

<b>Themenbereich</b>	
Differentialrechnung, Kurvendiskussion	
<b>Ziele</b>	<b>vorhandene Ausarbeitungen</b>
• Klassische Kurvendiskussion	TI-92 (B0810a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	7. Klasse
<b>Quelle:</b> Dr. Thomas Himmelbauer	

## Kurvendiskussion mit Hilfe der Differentialrechnung

### Angabe:

Gegeben ist die Funktion  $y_1(x) = \frac{x^4}{40} + \frac{x^3}{20} - \frac{47x^2}{40} - \frac{6x}{5} + \frac{63}{10}$ .

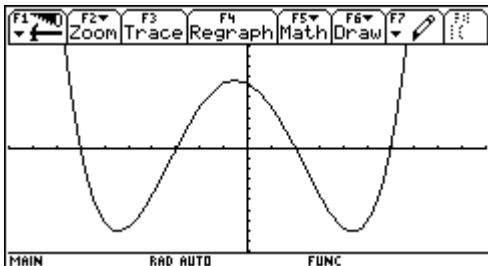
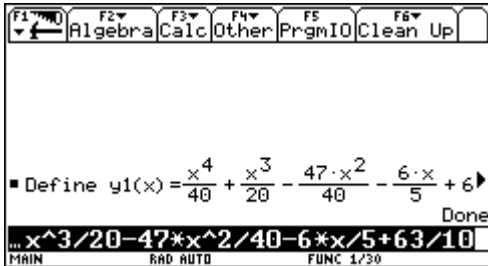
### Fragen:

Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte mit Hilfe der Differentialrechnung. Erkläre deine Vorgangsweise und erläutere die Zusammenhänge auch mit Skizzen (je eine Skizze, die die Zusammenhänge zwischen Funktion und 1. Ableitung, bzw. Funktion und 2. Ableitung erläutert).

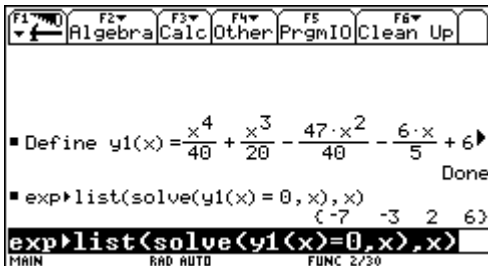
Abschließend ist eine Zeichnung des Graphen für das Intervall  $[-8; 7]$  anzulegen, in der alle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte eingezeichnet sind.

## Ausarbeitung (System: TI-92)

### Berechnung am TI-92



Berechnung der Nullstellen:

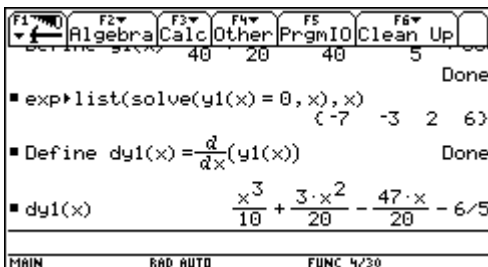


Wir erhalten vier Nullstellen.

$$N_1 = (-7|0) \quad N_2 = (-3|0) \quad N_3 = (2|0)$$

$$N_4 = (6|0)$$

Berechnung der Extremwerte:



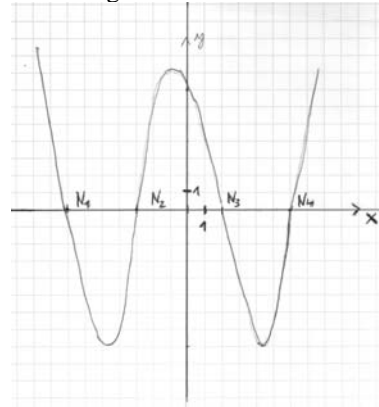
### Erklärungen und Erläuterungen

Definition der Funktion als  $y_1(x)$ , damit die Funktion zur graphischen Betrachtung auch im  $[y=]$ -Editor abgespeichert ist.

Um einen Eindruck der Funktion zu bekommen, lassen wir ihren Graphen zeichnen. So können wir den Verlauf der Funktion späterhin auch leicht skizzieren.

Die Nullstellen sind die Schnittpunkte des Graphen mit der  $x$ -Achse, also jene Punkte, für deren  $x$ -Koordinaten gilt:  $y_1(x) = 0$ .

