

Themenbereich	
Wachstumsprozesse	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> • Das Wesen des logistischen Wachstums kennen. • Entscheiden können, welche Wachstumsvorgänge nach dem logistischen Prinzip ablaufen 	TI-92 (D0419a), DERIVE (D0419b), Mathematica (D0419c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0410 – D0420
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner	

Ausbreitung eine Grippeepidemie – Anwendung des logistischen Wachstums

Angabe und Fragen:

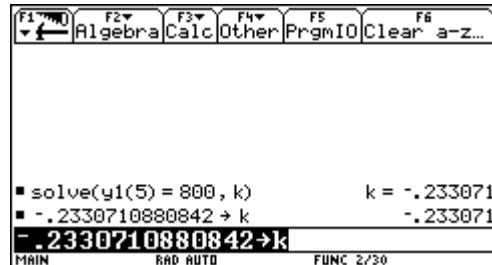
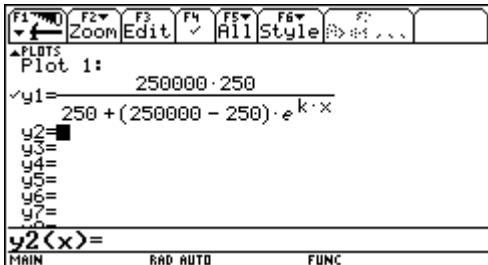
In einer Stadt mit 250000 Einwohnern/innen sei die Anzahl der Menschen, die bei Ausbruch einer Grippeepidemie bereits infiziert sind, 250. Die Grippeepidemie verläuft (näherungsweise) nach der Formel für das kontinuierliche logistische Wachstum. Nach 5 Tagen sind bereits 800 Einwohner/innen dieser Stadt infiziert.

- Erstelle eine algebraische Formel, die die Entwicklung der Grippeepidemie beschreibt!
- Erstelle eine Tabelle, die die Ausbreitung der Grippeepidemie darstellt!
- Wie viele Personen sind nach 30 Tagen infiziert? Wie viele Personen sind nach 40 Tagen noch nicht infiziert? Wann sind 75% der Einwohner/innen der Stadt mit Grippeviren infiziert, wann 90%, wann 95%, wann 99%?
- Stelle die Entwicklung der Grippeepidemie grafisch dar! Lies aus der Grafik ab, ab welchem Zeitpunkt der Zuwachs an infizierten Personen deutlich geringer wird! Worauf könnte dies zurückzuführen sein?

BspNr: D0419a

Ausarbeitung (System: TI-92)

Für die Kapazitätsgrenze G setzt man 250000, außerdem gilt $n(0) = 250$ und $n(5) = 800$.
Wir verwenden die Formel für das kontinuierliche Modell.



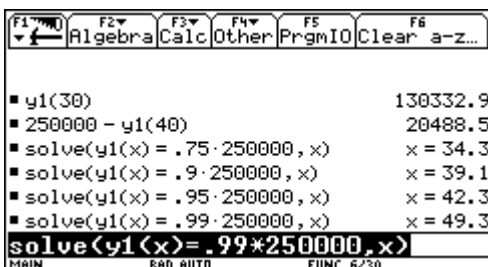
Die Funktion wird eingegeben – solve liefert uns den Parameter k .
Damit ist die algebraische Formel erstellt und als $y1(x)$ gespeichert.

Für die Tabelle wurde ein Intervall von 5 Tagen gewählt.

x	y1
0.	250.
5.	800.
10.	2548.
15.	7991.
20.	23938.
25.	63378.
30.	130333.
35.	194357.

x	y1
40.	229511.
45.	243230.
50.	247849.
55.	249325.
60.	249789.
65.	249934.
70.	249979.
75.	249994.

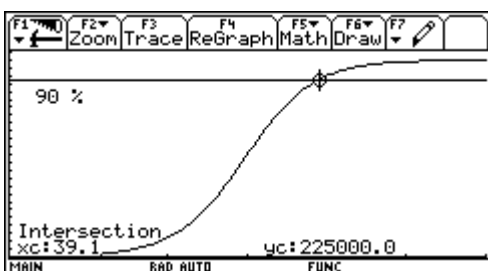
Die Anzahl der infizierten Personen kann auch mit Hilfe der Formel berechnet werden. Im HOME Screen rechnet man dann:



Infizierte nach 30 Tagen.
Nicht infizierte nach 40 Tagen.

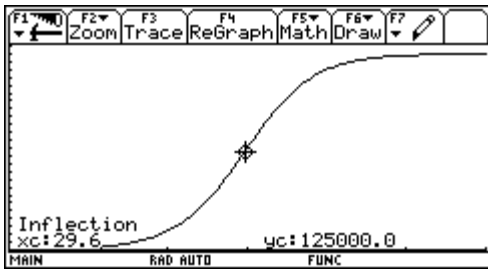
Nach 35 Tagen sind 75%, nach 40 Tagen sind 90%, nach 43 Tagen sind 95% und nach 50 Tagen sind 99% infiziert.

