BspNr: B0811

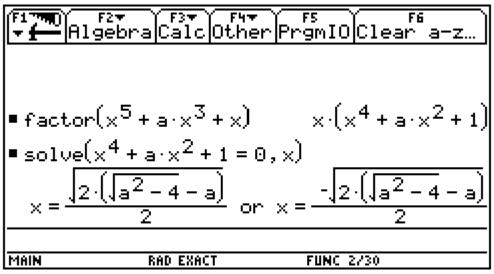
Themenbereich	
Differentialrechnung, Kurvendiskussion	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Klassische Kurvendiskussion mit Parametrisierung	TI-92 (B0811a), Derive (B0811b)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	B0812
Lehrplanbezug (Österreich):	7. Klasse
Quelle: Heiner Juen, Stationenbetrieb zur Maturavorbereitung (Tiroler Bildungsserver, www.bildungsserver.at/nlk)	

Kurvendiskussion mit Parametrisierung

Angabe und Fragen:
Für welche Werte von a hat die Kurve mit der Gleichung $y = x^5 + a\,x^3 + x$
1) mehr als eine Nullstelle
2) vier Extrema
3) nur einen Wendepunkt?

BspNr: B0811a

Ausarbeitung (System: TI-92)



$f(x)$ ist eine ungerade Funktion (zentral- symmetrisch) Durch Herausheben von x erhalten wir die Nullstelle $N_1(0/0)$ [Produkt-Null-Satz].

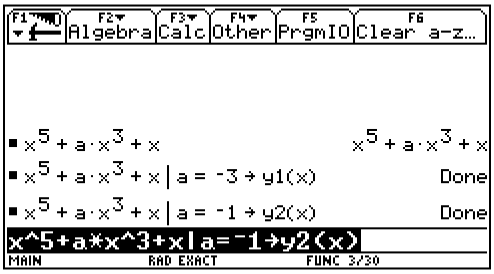
„Kleine“ Wurzel:

$$a^2-4\geq 0 \Leftrightarrow a^2\geq 4 \Leftrightarrow |a|\geq 2 \Leftrightarrow$$
$$a\leq -2 \vee a\geq 2$$

„Große“ Wurzel:

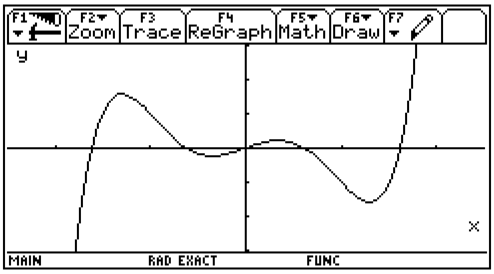
$$\sqrt{a^2-4}-a\geq 0$$
$$\textit{Fall}\ \ 1: a\leq -2 \Rightarrow \sqrt{a^2-4}-a>0$$
$$\textit{Fall}\ \ 2: a\geq 2 \Rightarrow \sqrt{a^2-4}-a<0\ \ !!$$

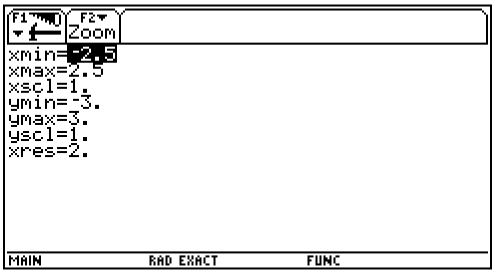
Die Kurve hat für $a \leq -2$ mehr als eine Nullstelle.



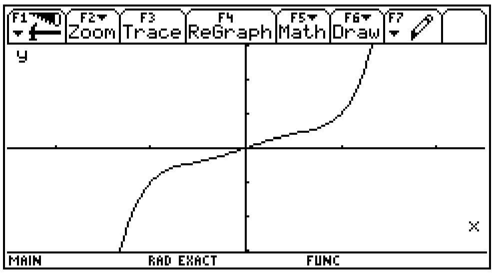
Überprüfung des Ergebnisses für a = -3 und a = -1.

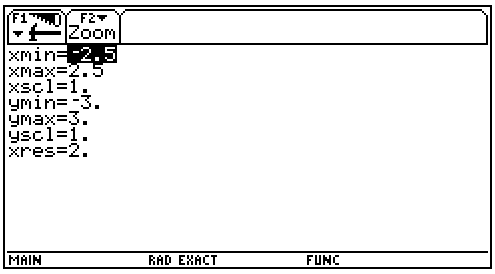
a = -3 :



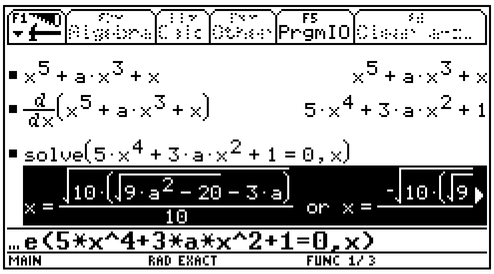


a = -1 :

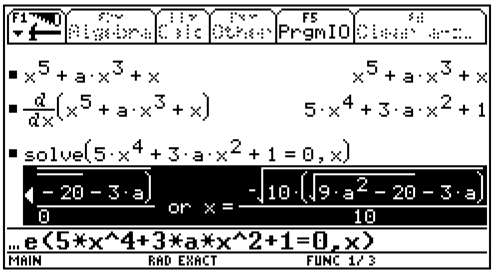




Für welche a hat die Kurve genau vier Extrema ?

