BspNr: D0418

Themenbereich	
Wachstumsprozesse	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Das Wesen des logistischen Wachstums kennen. • Entscheiden können, welche Wachstumsvorgänge nach dem logistischen Prinzip ablaufen	TI-92 (D0418a), DERIVE (D0418b), Mathematica (D0418c)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	D0410 – D0420
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Alfred Eisler, Sonja Reitner	

Logistisches Wachstum als Verfeinerung des beschränkten Wachstums

Angabe und Fragen:
In einer Stadt mit 14000 Einwohnern breitet sich ein Gerücht aus.
Wir wollen nun diese Aufgabe mit Hilfe des logistischen Wachstums untersuchen. Dabei gehen wir davon aus, dass die Urheber des Gerüchts 20 Personen sind und dass nur jeder 200ste derer, die das Gerücht bereits kennen dieses auch weitererzählt. Pro Zeiteinheit ist nur ein Hundertstel der Personen, die es noch nicht kennen, zu erreichen.

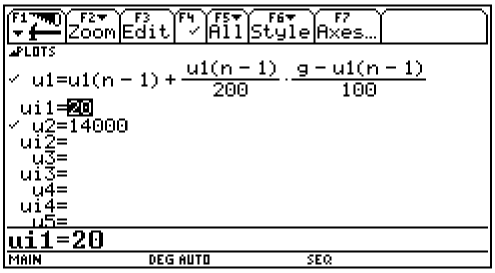
Wie sieht die Ausbreitungskurve für das Gerücht aus?

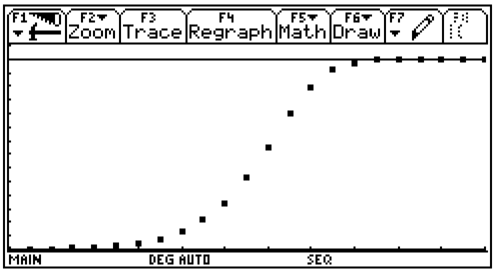
BspNr: D0418a

Ausarbeitung (System: TI-92)

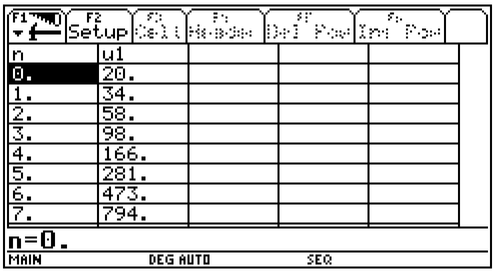
Diskretes Modell: $N(t) = N(t\text{-}1) + N(t\text{-}1) \cdot w \cdot (G - N(t\text{-}1)) \cdot k$, wobei $w = 1/200$ der „Weitererzählfaktor“ ist und für $k = 1/100$ gesetzt wird.

Die Formel wird im `Sequence Mode` eingegeben und die Ausbreitung grafisch dargestellt.



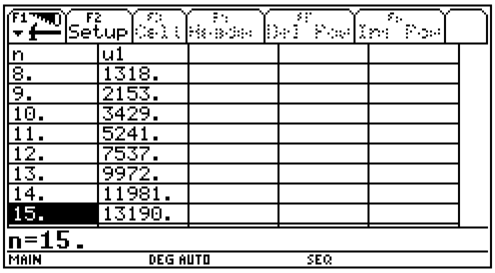


Tabellarische Darstellung



n	u1
0.	20.
1.	34.
2.	58.
3.	98.
4.	166.
5.	281.
6.	473.
7.	794.

n=0.

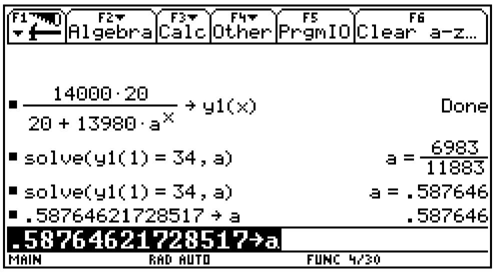


n	u1
8.	1318.
9.	2153.
10.	3429.
11.	5241.
12.	7537.
13.	9972.
14.	11981.
15.	13190.

n=15.

Kontinuierliches Modell

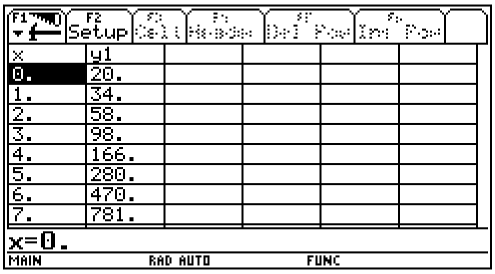
Formel : $N(t) = \dfrac{G.N(0)}{N(0) \ + \ (G \ - \ N(0) \cdot a^{t}}$ oder $N(t) = \dfrac{G.N(0)}{N(0) \ + \ (G \ - \ N(0) \cdot e^{k.t}}$



Aus dem Wert nach 1 Tag wird *a* ermittelt.
(dieser Wert wurde mit der rekursiven Formel ermittelt)

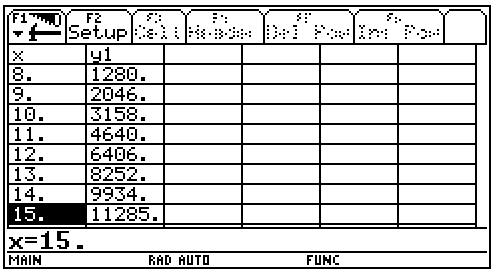
Die Funktion wird als $y1(x)$ abgespeichert.

