BspNr: B1111

Themenbereich	
Differentialrechnung, Einführung	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Einführung in die Differentialrechnung	TI-92 (B1111a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	B1110
Lehrplanbezug (Österreich):	7. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Näherungsweise Berechnung von Extremwerten und Wendepunkten (2)

Angabe:
Die angegebenen Funktionen $y1$, $y2$, $y3$, $y4$ und $y5$ beschreiben die Höhe eines Drachenfluges in Abhängigkeit von der Zeit x. Die Höhe $y1$, $y2$, $y3$, $y4$ und $y5$ wird in Meter m und die Zeit x in Sekunden s angegeben. Die Zeitrechnung beginnt mit dem Start des Fluges für $x = 0$ s. Zu Beginn des Fluges wird der Drachen mit der besten Sinkgeschwindigkeit von 2 Metern pro Sekunde geflogen. Erst am Ende des Fluges wird der Drachen mit einer Sinkgeschwindigkeit von 4 Metern pro Sekunde geflogen, um den Flug zu beenden. Am Anfang und am Ende des Fluges gibt es keine Aufwinde.

$$y1(x) = 2000 - 2x \quad \textit{für} \quad 0 \le x \le 240$$
$$y2(x) = \frac{x^3}{7200} - \frac{x^2}{8} + 36x - 1840 \quad \textit{für} \quad 240 \le x \le 360$$
$$y3(x) = -\frac{13x^3}{1481760} + \frac{169x^2}{8232} - \frac{3900}{343}x + \frac{1112000}{343} \quad \textit{für} \quad 360 \le x \le 1200$$
$$y4(x) = \frac{x^3}{33750} - \frac{19x^2}{150} + 176x - 76000 \quad \textit{für} \quad 1200 \le x \le 1500$$
$$y5(x) = 9000 - 4x \quad \textit{für} \quad x \ge 1500$$

Fragen:
1) Wie groß ist die Flughöhe zu Flugbeginn?

2) Wann erreicht der Drachen die größte Flughöhe?

3) Wie lange dauert der gesamte Flug?

4) Wann hat dieThermik eingesetzt?

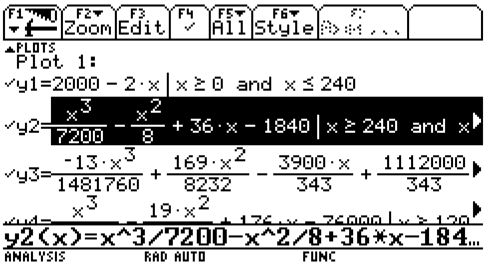
5) Wann war die Thermik am stärksten und wie groß war sie zu diesem Zeitpunkt?

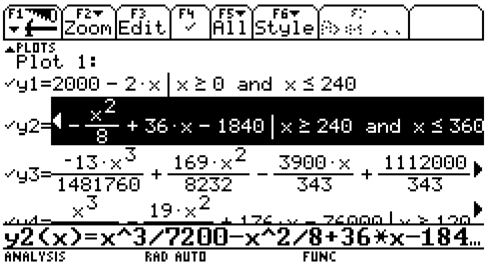
6) Wann waren Thermik und Sinkgeschwindigkeit gleich groß?

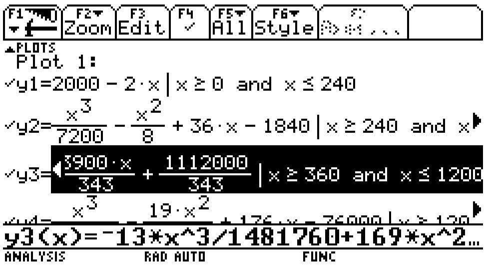
BspNr: B1111a

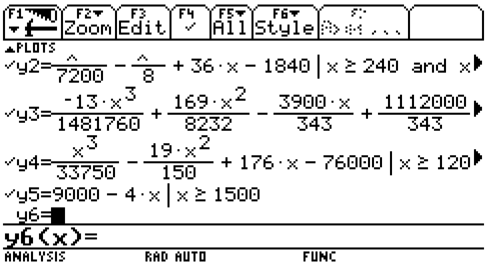
Ausarbeitung (System: TI-92)

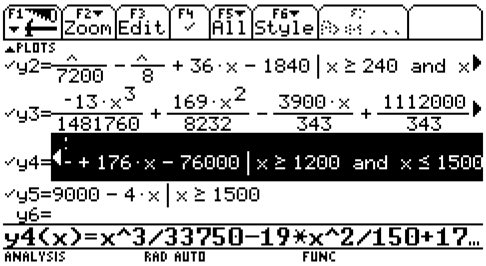
Zunächst werden die Funktionen in den `[y=]-Editor` eingegeben.