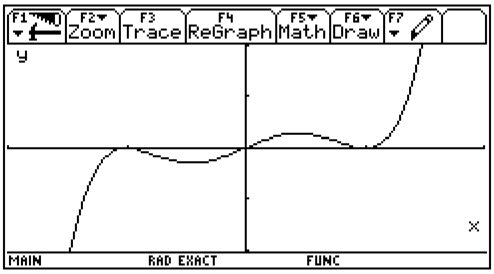


Die 1. Ableitung wird gleich 0 gesetzt. Diese Gleichung 4. Grades hat reelle Lösungen, wenn die Diskriminanten der Wurzeln nicht negativ sind.

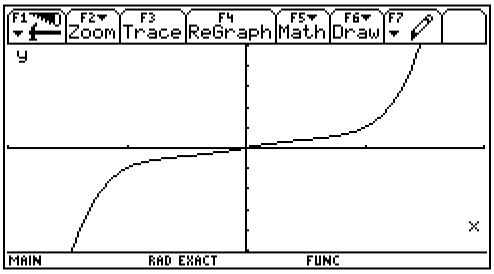


Fallunterscheidung wie oben.

Ergebnis : $a \le -\frac{2\sqrt{5}}{3} \approx -1{,}49$

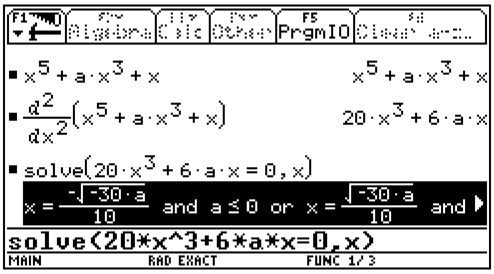


a = -2



a = -1

Für welche Werte von *a* hat die Kurve genau einen Wendepunkt ?



Die 2. Ableitung wird gleich 0 gesetzt. Die Gleichung hat für $a > 0$ keine reelle Lösung ausgenommen $x = 0$.

Für $a \ge 0$ hat die Kurve genau einen Wendepunkt.

BspNr: B0811b

Ausarbeitung (System: Derive)

#1: $f(x) := x^5 + a\cdot x^3 + x$

#2: FACTOR(f(x), x)

#3: $x\cdot(x^4 + a\cdot x^2 + 1)$

Ungerade Funktion (zentral-symmetrisch). Durch Herausheben von x erhält man die Nullstelle N1(0/0).

#4: SOLVE($x^4 + a\cdot x^2 + 1 = 0$, x)

#5: $x = -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{(a^2-4)}-a)}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{(a^2-4)}-a)}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{(a^2-4)}-a)}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{(a^2-4)}-a)}}{2}$

Überprüfen der verschiedenen Wurzelausdrücke.

#6: SOLVE($a^2 - 4 \ge 0$, a)

#7: $a \le -2 \vee a \ge 2$

#8: SOLVE($\sqrt{(a^2 - 4)} - a \ge 0$, a)

#9: $a \le -2$

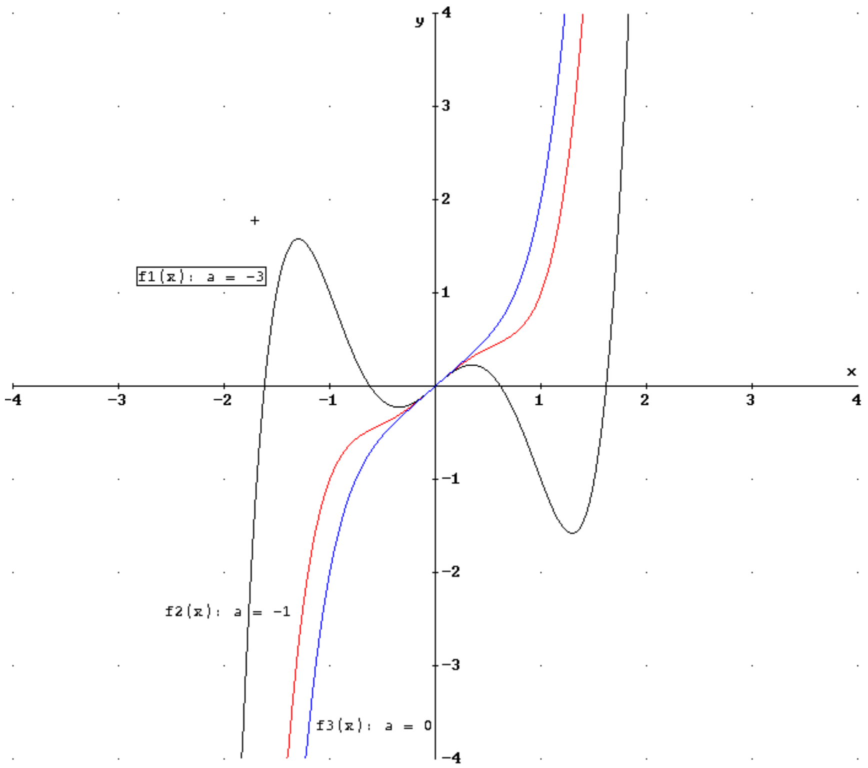
#10: SOLVE($-\sqrt{(a^2 - 4)} - a \ge 0$, a)

#11: $a \le -2$

Die Kurve hat für a<=-2 mehr als eine Nullstelle.

