

Themenbereich	
Quadratische Gleichung, Kreisgleichung	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> Verknüpfung von Vektorrechnung und Differentialrechnung 	TI-92 (B0012a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	B0010, B0011, B0013
Lehrplanbezug (Österreich):	5. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

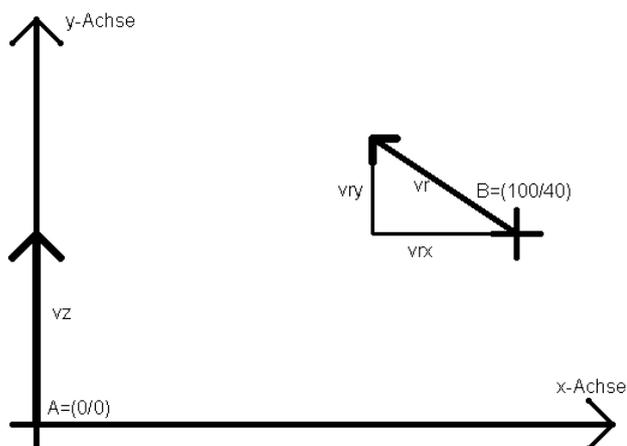
Der Zug und der Reiter (Ohne Winkelfunktionen)

Angabe:

Ein Zug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der Position $A = (0|0)$. Die Bahntrasse verläuft in Richtung der positiven y -Achse. Die Geschwindigkeit des Zuges beträgt $v_z = 10$ m/s. Im Punkt $B = (100|40)$ befindet sich ein Reiter zum Zeitpunkt $t = 0$. Seine Geschwindigkeit beträgt $v_r = 10$ m/s.

Fragen:

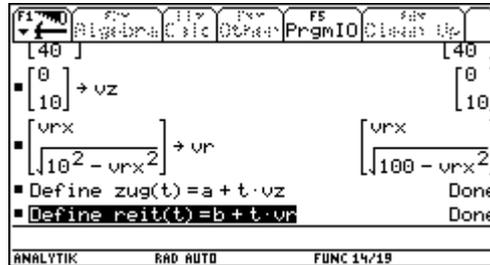
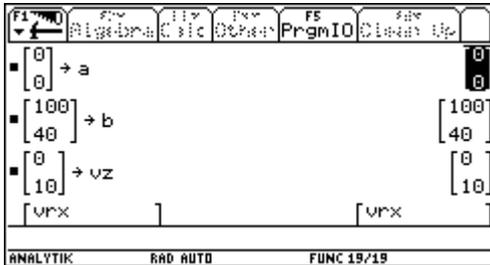
- Berechne die Richtung, die der Reiter wählen muss, wenn er zeitgleich mit dem Zug einen Punkt des Bahndammes erreichen will.
- Berechne die kleinste Geschwindigkeit, mit der der Reiter zeitgleich mit dem Zug einen Punkt des Bahndammes erreichen kann. Zeige, dass die Richtung dieser Geschwindigkeit und der Vektor \overline{BA} einen rechten Winkel bilden.



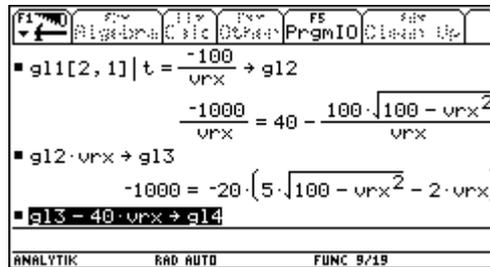
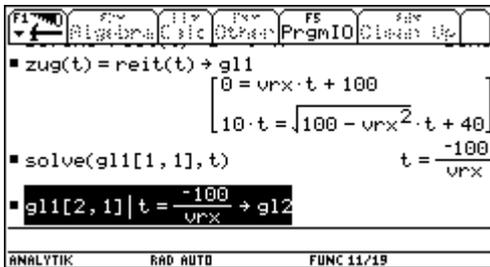
Ausarbeitung (System: TI-92)

ad 1)

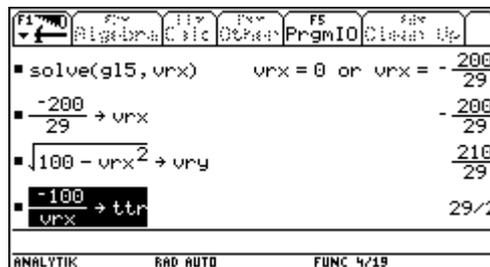
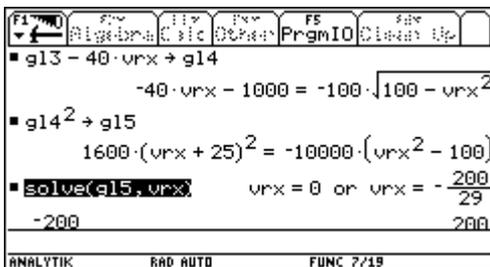
Eingabe der Anfangspunkte und der Geschwindigkeitsvektoren, hernach Aufstellen der Bewegungsgleichungen.