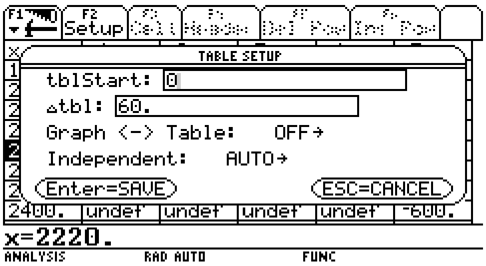


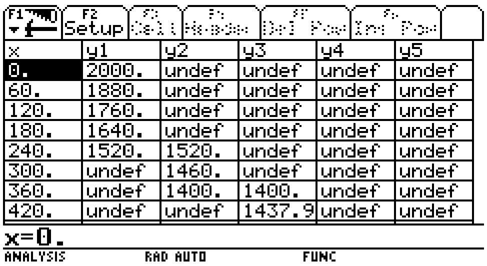






Um einen Überblick über die Funktion zu bekommen, ist es am günstigsten ihre Werte in einer Tabelle zu betrachten. Wir wählen zunächst `tblStart:0` und Δ`tbl:60`, also Minutenschritte.

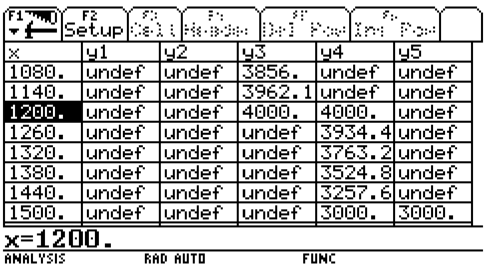




x	y1	y2	y3	y4	y5
0.	2000.	undef	undef	undef	undef
60.	1880.	undef	undef	undef	undef
120.	1760.	undef	undef	undef	undef
180.	1640.	undef	undef	undef	undef
240.	1520.	1520.	undef	undef	undef
300.	undef	1460.	undef	undef	undef
360.	undef	1400.	1400.	undef	undef
420.	undef	undef	1437.9	undef	undef

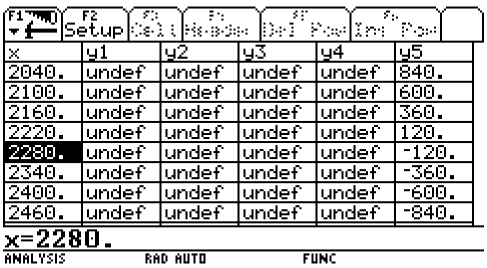
x=0.

Damit können wir die erste Frage schon beantworten. Der Drachen startete zum Zeitpunkt x = 0 s in 2000 m Höhe. Mit ein wenig Scrollen sehen wir, dass 4000 m etwa die größte Höhe ist und der Flug nach 2300 Sekunden sicher schon zu Ende ist.



x	y1	y2	y3	y4	y5
1080.	undef	undef	3856.	undef	undef
1140.	undef	undef	3962.1	undef	undef
1200.	undef	undef	4000.	4000.	undef
1260.	undef	undef	undef	3934.4	undef
1320.	undef	undef	undef	3763.2	undef
1380.	undef	undef	undef	3524.8	undef
1440.	undef	undef	undef	3257.6	undef
1500.	undef	undef	undef	3000.	3000.

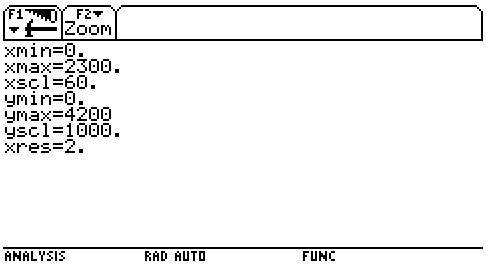
x=1200.

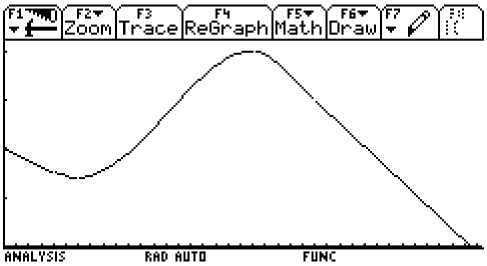


x	y1	y2	y3	y4	y5
2040.	undef	undef	undef	undef	840.
2100.	undef	undef	undef	undef	600.
2160.	undef	undef	undef	undef	360.
2220.	undef	undef	undef	undef	120.
2280.	undef	undef	undef	undef	⁻120.
2340.	undef	undef	undef	undef	⁻360.
2400.	undef	undef	undef	undef	⁻600.
2460.	undef	undef	undef	undef	⁻840.

