

Themenbereich	
Differentialrechnung, Extremwertbeispiele	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> Lösung einer Extremwertaufgabe durch numerische Lösungsverfahren Variation des Fermat-Punktes 	TI-92 (B0410a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	B0411, B0412
Lehrplanbezug (Österreich):	7. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Elektrizitätswerk – Fermatscher Punkt

Angabe:

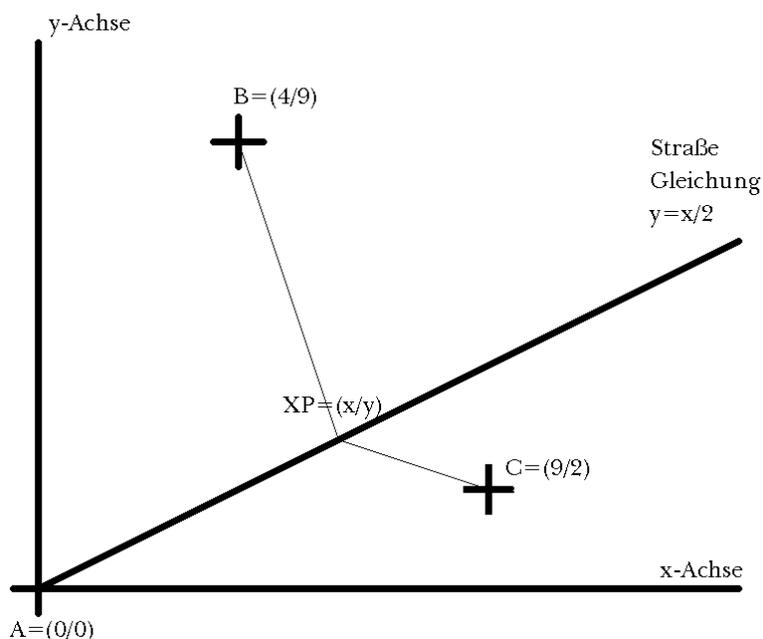
An der Straße, die von der Stadt $A = (0|0)$ etwa nach Nordosten verläuft, soll ein kalorisches Kraftwerk zur Stromerzeugung errichtet werden. Die Lage der Straße ist durch die Geradengleichung $y = \frac{1}{2} \cdot x$ bestimmt. Weiters liegen die Städte $B = (4|9)$ und $C = (9|2)$ nördlich und südlich dieser Straße. Die Größe der Einheit beträgt 10km.

Fragen:

An welcher Stelle $XP = (x|y)$ der Straße ist das Kraftwerk zu bauen, damit die Summe der Längen der elektrischen Hochspannungsleitungen nach den drei Städten möglichst gering wird.

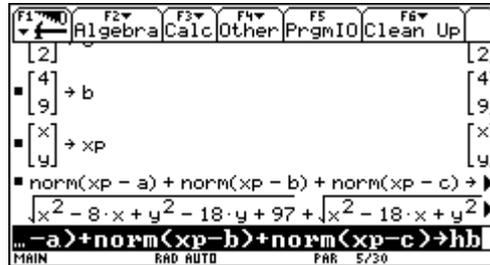
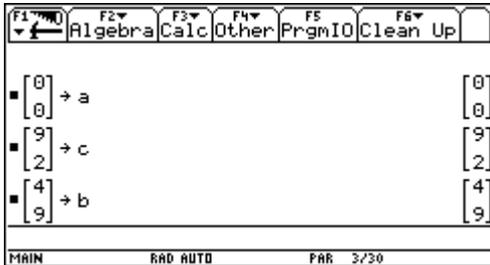
Löse die Aufgabe zunächst über den Graphikbildschirm des TI-92. Zeige danach die Fehler und Grenzen des CAS auf, die entstehen, wenn man die Aufgabe mit der Differentialrechnung lösen möchte!

Skizze:

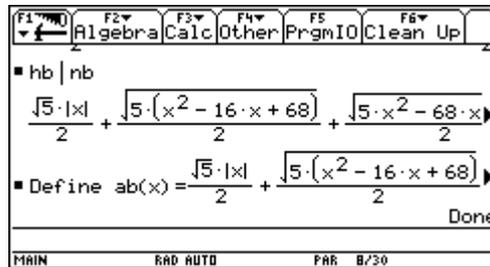
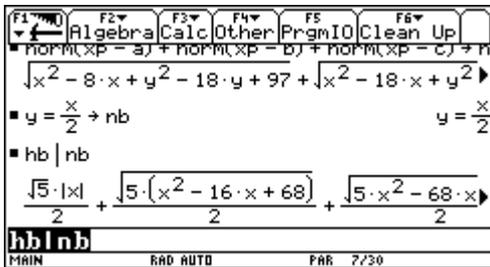