Tabellarische Darstellung



x	y1
0.	20.
1.	34.
2.	58.
3.	98.
4.	166.
5.	280.
6.	470.
7.	781.

x=0.

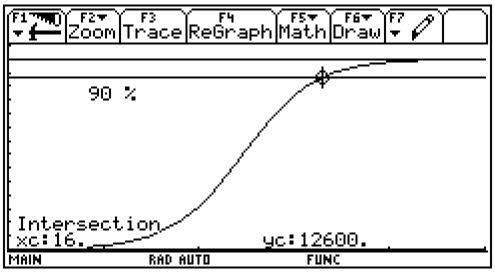


x	y1
8.	1280.
9.	2046.
10.	3158.
11.	4640.
12.	6406.
13.	8252.
14.	9934.
15.	11285.

x=15.

Zusatzfrage:
Nach wie viel Tagen kennen 90% das Gerücht?

Grafische Lösung im `Function Mode` mit `F5/Intersection`:



Nach 16 Tagen sind 90% informiert.

Ein andere Lösungsweg führt wieder über den `HOME Screen` und den Befehl `solve` – Rechne selbst!

BspNr: D0418b

Ausarbeitung (System: DERIVE)

Diskretes Modell: $N(t) = N(t\text{-}1) + N(t\text{-}1) \cdot w \cdot (G - N(t\text{-}1)) \cdot k$, wobei $w = 1/200$ der „Weitererzählfaktor“ ist und für $k = 1/100$ gesetzt wird.

Zuerst werden die Parameter eingegeben.

```
G := 14000

n0 := 20

       1
w := ───
      200

k := 0.01
```

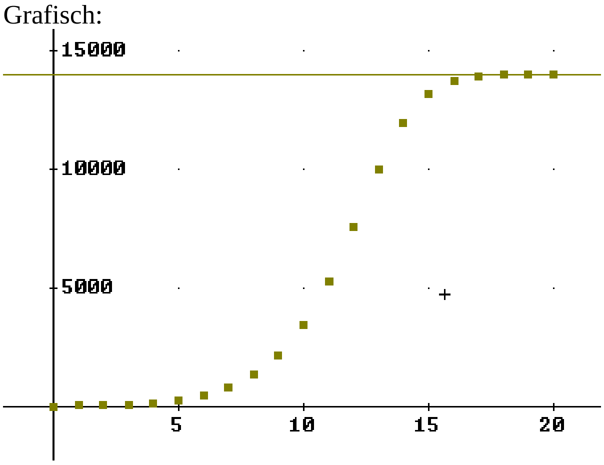
Die Anzahl der Personen, die das Gerücht am Tage t kennen lässt sich dann so berechnen:

```
N(t) :=
  If t = 0
     n0
     N(t - 1) + N(t - 1)·w·(G - N(t - 1))·k
```

```
VECTOR([t, N(t)], t, 0, 20)
```

0	20
1	33.98
2	57.708268
3	97.93755
4	166.01424
5	280.84615
6	473.49473
7	793.73118
8	1317.8425
9	2153.4968
10	3429.0675
11	5241.4893
12	7536.8709
13	9972.4594
14	11980.684
15	13190.325
16	13724.318
17	13913.495
18	13973.675
19	13992.068
20	13997.617

Grafisch:



Kontinuierliches Modell

Formel : $N(t) = \dfrac{G.N(0)}{N(0) + (G - N(0)\cdot a^{t}}$ oder $N(t) = \dfrac{G.N(0)}{N(0) + (G - N(0)\cdot e^{k.t}}$

$$P(t) := \frac{G \cdot n0}{n0 + (G - n0) \cdot ê^{c \cdot t}}$$

Wir berechnen den Wert für die Konstante *c* aus *P*(1) = 34. Diesen Wert haben wir aus der rekursiven Formel erhalten.

```
APPROX(SOLVE(P(1) = 34, c, Real))
c = -0.53163011
c := -0.53163011
```

Zusatzfrage :
Nach wie vielen Tagen kennen 90% das Gerücht?

```
14000·0.9
P(t) = 14000·0.9
APPROX(SOLVE(P(t) = 14000·0.9, t, Real))
t = 16.452937
```

Nach ca. 16,5 Tagen sind 90% der Bevölkerung informiert.

Tabellarische Darstellung von *P*(*t*):

```
VECTOR([t, ROUND(P(t)),      , t + 10, ROUND(P(t + 10))], t, 0, 10)
```

0	20	10	3158
1	34	11	4640
2	58	12	6406
3	98	13	8252
4	166	14	9934
5	280	15	$1.1285 \cdot 10^4$
6	470	16	$1.2266 \cdot 10^4$
7	781	17	$1.2926 \cdot 10^4$
8	1280	18	$1.3348 \cdot 10^4$
9	2046	19	$1.361 \cdot 10^4$
10	3158	20	$1.3768 \cdot 10^4$

Grafische Darstellung: