BspNr: B0010

Themenbereich	
Quadratische Gleichung, Kreisgleichung	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Umsetzung praxisnaher Aufgabenstellungen • Verknüpfung von Vektorrechnung und Differentialrechung	TI-92 (B0010a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	B0011, B0012, B0013
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Zug und Motocrossfahrer

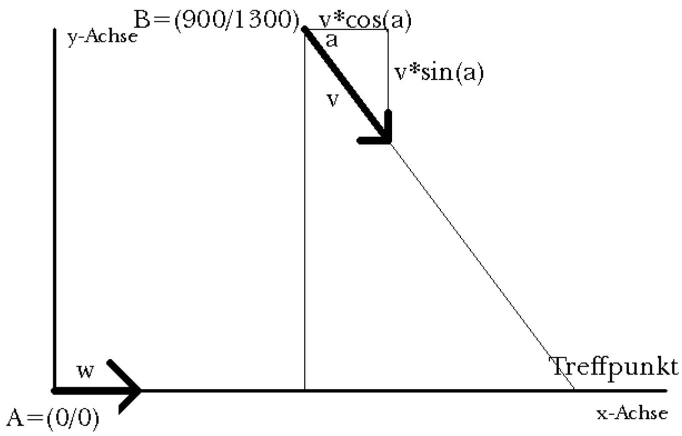
Angabe:

Zum Zeitpunkt t = 0 befindet sich ein Güterzug im Punkt $A=(0\,|\,0)$ und ein Motocrossfahrer im Punkt $B=(900\,|\,1300)$. Die Geschwindigkeit des Zuges sei w = 15 m/s und die Geschwindigkeit des Motocrossfahrers sei v = 25 m/s. Die Größe der Einheit beträgt 1 m. Die Bahntrasse folgt der x-Achse.

Fragen:

1) Unter welchem Winkel α muss der Motocrossfahrer geradlinig auf die Bahntrasse zufahren, um dort gleichzeitig mit dem Zug anzukommen?

2) Bestimme die kleinste Geschwindigkeit v des Motocrossfahrers, bei der es möglich ist, gleichzeitig mit dem Zug einen Punkt der Bahntrasse zu erreichen? Unter welchem Winkel α ist dies möglich?

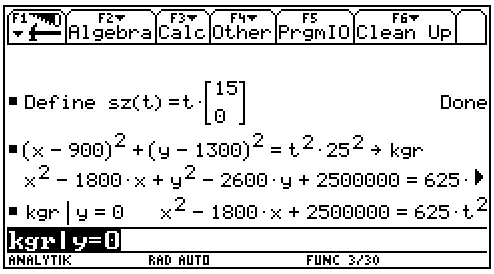


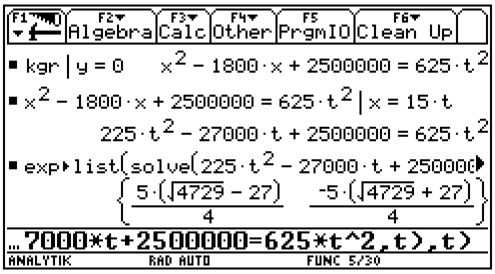
BspNr: B0010a

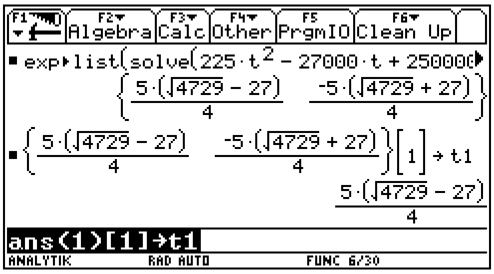
Ausarbeitung (System: TI-92)

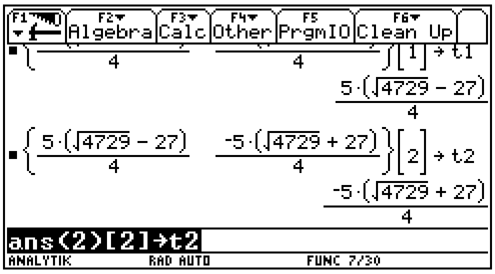
ad 1)