Ausarbeitung (System: TI-92)

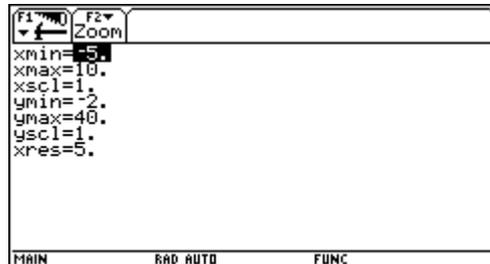
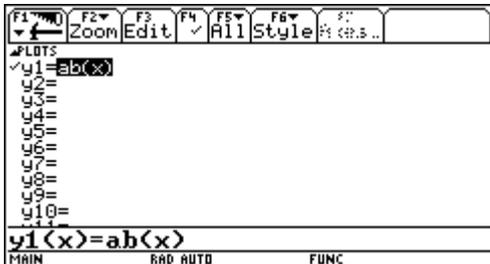
Zunächst geben wir die Koordinaten der drei Städte und des zu bauenden Kraftwerkes ein. Dann legen wir die Hauptbedingung hb , die Summe der Länge der elektrischen Leitungen fest.



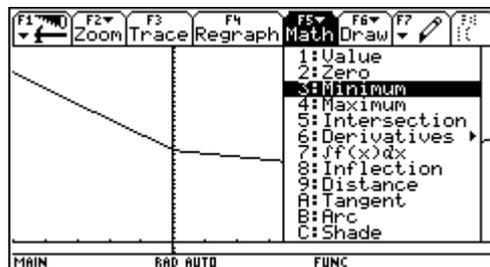
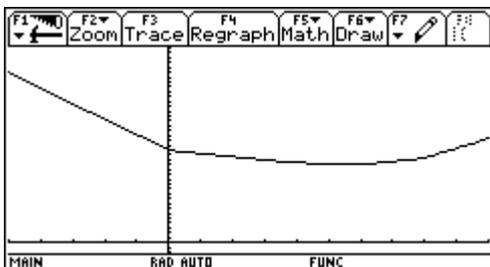
Die Nebenbedingung nb ergibt sich daraus, dass das Kraftwerk an der Straße liegt, also seine Koordinaten die Gleichung der Geraden erfüllen, die die Straße festlegt. Dann setzen wir die Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein und definieren unsere Extremalfunktion $ab(x)$.



Diese geben wir in den y -Editor ein und betrachten den Graphen bei entsprechenden Windowvariablen.

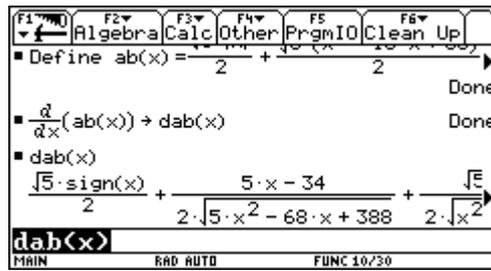
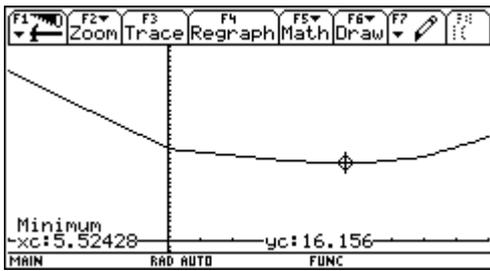


Der Graph zeigt eine nicht differenzierbare Stelle bei $x=0$. Mit Hilfe der numerischen Funktion Minimum aus dem Menü: Math bestimmen wir die günstigste Stelle für das Kraftwerk.

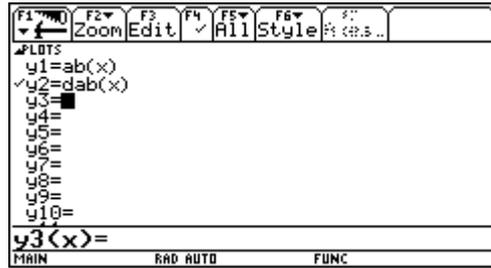
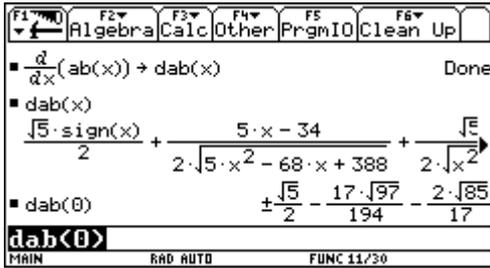


Die x -Koordinate beträgt 55,242 km und die y -Koordinate daher 27,621. Die minimale Länge der elektrischen Leitungen beträgt 161,56 km.

