BspNr: B0013

Themenbereich	
Quadratische Gleichung, Winkelfunktionen	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Verknüpfung von Vektorrechnung und Differentialrechung und Trigonometrie	TI-92 (B0013a), TI-92 Plus (B0013b)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	B0010, B0011, B0012
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Der Zug und der Reiter (Mit Winkelfunktionen)

Angabe:

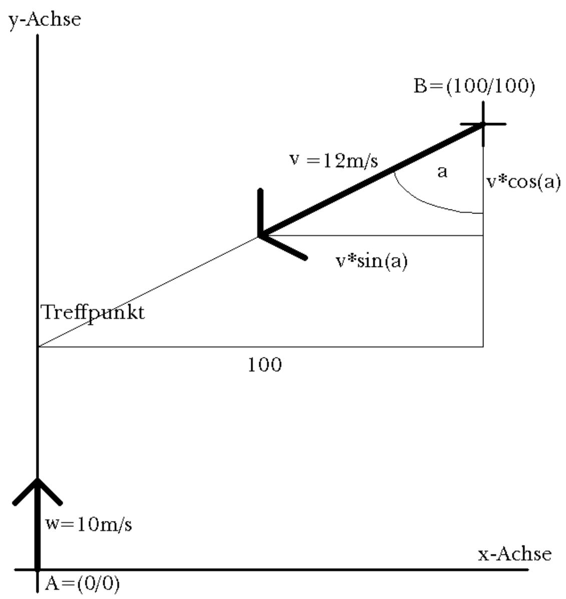
Zum Zeitpunkt t = 0 befindet sich ein Güterzug im Punkt $A = (0|0)$ und ein Reiter im Punkt $B = (100|100)$. Die Geschwindigkeit des Zuges sei w = 10 m/s und die Geschwindigkeit des Reiters sei v = 12 m/s.

Die Größe der Einheit beträgt 1m. Die Bahntrasse folgt der y-Achse.

Fragen:

1) Unter welchem Winkel a muss der Reiter geradlinige auf die Bahntrasse zureiten, um dort gleichzeitig mit dem Zug anzukommen?

2) Bestimme die kleinste Geschwindigkeit w des Reiters, bei der es möglich ist, gleichzeitig mit dem Zug die Bahntrasse zu erreichen? Unter welchem Winkel a ist dies möglich?

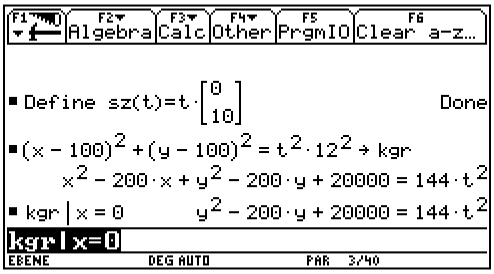


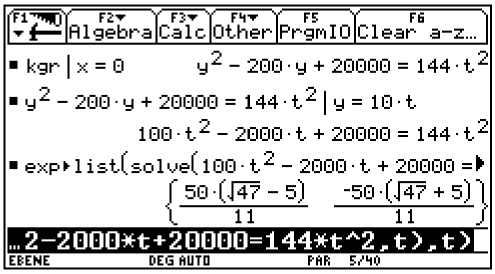
BspNr: B0013a

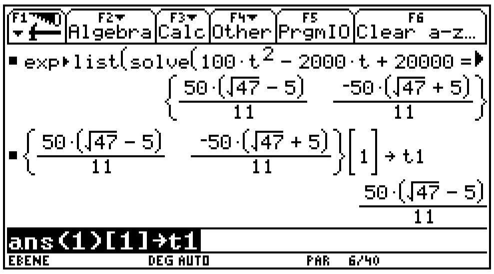
Ausarbeitung (System: TI-92)

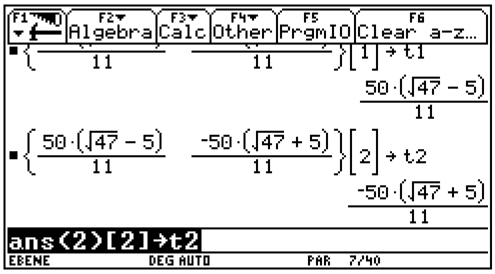
ad 1)

Zunächst wird die Bewegungsgleichnung *sz*(*t*) des Güterszuges eingegeben. Danach wird eine Kreisgleichung *kgr* mit dem Punkt *B* als Mittelpunkt und variablem Radius $r = 12 \cdot t$ eingegeben. Die Punkte dieses Kreises sind jene Punkte, die der Reiter nach der Zeit *t* erreicht haben könnte. Nun setzen wir in die Gleichung die Koordinaten ($x = 0, y = 10 \cdot t$) jenes Punkte ein, den der Güterzug nach der Zeit *t* erreicht hat. Die entstehende Gleichung ist quadratisch in *t*. Wir lösen sie nach *t* auf und erhalten zwei mögliche Zeiten *t1* und *t2*, zu denen der Reiter mit dem Zug am Bahndamm zusammentreffen könnte.





