

Themenbereich	
Monotonie und Grenzwert	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> Eigenschaften von Folgen 	TI-92 (D0310a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Bestimmung von Folgengliedern, Monotonie, Schranken, Grenzwert und Index zu einer ε -Umgebung

Angabe:

Gegeben ist die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{8n^2 + 10n}{2n^2 - 1} \right\rangle$.

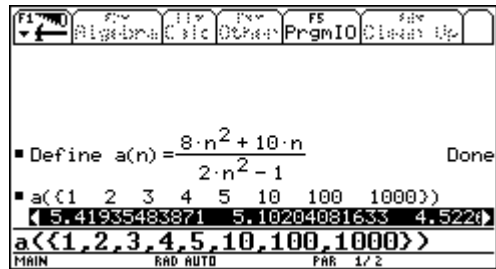
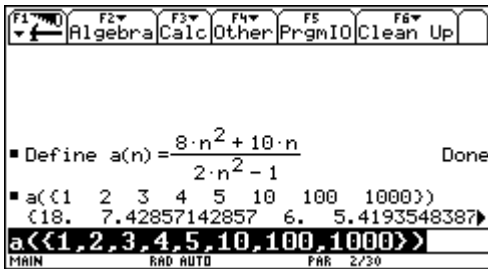
Fragen:

- Bestimme die Folgenglieder $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{10}, a_{100}, a_{1000}$!
- Untersuche die Folge im Graphikfenster auf Monotonieeigenschaften!
- Bestimme eine obere und eine untere Schranke und überprüfe ihre Eigenschaft!
- Bestimme den Grenzwert!
- Berechne im Homebereich und graphisch zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ den Index N_0 , sodass für alle $n > N_0$ gilt

$$|a_n - \text{Grenzwert}| < \frac{1}{10}$$

Ausarbeitung (System: TI-92)

ad 1)



$a_1 = 18$ $a_2 = 7,4\dots$ $a_3 = 6$

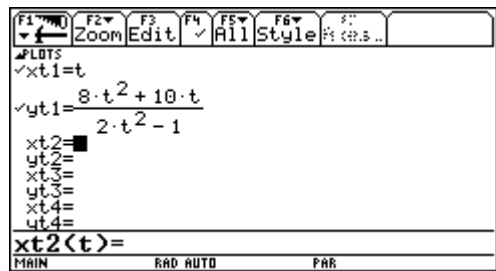
$a_4 = 5,4\dots$ $a_5 = 5,1\dots$ $a_{10} = 4,5\dots$

$a_{100} = 4,05\dots$ $a_{1000} = 4,005\dots$

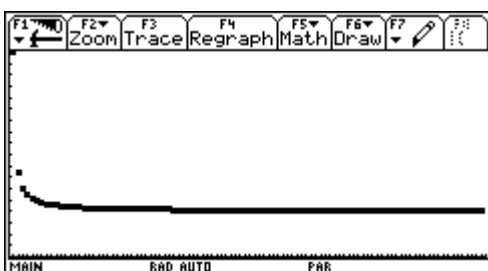
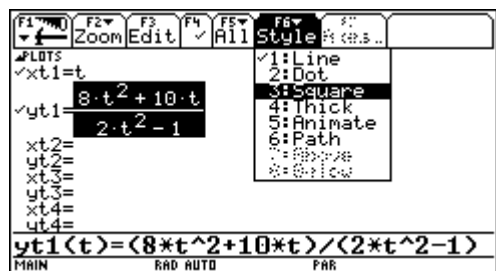
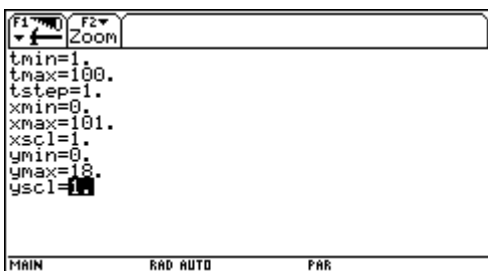
ad 2)

Die Folge ist monoton fallend.

