andere Varianten zu probieren und mit der vorgegebenen zu vergleichen.

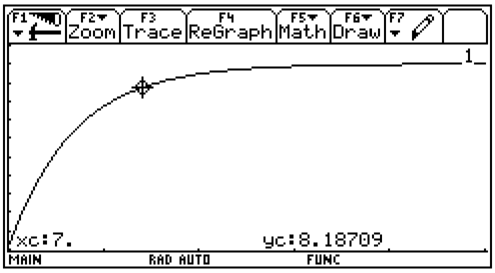
Wir verwenden die kontinuierliche Formel mit dem Grenzwert g = 8,2 und den Werten $y(0)$ = 8,101 und $y(1)$ = 8,126.

$y(t) = G + (y(0) - G) \cdot e^{k.t}$



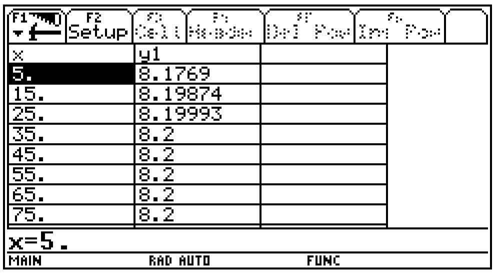
Der Parameter k wurde aus den Angaben berechnet und abgespeichert.

Die grafische Darstellung ergibt das folgende Bild. Es kommt dabei sehr schnell zu einer Stabilisierung.



Für x=7 erhält man den Wert für das Jahr 2002.
(weil ja bei 1995 begonnen wurde)

Die Werte für die Jahre 2000, 2010, 2020, 2030, 2040 und 2050 ermittelt man mit der Tabelle.



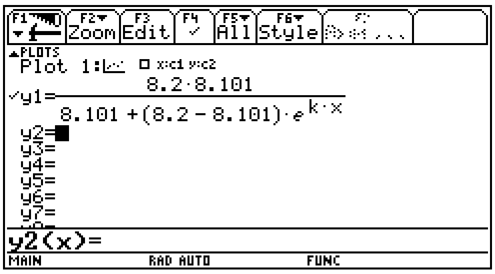
x	y1
5.	8.1769
15.	8.19874
25.	8.19993
35.	8.2
45.	8.2
55.	8.2
65.	8.2
75.	8.2

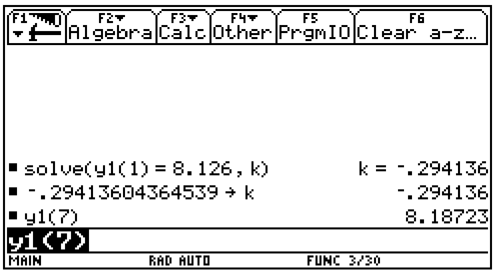
x = 5 entspricht dem Jahr 2000, x=15 dem Jahr 2010, ...

Bemerkung: Vergleiche mit der Tabelle für das exponentielle Wachstum!

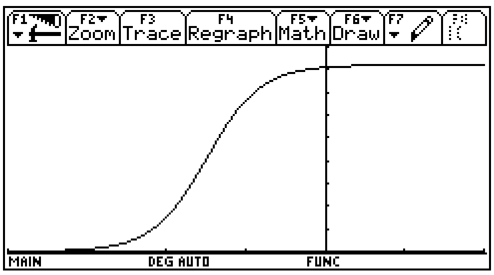
Kontinuierliches logistisches Wachstum

Analog zum obigen Beispielteil verwendet man wieder die Formel $N(t) = G \cdot n0 / (n0 + (G - n0) \cdot e^{kt})$ und erhält für den Parameter k den Wert –0,294136.

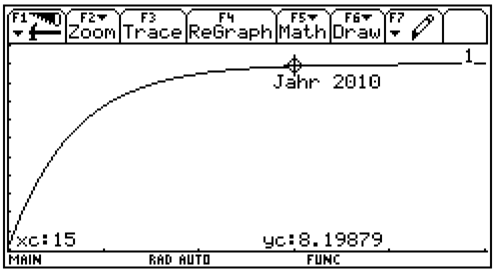




Für das Jahr 2002 ergibt sich eine Bevölkerungszahl von $y(7)$ = 8,18 Millionen.
Die grafische Darstellung von $y1(x)$ würde dann etwa so aussehen.



Aus der Grafik ist „abzulesen“, dass vor etwa 40 Jahren die Bevölkerungszahl 0 war oder anders ausgedrückt, in 40 Jahren ist die Bevölkerungszahl von 0 auf 8 Millionen gewachsen!
Diese Werte stimmen auch nicht mit den Vorgaben überein.
dh.: **Jedes Modell ist nur innerhalb bestimmter Grenzen gültig und sinnvoll.**



Die Bevölkerungszahl im Jahre 2010 wird aus der Grafik ermittelt.

Die Werte für die Jahre 2000, 2010, 2020, 2030, 2040 und 2050 erhält man wieder mit der Tabelle.

x	y2
5.	8.17704
15.	8.19878
25.	8.19994
35.	8.2
45.	8.2
55.	8.2
65.	8.2
75.	8.2

x=5.

x = 5 entspricht dem Jahr 2000, *x* = 15 dem Jahr 2010, ...