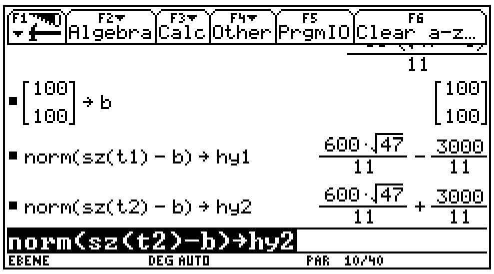


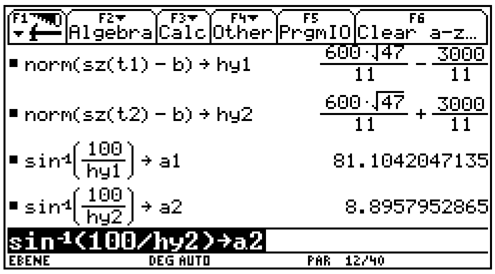


Dann wird der Punkt *B* eingegeben und der Abstand zwischen dem Treffpunkt *sz*(*t1*) bzw. *sz*(*t2*) und dem Punkt *B* bestimmt. Dieser Abstand ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit Winkel α. Die Gegenkathete zu α hat die Länge 100. Damit lässt sich aus der Definition des Sinus der gesuchte Winkel α bestimmen. Die Lösung α*2* stammt von der negativen Zeit *t2* und ist daher für unsere Lösung nicht entscheidend.

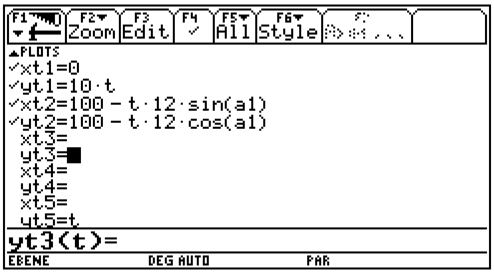
(Tatsächlich kommen durch das Vorkommen von t^2 in der Kreisgleichung auch negative Lösungen von *t* in die Rechnung hinein. Sie können folgendermaßen interpretiert werden: Der Winkel α*2* bestimmt jene Richtung, in der ein Reiter zum Zeitpunkt *t2* vom Zug aus wegreiten müsste, um zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt *B* einzutreffen).

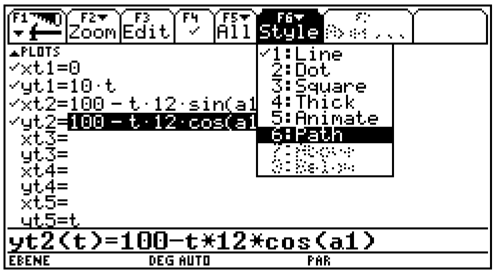
Der gesuchte Winkel beträgt also rund **81°**. Der Winkel **180° - 81°**, der den gleichen Sinuswert liefert, kommt nicht in Frage, weil der Reiter aus Symmetriegründen die gleiche Zeit benötigt, um den Bahndamm zu erreichen, der Zug aber offensichtlicht dazu länger braucht.



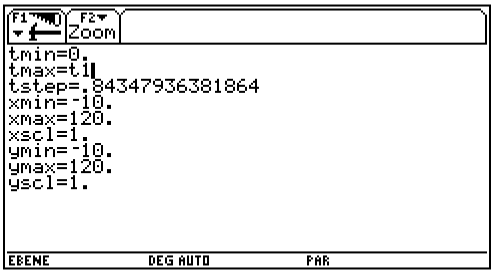


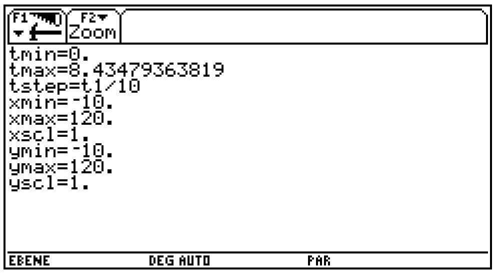
Nun wollen wir unsere beiden Bewegungen veranschaulichen. Dazu geben wir die beiden Bewegungsgleichungen in den `y=-Editor` des `Graphik-Mode PARAMETRIC` ein. Im Menü `Style` wählen wir die Option `Path`.