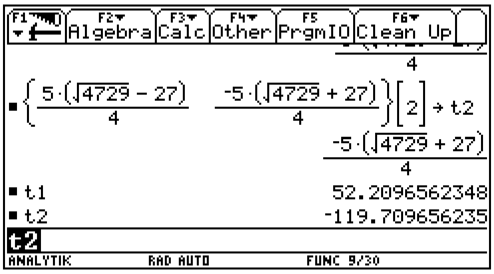
Zunächst wird die Bewegungsgleichnung $sz(t)$ des Güterszuges eingegeben. Danach wird eine Kreisgleichung *kgr* mit Punkt *B* als Mittelpunkt und variablen Radius $r = 25 \cdot t$ eingegeben. Die Punkte dieses Kreises sind jene Punkte, die der Motorcrossfahrer nach der Zeit *t* erreicht haben könnte.
Nun setzen wir in die Gleichung die Koordinaten ($x = 15\,t$, $y = 0$) jenes Punktes ein, den der Güterzug nach der Zeit *t* erreicht hat. Die entstehende Gleichung ist quadratisch in *t*. Wir lösen sie nach *t* auf und erhalten zwei mögliche Zeiten *t1* und *t2*, zu denen der Motocrossfahrer mit dem Zug am Bahndamm zusammentreffen könnte.







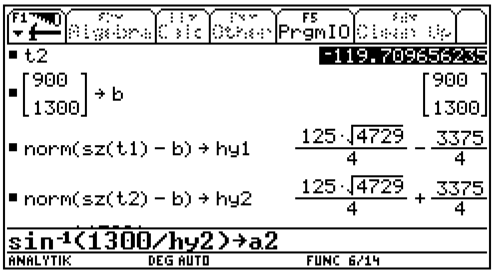


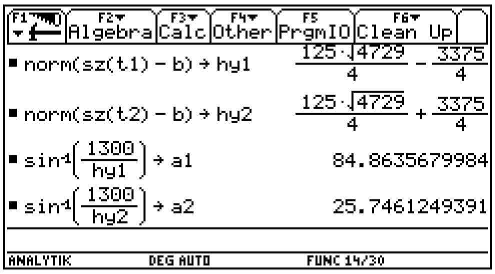


Dann wird der Punkt *B* eingegeben und der Abstand zwischen dem Treffpunkt $sz(t1)$ bzw. $sz(t2)$ und dem Punkt *B* bestimmt. Dieser Abstand ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit Winkel α. Die Gegenkathete zu *a* hat die Länge 1300. Damit lässt sich aus der Definition des Sinus der gesuchte Winkel α bestimmen. Die Lösung *a2* stammt von der negativen Zeit *t2* und ist daher für unsere Lösung nicht entscheidend.

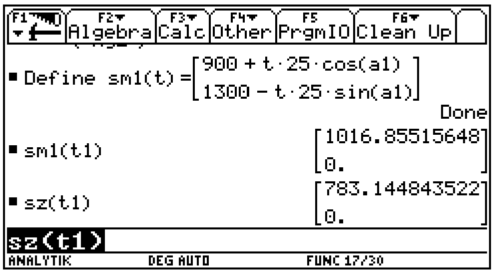
(Tatsächlich kommen durch das Vorkommen von t^2 in der Kreisgleichung auch negative Lösungen von *t* in die Rechnung hinein. Sie können folgender Maßen interpretiert werden: Der Winkel *a2* bestimmt jene Richtung, in der ein Motocrossfahrer zum Zeitpunkt *t2* vom Zug aus wegfahren müsste, um zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt *B* einzutreffen).