Wir stellen den MODE Graph auf PARAMETRIC und geben den zur Folge gehörigen Funktionsterm ein.



Wir wählen folgende Windoweinstellung, um nur natürliche Zahlen für t zu bekommen, und stellen für y1 den STYLE auf Square.



Die Vermutung, dass die Folge fallend ist, wird mit der Graphik erhärtet.

Um zu beweisen, dass die Folge für die ersten hundert Glieder fällt, genügt es auch zu zeigen, dass $a_n - a_{n+1} > 0$ ist.

Dazu betrachten wir die Funktion $y1(t) - y1(t + 1)$. Die Windowvariablen werden so angepasst, dass man deutlich sehen kann, ob die Funktion für die ersten hundert Glieder größer als Null ist..

```

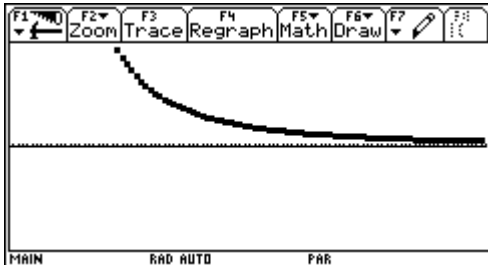
F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style
#PLOTS
√xt1=t
√yt1=8·t2+10·t
√xt2=
√yt2=yt1(t)-yt1(t+1)
xt3=
yt3=
xt4=
yt4=
t14=
xt2(t)=t
MAIN RAD AUTO PAR

```

```

F1 F2
Zoom
tmin=10.
tmax=100.
tstep=1.
xmin=0.
xmax=101.
xscl=1.
ymin=-.01
ymax=.01
yscl=1.
MAIN RAD AUTO PAR

```



ad 3)

Untere Schranke: 0

Obere Schranke: 20

Es ist also zu zeigen:

$$0 < \frac{8n^2 + 10n}{2n^2 - 1} \Rightarrow 0 < 8n^2 + 10n \quad \text{wahre Aussage für } n \text{ aus den natürlichen Zahlen}$$

$$20 > \frac{8n^2 + 10n}{2n^2 - 1} \Rightarrow 40n^2 - 20 > 8n^2 + 10n \Rightarrow 32n^2 - 10n - 20 > 0$$

Letzte Beziehung lässt sich auch graphisch überprüfen:

```

MODE
Page 1 Page 2 Page 3
Graph.....
Current Folder....
Display Digits....
Angle.....
Exponential Format
Complex Format....
Vector Format.....
Pretty Print..... ON
1:FUNCTION
2:PARAMETRIC
3:POLAR
4:SEQUENCE
5:3D
6:DIFF EQUATIONS
RECTANGULAR
(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)
MAIN RAD AUTO PAR

```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Edit All Style
#PLOTS
√y1=32·x2-10·x-20 | x ≥ 1
y2=
y3=
y4=
y5=
y6=
y7=
y8=
y9=
y10=
y2(x)=
MAIN RAD AUTO FUNC

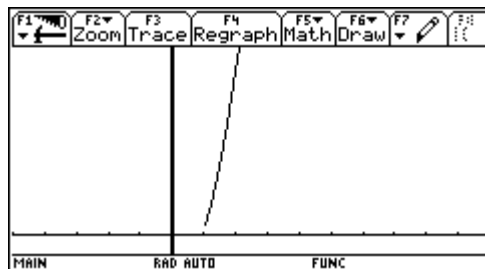
```

Der Teil der entsprechenden quadratischen Funktion hat nur positive Funktionswerte.

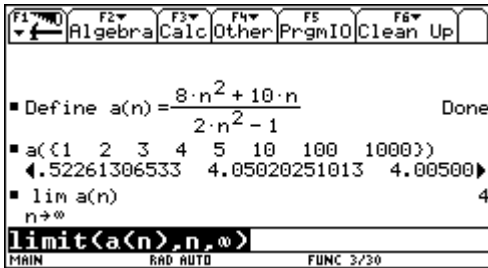
```