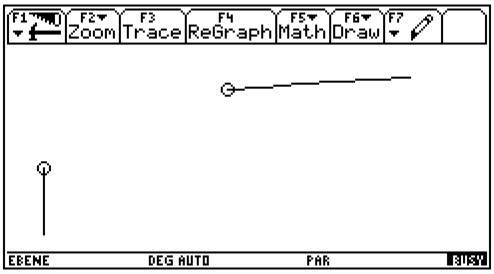


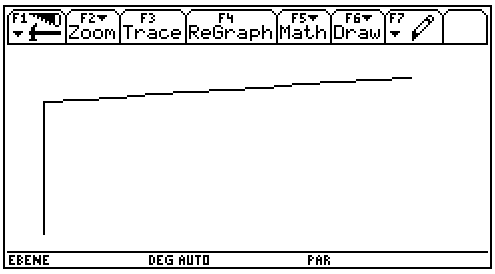


Wenn wir als `tmax` die berechnete Zeit *t1* eingeben und für `tstep` einen Bruchteil dieser Zeit wählen, können wir in der Graphik das gemeinsame Eintreffen am Bahndamm genau beobachten.





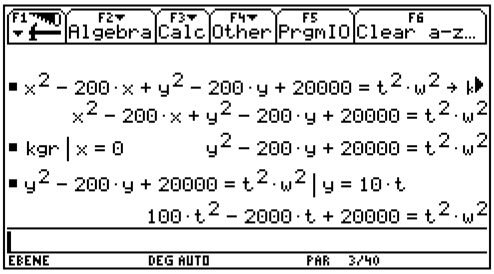


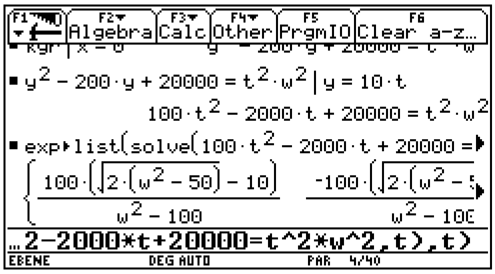


ad 2)

Zunächst wird eine Kreisgleichung *kgr* mit Punkt *B* als Mittelpunkt und variablen Radius $r = w \cdot t$ eingegeben.. Die Punkte dieses Kreises sind jene Punkte, die der Reiter nach der Zeit *t* erreicht haben könnte. Nun setzen wir in die Gleichung die Koordinaten ($x = 0,\ y = 10 \cdot t$) jenes Punktes ein, den der Gütterzug nach der Zeit *t* erreicht hat.

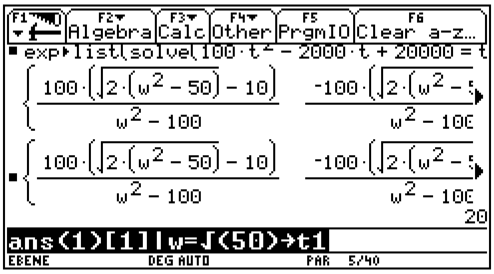
Die entstehende Gleichung ist quadratisch in *t*. Wir lösen sie nach *t* auf und erhalten zwei mögliche Zeiten *t1* und *t2*, zu denen der Reiter mit dem Zug am Bahndamm zusammentreffen könnte.

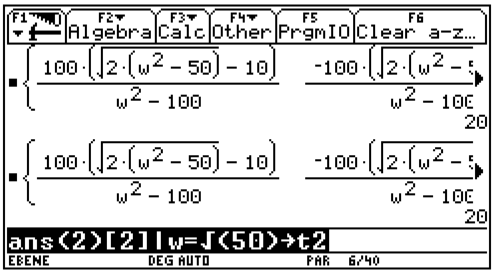




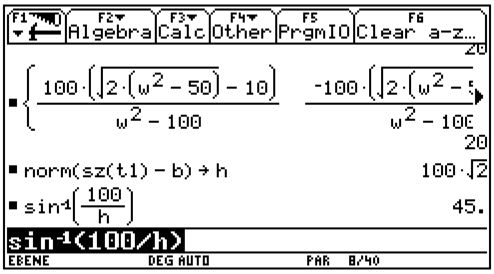
Diese Zeiten müssen aber reell sein, daher darf die Diskriminante der Wurzel höchstens Null sein. Daher darf die Geschwindigkeit *v* des Reiters den Wert $\sqrt{50}$ nicht unterschreiten.