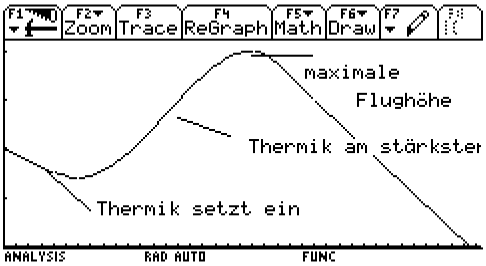
x=2280.

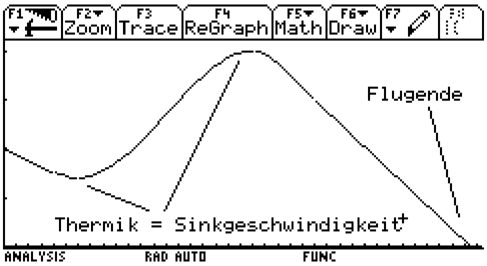
Somit lassen sich `[Window]-Variable` vernünftig festlegen und der Graph näher betrachten.



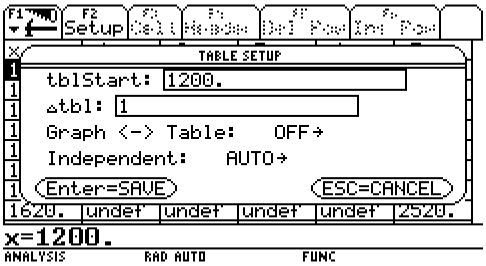


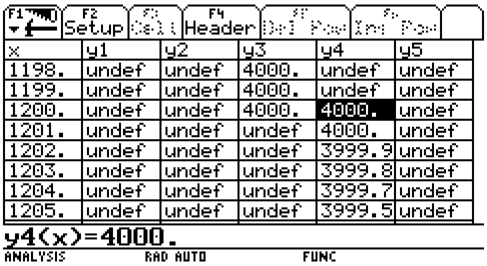
Am Graphen lassen sich die meisten Fragestellungen optisch leicht beantworten.



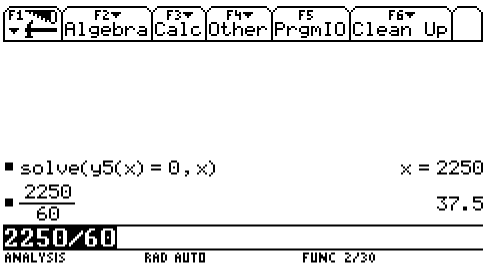


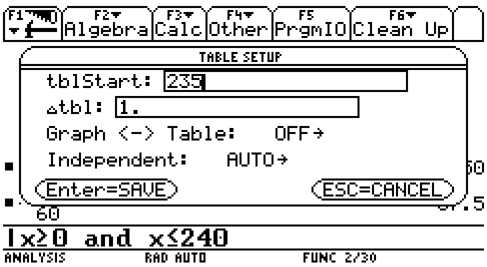
Nun wollen wir die maximale Flughöhe bestimmen. Da man die Funktion `Math/5:Maximum` bei stückweiser Definition nicht anwenden kann, gehen wir in die Tabelle. Dort können wir mit Scrollen feststellen, dass die größte Höhe 4000 m beträgt und nach 1200 s – also 20 Minuten – erreicht wurde. Das ist auch einer der beiden Zeitpunkt, an denen die Thermik und die Sinkgeschwindigkeit gleich groß sind. Den anderen berechnen wir später.