Überprüfung des Ergebnisses für a = -3, a = -1, a = 0

$f1(x) = x^5 - 3x^3 + x$ $f2(x) = x^5 - x^3 + x$ $f3(x) = x^5 + x$



Plot der drei Funktionen.

Für welche *a* hat die Kurve genau vier Extrema?

#15: $\frac{d}{dx} f(x)$

#16: $5 \cdot x^4 + 3 \cdot a \cdot x^2 + 1$

#17: SOLVE$(5 \cdot x^4 + 3 \cdot a \cdot x^2 + 1 = 0, x)$

#18: $x = - \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(- \sqrt{(9 \cdot a^2 - 20)} - 3 \cdot a)}}{10} \vee x = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(- \sqrt{(9 \cdot a^2 - 20)} - 3 \cdot a)}}{10} \vee$

$x = - \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(\sqrt{(9 \cdot a^2 - 20)} - 3 \cdot a)}}{10} \vee x = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(\sqrt{(9 \cdot a^2 - 20)} - 3 \cdot a)}}{10}$

Die Gleichung hat genau dann reelle Lösungen, wenn die Wurzelausdrücke positiv sind.

#19: SOLVE$(- \sqrt{(9 \cdot a^2 - 20)} - 3 \cdot a \ge 0, a)$

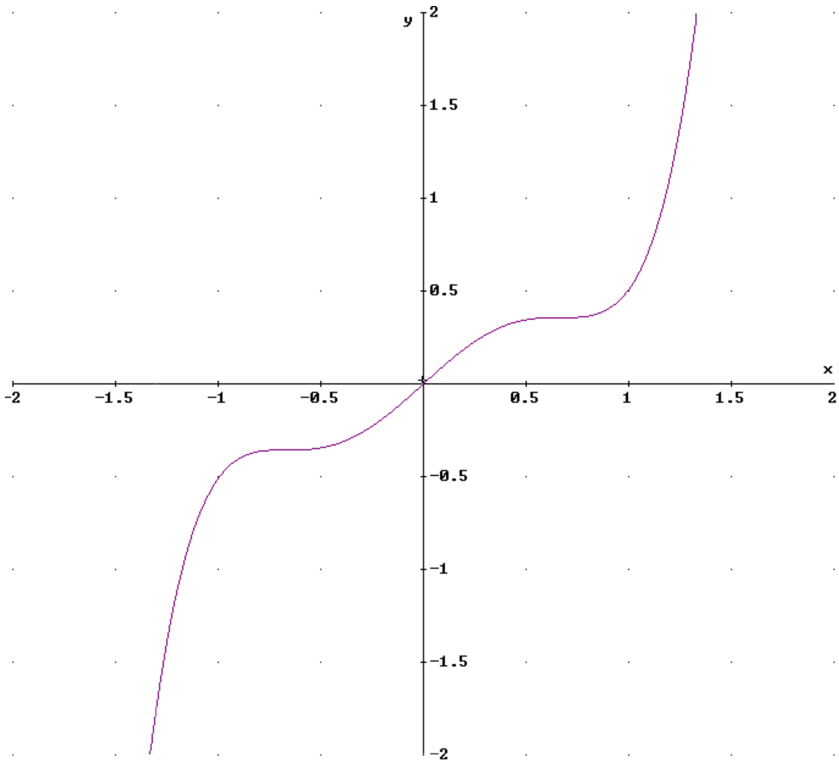
#20: $a \le - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$

#21: SOLVE$(\sqrt{(9 \cdot a^2 - 20)} - 3 \cdot a \ge 0, a)$

#22: $a \le - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3}$

#23: $a \le -1.490711984$

Für a = $-2*\sqrt{(5)}/3$ hat die Kurve 2 Extrema,
Für a ≤ $-2*\sqrt{(5)}/3$ hat die Kurve 4 Extrema.



Für welche Werte von *a* hat die Kurve genau einen Wendepunkt?

#24: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#25: $20 \cdot x^3 + 6 \cdot a \cdot x$

#26: $\text{SOLVE}(20 \cdot x^3 + 6 \cdot a \cdot x = 0, x)$

#27: $x = -\frac{\sqrt{30} \cdot \sqrt{(-a)}}{10} \vee x = \frac{\sqrt{30} \cdot \sqrt{(-a)}}{10} \vee x = 0$

Für a≥0 existiert nur die Lösung x=0 und damit ein Wendepunkt.

Beispiel für $a = 1$: $f(x) = x^5 + x^3 + x$