F1 F2
Zoom
xmin=-5.
xmax=10.
xscl=1.
ymin=-10.
ymax=100.
yscl=1.
xres=2.
MAIN RAD AUTO FUNC

```

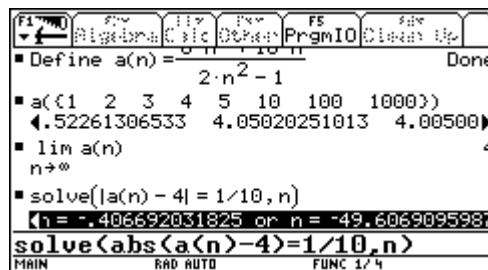
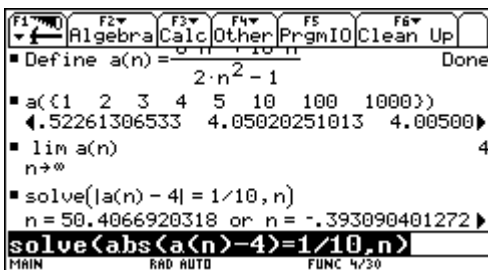


ad 4)



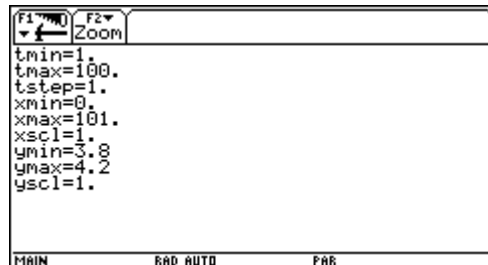
ad 5)

Homebereich:

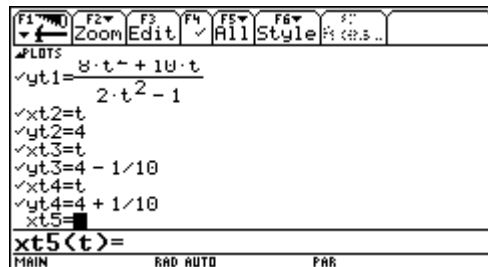
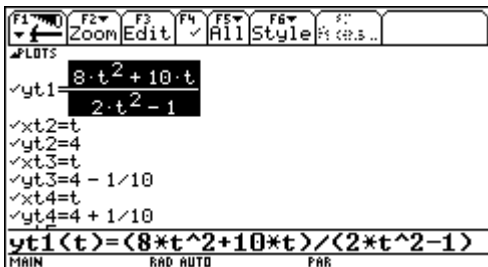


Da n eine natürliche Zahl ist, kommt von den vier Lösungen nur 50,4 in Frage. Daher ist der Index $N_0 = 50$.

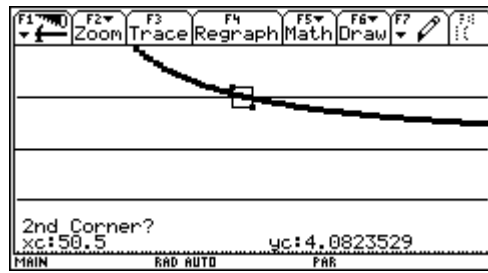
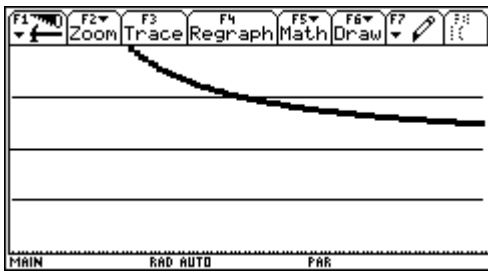
Graphisch:



Falls der gesuchte Index größer als 100 ist, müssen tmax und xmax noch verändert werden. y2 zeichnet eine horizontale Linie für den Grenzwert und y3 und y4 zeichnen den Rand der ε-Umgebung.



Mit der ZoomBox wird der entscheidende Bereich herausgezoomt.



Mit Trace kann das letzte Folgenglied außerhalb der Umgebung angefahren werden, sein Index ist der gesuchte.