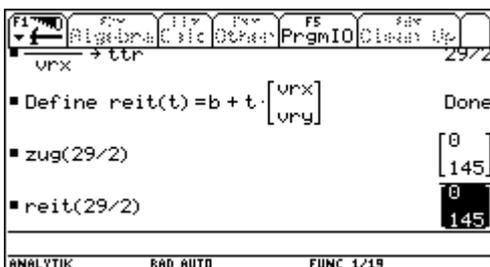
Dann werden die Bewegungsgleichungen gleichgesetzt. Aus der x -Koordinate der Gleichung wird die Zeit errechnet und in die y -Koordinate der Gleichung eingesetzt. Diese Gleichung wird mit v_{rx} multipliziert, um sie bruchfrei zu machen. Danach wird die Wurzel durch Subtraktion von $40 \cdot v_{rx}$ auf der linken Seite der Gleichung isoliert.



Dann wird die Gleichung quadriert (die Anzahl der Lösungen kann sich erhöhen, nicht alle erfüllen die ursprüngliche Gleichung). Wir lösen die Gleichung auf und wählen natürlich für v_{rx} die negative Lösung. Daraus berechnen wir v_{ry} und wählen hier natürlich die positive Lösung. Auch der Zeitpunkt des Treffens t_{tr} lässt sich nun berechnen.



Zum Schluss definieren wir die Bewegungsgleichung des Reiters neu und setzen in seine Bewegungsgleichung und zur Kontrolle auch in die Bewegungsgleichung des Zuges den Zeitpunkt des Treffens ein. Wir erhalten die Koordinaten des Treffpunktes.



ad 2)

Zunächst gehen wir gleich wie in a) vor. Nur wählen wir nun die Geschwindigkeit des Reiters als Unbekannte avr .

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
DelVar reit, vrx, vry, vr Done
vrx
sqrt(avr^2 - vrx^2) -> vr
Define reit(t)=b + t*vr Done
zug(t)=reit(t) + g11
0 = vrx*t + 100

```

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
zug(t)=reit(t) + g11
0 = vrx*t + 100
10*t = sqrt(avr^2 - vrx^2)*t + 40
solve(g11[1,1],t) t = -100/vrx
g11[2,1]|t = -100/vrx -> g12

```

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
g11[2,1]|t = -100/vrx -> g12
-1000/vrx = 40 - 100*sqrt(avr^2 - vrx^2)/vrx
g12*vrx -> g13
-1000 = -20*(5*sqrt(avr^2 - vrx^2) - 2*vrx)
g13 - 40*vrx -> g14

```

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
g13 - 40*vrx -> g14
-40*vrx - 1000 = -100*sqrt(avr^2 - vrx^2)
g14^2 + g15
1600*(vrx + 25)^2 = 10000*(avr^2 - vrx^2)
solve(g15, vrx)
vrx = -5*(sqrt(29*avr^2 - 2500) + 20) or vrx = -

```

Die quadratische Gleichung hat nur dann reelle Lösungen, wenn die Diskriminante größer gleich Null ist, also

$$29avr^2 - 2500 \geq 0. \text{ Daraus folgt } avr \geq \sqrt{\frac{2500}{29}}.$$

Damit ist die kleinst mögliche Geschwindigkeit festgelegt. Damit können nun wieder vrx (negativ) und vry (positiv) und der Zeitpunkt des Treffens ttr ermittelt werden.

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
solve(g15, vrx)
vrx = -5*(sqrt(29*avr^2 - 2500) + 20)/29 or vrx = -
sqrt(2500/29) -> avr 50*sqrt(29)/29
2500/29 -> avr 9.28476690885

```

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
-5*(sqrt(29*avr^2 - 2500) + 20)/29 -> vrx
sqrt(avr^2 - vrx^2) -> vry 8.62068965517
-100/vrx -> ttr 29.

```

Nach einer Neudefinition der Bewegungsgleichung des Reiters, kann der Treffpunkt wieder auf zwei Arten ermittelt werden. Wir berechnen die Einheitsvektoren der Geschwindigkeit und des Vektors BA und sehen, das die beiden Normalvektoren zueinander sind.

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
vrx -> ttr 29.
Define reit(t)=b + t*[vrx] Done
zug(29) [0]
reit(29) [0]
[290]

```

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
unitU([0] - b) [-2*sqrt(29)/29]
[5*sqrt(29)/29]
unitU(a - b) [-5*sqrt(29)/29]
[-2*sqrt(29)/29]
unitv(a-b)

```

```

F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
unitU([0] - b) 29
[5*sqrt(29)/29]
unitU(a - b) [-5*sqrt(29)/29]
[-2*sqrt(29)/29]
unitv(a-b)

```