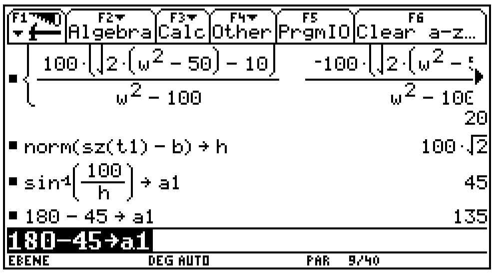
Dieser Wert ist daher die gesuchte kleinste Geschwindigkeit. Durch Einsetzen dieses Wertes für *v* in den beiden Lösungen erhalten wir zwei Zeiten ***t1* = 20** und ***t2* = 20**, die gleich sind. Es liegt eine Doppellösung vor!



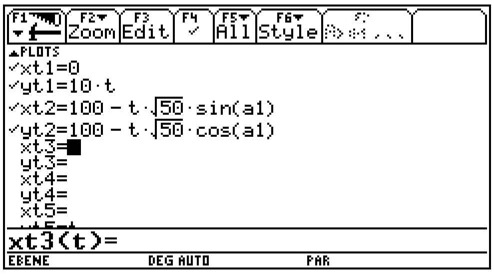


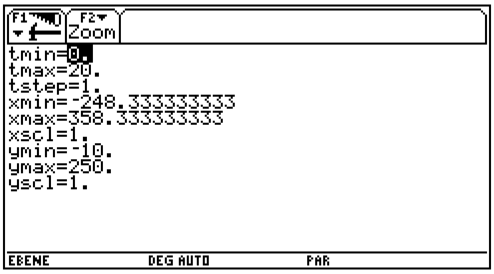
Nun kann der Abstand zwischen dem Treffpunkt *sz*(*t1*) und dem Punkt *B* bestimmt werden. Dieser Abstand ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit Winkel α. Die Gegenkathete zu α hat die Länge 100. Damit lässt sich aus der Definition des Sinus der gesuchte Winkel α bestimmen. Diesmal ist natürlich die Lösung **135°** zu wählen, da **45°** zum Punkt *A* führen würde.

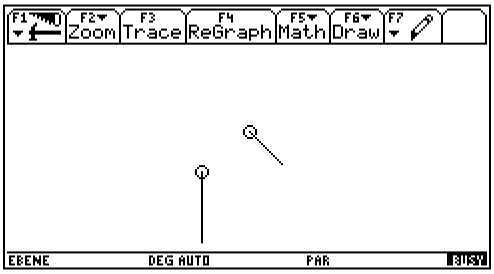
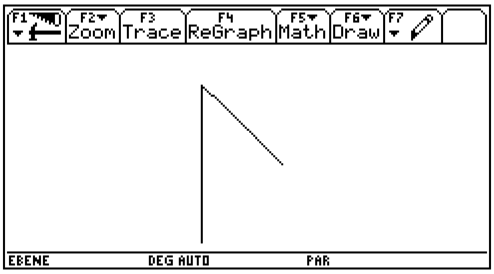




Auch diesmal sehen wir uns die Gaphik an. Um die 45° tatsächlich zu sehen wurde der Zoom-Befehl `ZoomSqr` verwendet.





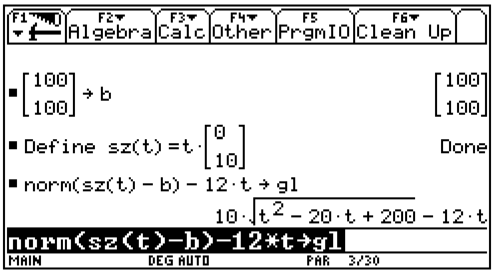
BspNr: B0013b

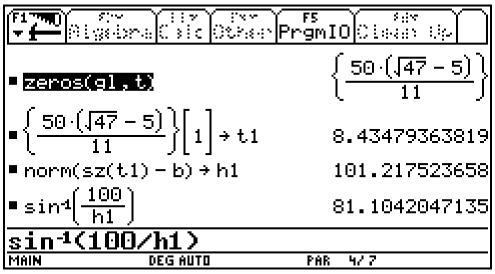
Ausarbeitung (System: TI-92+)

Mit dem TI-92 Plus stehen noch zwei weitere Varianten zur Verfügung.