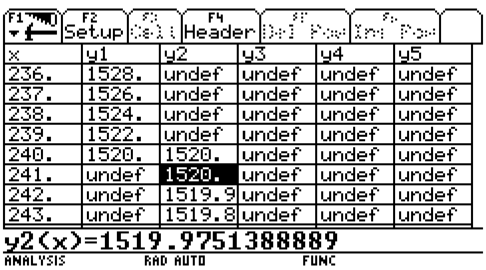


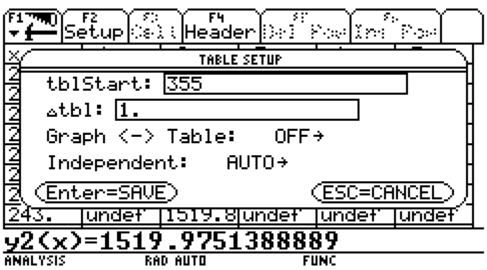
Die Berechnung des Flugendes führen wir im `Homebereich` durch, indem wir die Gleichung $y5(x) = 0$ nach x lösen. Der Flug endet nach 37,5 Minuten. Nun wenden wir uns wieder mit der Tabelle der Frage zu, wann die Thermik eingesetzt hat. Die ungefähre Position haben wir ja schon am Graphen erkannt.



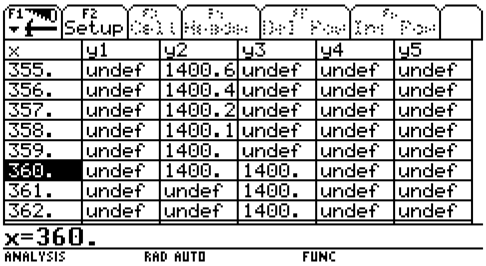


Man sieht, dass der Drachenflieger bis zur Ende der 4. Minute immer 2 m pro Sekunde sinkt. Danach verringert sich dieser Wert, weil die Thermik eingesetzt hat. Wir verändern die Tabelle und bestimmen den zweiten Zeitpunkt, indem die Thermik und die Sinkgeschwindigkeit gleich groß sind.



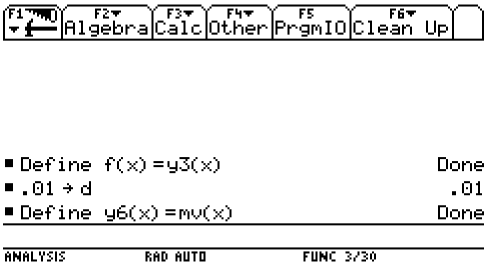


Nach 6 Minuten erreicht der Drachenflieger ein relatives Minimum an Flughöhe von 1400 m.
Thermik und Sinkgeschwindigkeit heben sich hier für einen Augenblick auf. Nun zur letzten Frage, wann die Thermik am stärksten war. Dazu greifen wir auf unsere Funktion *mv* zur Berechnung der mittleren Steiggeschwindigkeit zurück und wenden sie auf die Funktion $y3$ an, in deren Bereich die größte Steiggeschwindigkeit liegen muss. Ferner definieren wir $mv(x)$ als $y6(x)$ im `[y=]-Editor`.

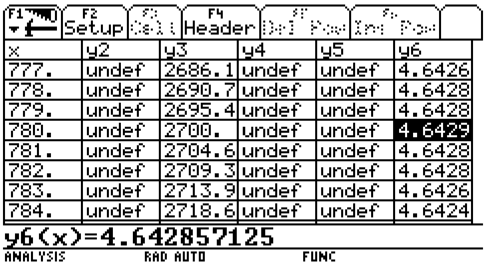


x	y1	y2	y3	y4	y5
355.	undef	1400.6	undef	undef	undef
356.	undef	1400.4	undef	undef	undef
357.	undef	1400.2	undef	undef	undef
358.	undef	1400.1	undef	undef	undef
359.	undef	1400.	undef	undef	undef
360.	undef	1400.	1400.	undef	undef
361.	undef	undef	1400.	undef	undef
362.	undef	undef	1400.	undef	undef

x=360.
ANALYSIS RAD AUTO FUNC



Danach scrollen wir in der Tabelle zum größten Wert der Funktion $y6(x)$. Die Steiggeschwindigkeit war mit etwa 4,6 m/s bei 13 Minuten am größten. Da der Drache aber eine Sinkgeschwindigkeit von 2 m/s besitzt , hatte die Thermik eine Geschwindigkeit von 6,6 m/s (Metern pro Sekunde).



x	y2	y3	y4	y5	y6
777.	undef	2686.1	undef	undef	4.6426
778.	undef	2690.7	undef	undef	4.6428
779.	undef	2695.4	undef	undef	4.6428
780.	undef	2700.	undef	undef	4.6429
781.	undef	2704.6	undef	undef	4.6428
782.	undef	2709.3	undef	undef	4.6428
783.	undef	2713.9	undef	undef	4.6426
784.	undef	2718.6	undef	undef	4.6424

y6(x)=4.642857125
ANALYSIS RAD AUTO FUNC