Grafische Variante



Nach 40 Tagen sind 90% der Bevölkerung infiziert.

Der Zuwachs wird ab dem Wendepunkt geringer – suchen mit F5/Inflection



Wendepunkt bei 29,6 Tagen – genau dann, wenn die Hälfte infiziert ist.

Grund : Symmetrie

Medizinisch: wenn die Hälfte der Bevölkerung bereits erkrankt ist, kann nicht mehr jeder Kranke einen Gesunden anstecken bzw. die noch Gesunden werden schwerer gefunden; damit muss der Zuwachs geringer werden.

BspNr: D0419b

Ausarbeitung (System: DERIVE)

Für die Kapazitätsgrenze G setzt man 250000, außerdem gilt $n(0) = 250$ und $n(5) = 800$. Wir verwenden die Formel für das kontinuierliche Modell.

Die Parameter werden eingegeben.

$$\begin{aligned} G &:= 250000 \\ n_0 &:= 250 \\ P(t) &:= \frac{G \cdot n_0}{n_0 + (G - n_0) \cdot e^{c \cdot t}} \end{aligned}$$

Mit den Anfangswerten $P(5) = 800$ erhalten wir den Wert für c .

$$\begin{aligned} P(5) &= 800 \\ \text{APPROX}(\text{SOLVE}(P(5) = 800, c, \text{Real})) \\ c &= -0.233071 \\ c &:= -0.233071 \end{aligned}$$

Für die Tabelle wurde ein Intervall von 5 Tagen gewählt.

VECTOR([t, P(t)], t, 0, 80, 5)

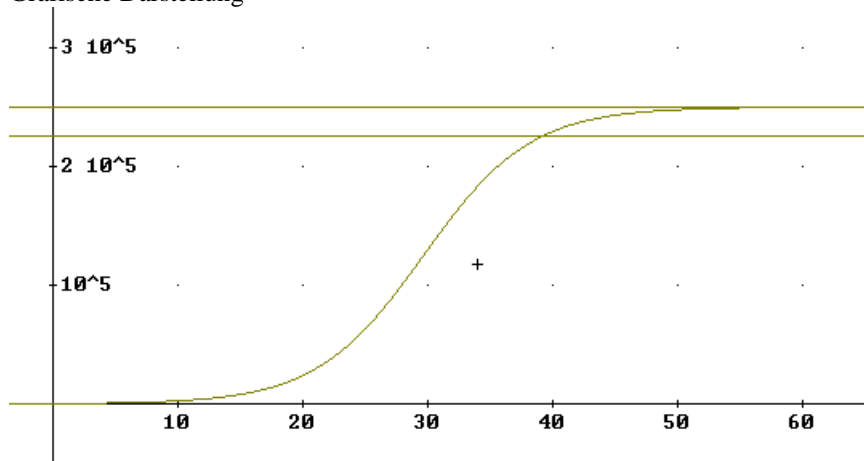
0	250
5	800
10	2547.65
15	7990.77
20	23938.2
25	63377.5
30	130332
35	194356
40	229511
45	243229
50	247848
55	249325
60	249789

Die Anzahl der infizierten Personen kann auch mit Hilfe der Formel berechnet werden.

$$\begin{aligned} P(30) &= 130332.9 \\ G - P(40) &= 20488.4 \\ \text{SOLVE}(P(t) = 0.75 \cdot G, t, \text{Real}) \\ t &= 34.3473 \\ \text{SOLVE}(P(t) = 0.9 \cdot G, t, \text{Real}) \\ t &= 39.0609 \\ \text{SOLVE}(P(t) = 0.95 \cdot G, t, \text{Real}) \\ t &= 42.2669 \\ \text{SOLVE}(P(t) = 0.99 \cdot G, t, \text{Real}) \\ t &= 49.3492 \end{aligned}$$

Nach 30 Tagen sind 130333 Personen infiziert, nach 40 Tagen sind noch ca. 34 Personen nicht infiziert.
Nach 35 Tagen sind 75%, nach 39 Tagen sind 90%, nach 43 Tagen sind 95% und nach 50 Tagen sind 99% infiziert.

Grafische Darstellung



Der Zuwachs wird ab dem Wendepunkt geringer – im Wendepunkt ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Seuche maximal.

Medizinisch: Wenn die Hälfte der Bevölkerung bereits erkrankt ist, kann nicht mehr jeder Kranke einen Gesunden anstecken bzw. die noch gesunden werden schwerer gefunden. Damit muss der Zuwachs geringer werden.