Siehe folgende Skizze.



Die  $x$ -Werte möglicher relativer Extremwerte sind die  $x$ -Werte der Nullstellen der 1. Ableitung  $dy_1(x)$ .

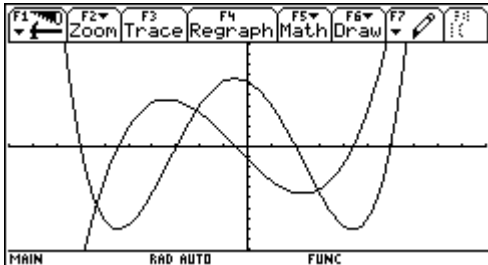
Daher berechnen wir die 1. Ableitung der Funktion.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Zoom Edit All Style
PLOTS
y1 = x^4/40 + x^3/20 - 47*x^2/40 - 6*x/5 + 63/10
y2 = dy1(x)
y3 =
y4 =
y5 =
y6 =
y7 =
y8 =
y3(x) =
MAIN EAD AUTO FUNC

```

Wir geben die 1. Ableitung in den [y=]-Editor ein.



Dann betrachten wir Funktion und 1. Ableitung gemeinsam, um die Zusammenhänge besser skizzieren zu können.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Define dy1(x) = d/dx(y1(x)) Done
dy1(x) = x^3/10 + 3*x^2/20 - 47*x/20 - 6/5
exp>list(solve(dy1(x)=0,x),x)
(-5.4244289009 -0.5 4.4244289009)
y1((-5.4244289008981 -0.5 4.4244289009)
(-8.1 6.6015625 -8.1)
008981, -0.5, 4.4244289008981)
MAIN EAD AUTO FUNC 6/30

```

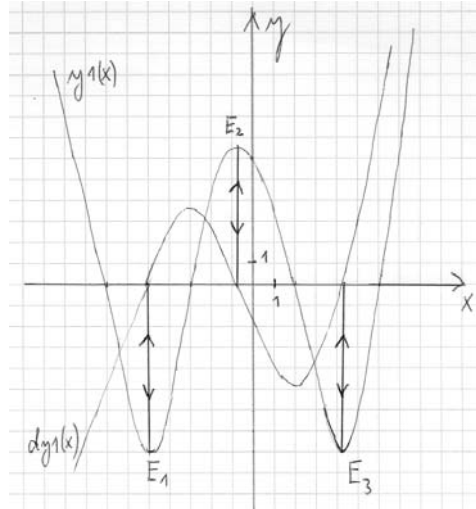
Aus der Skizze sieht man, dass die  $x$ -Werte der relativen Extremwerte mit den  $x$ -Werten der Nullstellen der 1. Ableitung zusammenhängen. Daher werden die Nullstellen der 1. Ableitung berechnet. Die  $y$ -Werte der Extremwerte erhalten wir durch Einsetzen der  $x$ -Werte in die Funktion  $y_1(x)$ .

Wir erhalten drei mögliche relative Extremwerte.

$$E_1 = (-5,42...|-8,1) \quad E_2 = (-0,5|6,6...)$$

$$E_3 = (4,42...|-8,1)$$

Skizze:

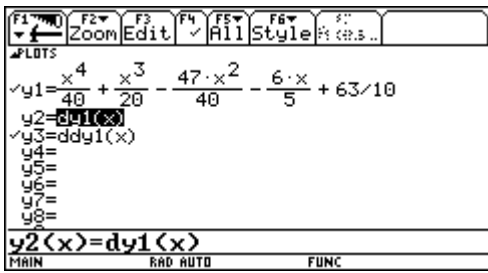


```

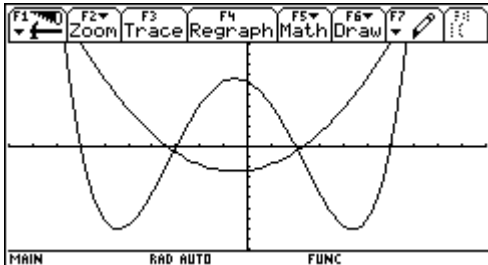
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
exp>list(solve(dy1(x)=0,x),x)
(-5.4244289009 -0.5 4.4244289009)
y1((-5.4244289008981 -0.5 4.4244289009)
(-8.1 6.6015625 -8.1)
Define ddy1(x) = d/dx(dy1(x)) Done
ddy1(x) = 3*x^2/10 + 3*x/10 - 47/20
ddy1(x)
MAIN EAD AUTO FUNC 8/30