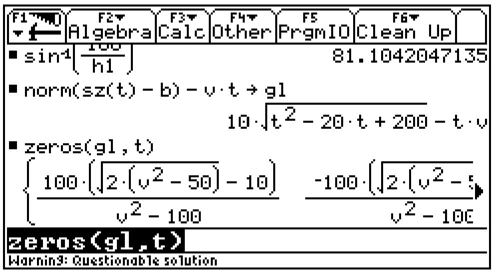
Variante 1:

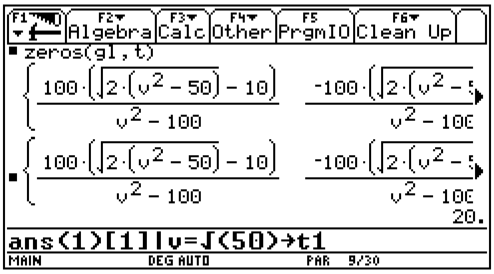
ad 1)
Zu Beginn erfolgt die Eingabe des Punktes *B* und der Bewegungsgleichung des Zuges *sz*(*t*). Danach betrachten wir den Unterschied zwischen dem Abstand des Zuges vom Punkt *B* und der vom Reiter zurückgelegten Strecke. Diese Wurzelgleichung wird nach der Zeit *t* gelöst. Hier erhalten wir im Gegensatz zur Ausrechnung mit dem TI-92 nur eine Lösung. Aber diese Wurzelgleichung wird vom TI-92 nicht gelöst. Danach wird wieder über den Sinus der gesuchte Winkel α bestimmt.

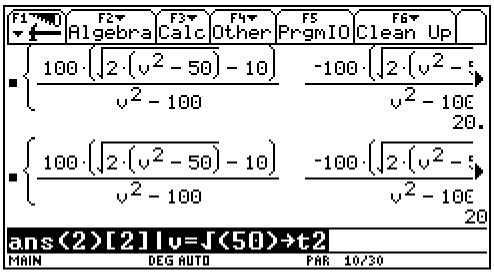


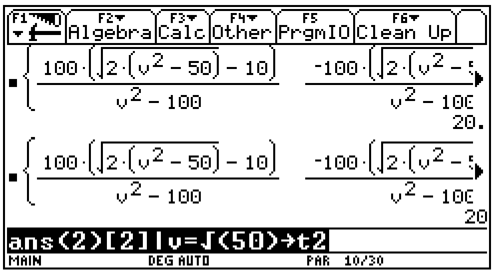


ad 2)
Setzt man die Geschwindigkeit des Reiters variabel als *v* in den Ansatz ein, so erhält man die gleichen Lösungen, wie in der Rechnung mit dem TI-92. Der Rest der Berechnung erfolgt in gleicher Weise.



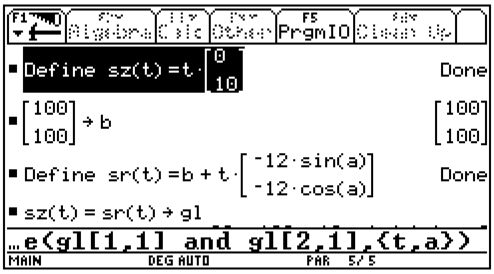


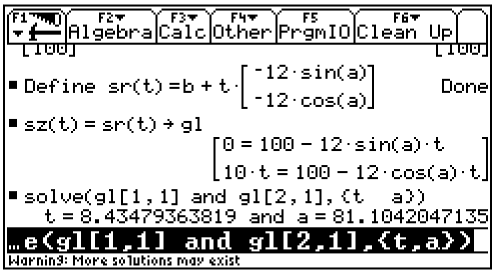




Variante 2:
Für den 1. Teil der Aufgabe gibt es auch noch eine dritte Möglichkeit des Berechnung.

ad 1)
Es werden die beiden Bewegungsgleichungen gleich gesetzt und die Gleichung der *x*-Koordinate und die Gleichung der *y*-Koordinate nach Zeit und Winkel aufgelöst. Sehr elegant gelangt man sofort zur richtigen Lösung. Man wird aber gewarnt, ob es eventuell nicht noch mehr Lösungen gibt.





ad 2)
Leider läßt sich dieses Verfahren bei der Verallgemeinerung nicht anwenden.