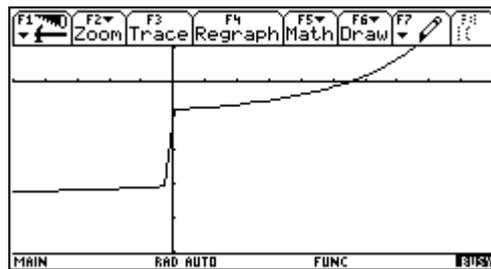
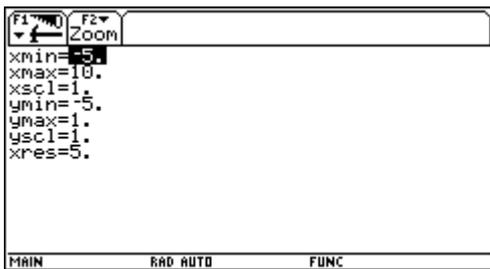
Nun wenden wir uns der Lösung mit der Differentialrechnung zu. Wir bestimmen die 1. Ableitung und stellen mit Verwunderung in ihr den Ausdruck $\text{sign}(x)$ fest.



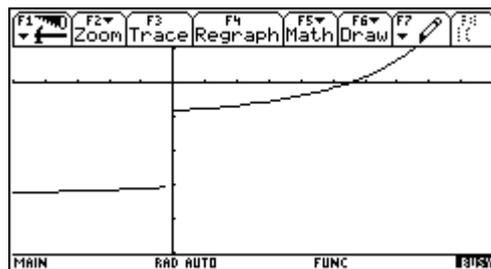
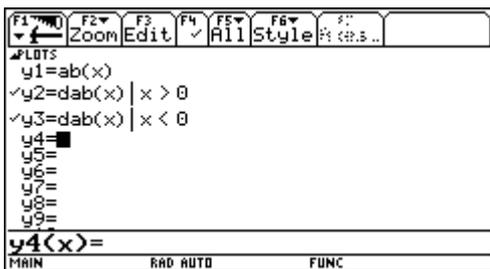
Wie wir in der Graphik schon gesehen haben, existiert die 1. Ableitung im Punkt $x = 0$ nicht. Das CAS gibt uns leider auch prompt zwei Funktionswerte für $x = 0$ an. Ein Widerspruch zur Funktionsdefinition. Diese Werte können bestenfalls als linker und rechter Grenzwert der Ableitung interpretiert werden. Wie behilft sich das CAS in der Graphik?



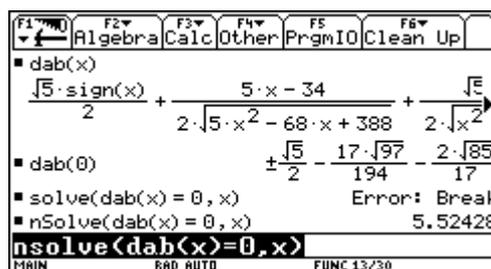
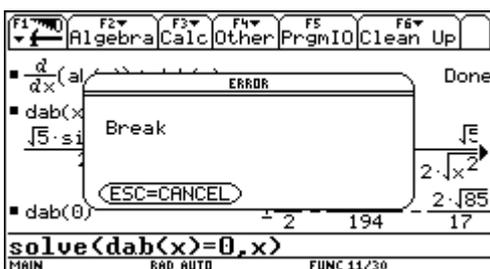
Der Graph wird unrichtig über die Unstetigkeit hinweg verbunden.



Durch Aufspalten der Funktionsdefinition kann eine richtige Darstellung erzeugt werden.



Es verwundert nicht, dass das CAS in endlicher Zeit keine exakte Lösung für die Nullstellen der 1. Ableitung findet. Über die numerische Näherung mit `nsolve` erfolgt die richtige Berechnung. Aber damit ist die Verwendung der Differentialrechnung nicht mehr gerechtfertigt. Numerisch kommen wir auch ohne Differentialrechnung zur Lösung.



Zuletzt wollen wir dem CAS helfen. Und definieren die Ableitungsfunktion nur für positive x-Werte. Dies führt zu einer richtigen Berechnung (sign(x) verschwindet). Leider ist das CAS aber nun nicht in der Lage, eine exakte Lösung zu finden. Die Gleichung ist ihm zu schwierig.