```

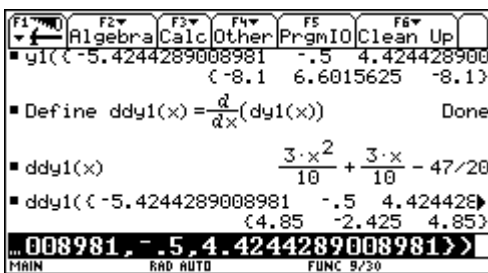
Um zwischen relativen Maxima und Minima unterscheiden zu können, berechnen wir die 2. Ableitung.



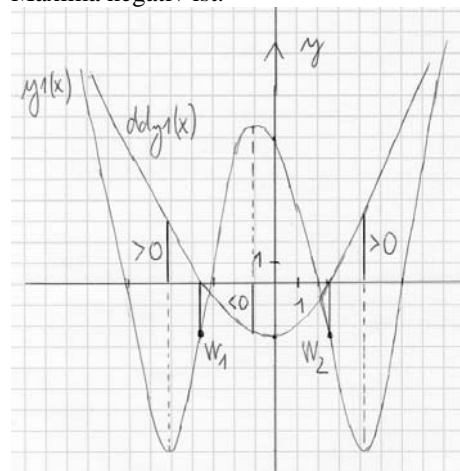
Wir geben die 2. Ableitung in den [y=]-Editor ein.



Dann betrachten wir die Funktion und die 2. Ableitung gemeinsam, um die Zusammenhänge besser skizzieren zu können.



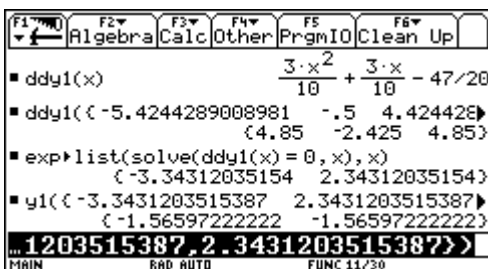
Die Skizze zeigt, dass die 2. Ableitung im Bereich der relativen Minima positiv und im Bereich der relativen Maxima negativ ist.



Daher sind  $E_1$  und  $E_3$  relative Minima und  $E_2$  ein relatives Maximum.

Daher berechnen wir die Werte der 2. Ableitung für die  $x$ -Werte der relativen Extremwerte.

Berechnung der Wendepunkte:



Wie man aus obiger Skizze ebenfalls erkennen kann, sind die  $x$ -Werte möglicher Wendepunkte die  $x$ -Werte der Nullstellen der 2. Ableitung. Daher berechnen wir die Nullstellen der 2. Ableitung, um die  $x$ -Werte der Wendepunkte zu erhalten. Die  $y$ -Werte der Wendepunkte erhalten wir durch Einsetzen der  $x$ -Werte in die Funktion  $y1(x)$ .

$$W_1 = (-3,34 \mid -1,56) \quad W_2 = (2,34 \mid -1,56)$$

Erstellen der Zeichnung:

Für eine Zeichnung des Graphen ist es nun noch notwendig, für die ganzzahligen  $x$ -Werte im verlangten Intervall die Funktionswerte zu berechnen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Mode	Del	Pol	Int Pol
TABLE SETUP					
tblStart.....		-8			
Δtbl.....		1.			
Graph <-> Table OFF→					
Independent.... AUTO→					
Enter=SAVE		ESC=CANCEL			
0.	6.3				
x = -7.					
MAIN	END AUTO	FUNC			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Mode	Del	Pol	Int Pol
x	y1				
-8.	17.5				
-7.	0.				
-6.	-7.2				
-5.	-7.7				
-4.	-4.5				
-3.	0.				
-2.	4.				
-1.	6.3				
x = -8.					
MAIN	END AUTO	FUNC			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Mode	Del	Pol	Int Pol
x	y1				
-1.	6.3				
0.	6.3				
1.	4.				
2.	0.				
3.	-4.5				
4.	-7.7				
5.	-7.2				
6.	0.				
x = -1.					
MAIN	END AUTO	FUNC			