Vergleich:

Als Vergleich wird abschließend noch das gebremste Wachstum dem logistischen Wachstum gegenübergestellt.

x	y1	y2
5.	8.1769	8.17704
15.	8.19874	8.19878
25.	8.19993	8.19994
35.	8.2	8.2
45.	8.2	8.2
55.	8.2	8.2
65.	8.2	8.2
75.	8.2	8.2

x=5.

x = 5 entspricht wieder dem Jahr 2000

*y*1 ... gebremstes Wachstum
*y*2 ... logistisches Wachstum

Zusätzliche Bemerkung

Auf dem TI 92 Plus steht auch eine **logistische Regression** zur Verfügung. Man wählt dazu im Data/Matrix-Editor `F5/Calculation Type/Logistic`. Für die gegebenen tabellarischen Werte dieses Beispiels ergibt sich jedoch kein vernünftiges Ergebnis. Probiere selbst!

BspNr: D0420b

Ausarbeitung (System: DERIVE)

Ungebremstes exponentielles Wachstum – mit Regression

Zuerst werden die Daten eingegeben.

$$m1 := \begin{bmatrix} 1950 & 6.935 \\ 1960 & 7.047 \\ 1970 & 7.467 \\ 1980 & 7.549 \\ 1990 & 7.718 \\ 1991 & 7.808 \\ 1992 & 7.907 \\ 1993 & 7.995 \\ 1994 & 8.059 \\ 1995 & 8.101 \\ 1996 & 8.126 \end{bmatrix}$$

Um die grafische Darstellung zu vereinfachen, setzen wir für 1950 das Jahr 0 ein. Der folgende Befehl rechnet die Tabelle um.

$$m11 := \mathrm{VECTOR}\left(\left[m1\ \mathrm{COL}\ 1_i - 1950,\ m1\ \mathrm{COL}\ 2_i\right],\ i,\ 1,\ \mathrm{DIM}(m1)\right)$$

Man erhält dann diese Tabelle:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6.935 \\ 10 & 7.047 \\ 20 & 7.467 \\ 30 & 7.549 \\ 40 & 7.718 \\ 41 & 7.808 \\ 42 & 7.907 \\ 43 & 7.995 \\ 44 & 8.059 \\ 45 & 8.101 \\ 46 & 8.126 \end{bmatrix}$$

Für die exponentielle Regression verwenden wir wieder einen Trick. Also zuerst logarithmieren, dann eine lineare Regression durchführen und die Ergebnisse wieder zurückrechnen.
Die Matrix wurde logarithmiert und als M_2 abgespeichert.

$$m2 := \mathrm{VECTOR}\left(\left[m1\ \mathrm{COL}\ 1_i - 1950,\ \mathrm{LN}(m1\ \mathrm{COL}\ 2_i)\right],\ i,\ 1,\ \mathrm{DIM}(m1)\right)$$

Eine lineare Regression durchführen und die Ergebnisse der Regression wieder zurückrechnen.

$$\mathrm{FIT}([x,\ u\cdot x + v],\ m2)$$

$$0.003368458\cdot x + 1.929472$$

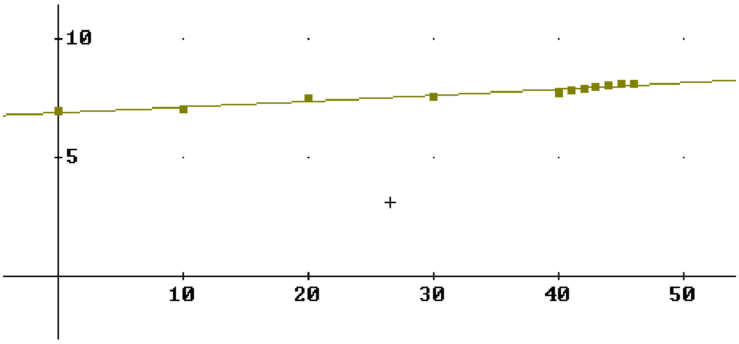
$$\{u := 0.003368458,\ v := 1.929472\}$$

$$\{c := \hat{e}^{v},\ a := u\}$$

Man erhält dann diese Funktion für die Bevölkerungsentwicklung mit ungebremstem Wachstum.

$$bu(t) := c\cdot \hat{e}^{a\cdot t}$$

Grafisch:



Für die zukünftigen Bevölkerungszahlen ergibt sich dann:

```
VECTOR([x + 1950, bu(x)], x, 50, 100, 10)
```

2000	8.148997
2010	8.428168
2020	8.716903
2030	9.015529
2040	9.324386
2050	9.643824

Folgerung: Diese Entwicklung ist eher unrealistisch – das Wachstum kann nicht ungebremst sein.

Gebremstes Wachstum

Dazu benötigt man zwei Wertepaare und den Grenzwert. Für die Wertepaare wurden von uns die Werte von 1995 (t = 0) und 1996 (t = 1) gewählt. Es ist jedoch auch möglich andere Wertepaare aus der Tabelle zu nehmen. Der Leser wird aufgefordert, andere Varianten zu probieren und mit der vorgerechneten zu vergleichen.

Wir verwenden die kontinuierliche Formel mit dem Grenzwert g = 8,2 und den Werten $y(0)$ = 8,101 und $y(1)$ = 8,126.

$y(t) = G + (y(0) - G) \cdot e^{k.t}$

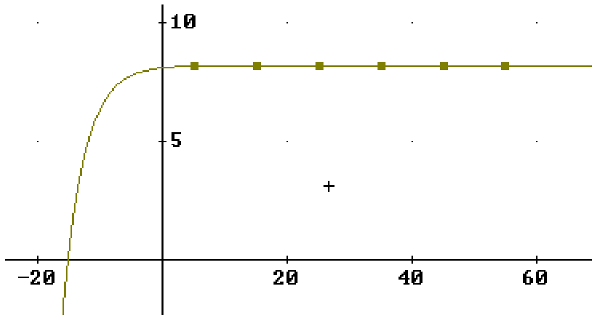
Die Parameter und der Funktionsansatz werden eingegeben:

```
k :=
G := 8.2
y0 := 8.101
y(t) := G + (y0 - G)·ê^(k·t)
```

Der Parameter k wird berechnet. Bei diesem Ansatz wird das Jahr 1995 als Jahr 0 angenommen.

```
APPROX(SOLVE(y(1) = 8.126, k, Real))
k = -0.291054
k := -0.291054
```

Die grafische Darstellung ergibt das folgende Bild. Es kommt dabei sehr schnell zu einer Stabilisierung.



Die Werte für die Jahre 2000, 2010, 2020, 2030, 2040 und 2050 ermittelt man mit der Tabelle.

```
VECTOR([t, y(t)], t, 5, 55, 10)
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 8.1769 \\ 15 & 8.19874 \\ 25 & 8.19993 \\ 35 & 8.2 \\ 45 & 8.2 \\ 55 & 8.2 \end{bmatrix}$$

Kontinuierliches logistisches Wachstum

Analog zum obigen Beispielteil verwendet man wieder die Formel $N(t) = G \cdot n0 / (n0 + (G - n0) \cdot e^{kt})$.
Die Parameter werden eingegeben und die Funktion angesetzt.

```
G := 8.2
y0 := 8.101
c :=
```

$$y1(t) := \frac{G \cdot y0}{y0 + (G - y0) \cdot \hat{e}^{c \cdot t}}$$

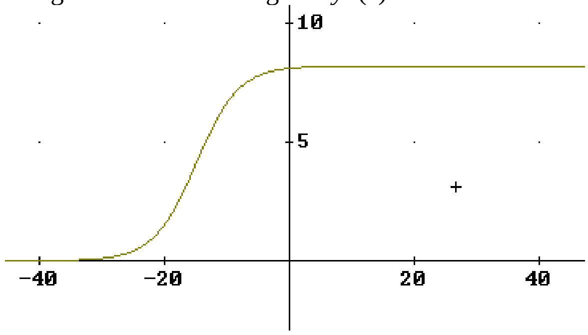
Durch Lösen dieser Gleichung ergibt sich der Wert für den Parameter *c*.

```
y1(1) = 8.126
APPROX(SOLVE(y1(1) = 8.126, c, Real))
c = -0.29413
c := -0.29413

y1(7) = 8.18723
```

Im Jahr 2002 (1995 + 7) errechnet sich eine Bevölkerungszahl von 8,18 Millionen.

Die grafische Darstellung von $y1(x)$ würde dann etwa so aussehen.



Aus der Grafik ist „abzulesen“, dass vor etwa 40 Jahren die Bevölkerungszahl 0 war oder anders ausgedrückt, in 40 Jahren ist die Bevölkerungszahl von 0 auf 8 Millionen gewachsen!
Diese Werte stimmen auch nicht mit den Vorgaben überein.
D.h.: **jedes Modell ist nur innerhalb bestimmter Grenzen gültig und sinnvoll.**

Die Werte für die Jahre 2000, 2010, 2020, 2030, 2040 und 2050 erhält man wieder mit der Tabelle, wobei das gebremste dem logistischen Wachstum gegenübergestellt wird.

```
VECTOR([t, y(t), y1(t)], t, 5, 65, 10)
```

5	8.1769	8.17703
15	8.19874	8.19878
25	8.19993	8.19993
35	8.2	8.2
45	8.2	8.2
55	8.2	8.2
65	8.2	8.2

Dabei entspricht 5 dem Jahr 2000, 15 dem Jahr 2010, usw., oder direkt mit einem Trick berechnet und angezeigt:

```
VECTOR([t + 1995, y(t), y1(t)], t, 5, 65, 10)
```

2000	8.176899	8.177038
2010	8.198742	8.198784
2020	8.199931	8.199935
2030	8.199996	8.199996
2040	8.199999	8.199999
2050	8.2	8.2
2060	8.2	8.2