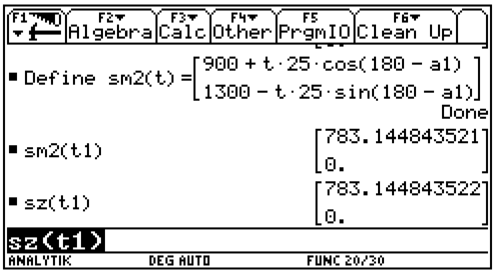
Der gesuchte Winkel beträgt also rund 85° oder rund 180° - 85° = 95°, da auch der zweite Winkel den gleichen Sinuswert liefert.



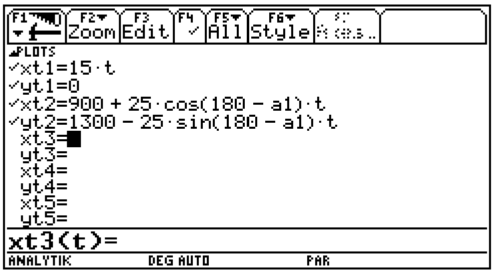


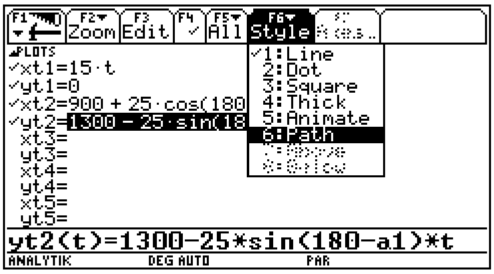
Daher definieren wir einmal die Bewegungsgleichung des Motocrossfahrers für den Winkel *a1* und einmal für den Winkel 180°- *a1*. Nur für den Winkel 180°- *a1* treffen Zug und Motocrossfahrer zum Zeitpunkt *t1* an der gleichen Stelle der y-Achs ein. Daher beträgt der gesuchte Winkel: 95,1364°.



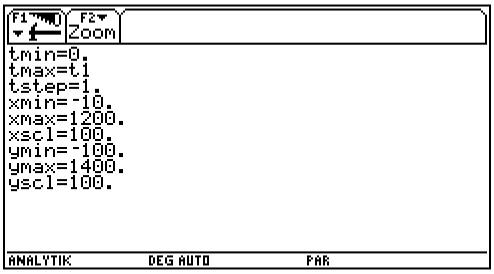


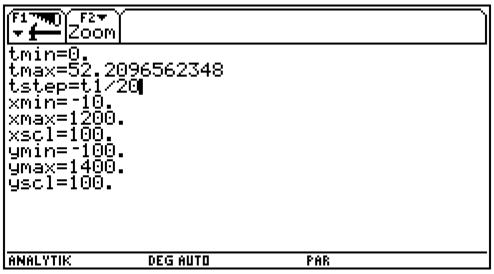
Nun wollen wir unsere beiden Bewegungen veranschaulichen. Dazu geben wir die beiden Bewegungsgleichungen in den `y= Editor` (`Graphik-Mode PARAMETRIC`) ein.
Im Menü `STYLE` wählen wir die Option `PATH`.

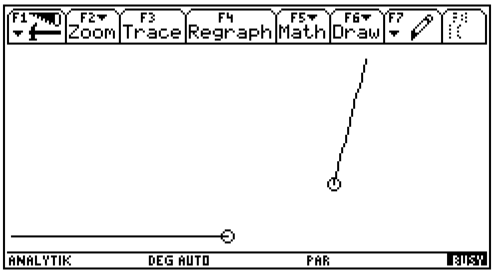


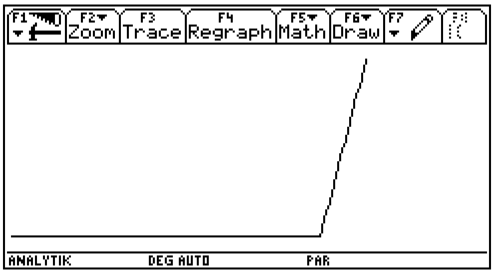


Wenn wir als *tmax* die berechnete Zeit *t1* eingeben und für *tstep* einen Bruchteil dieser Zeit wählen, können wir in der Graphik das gemeinsame Eintreffen am Bahndamm genau beobachten.



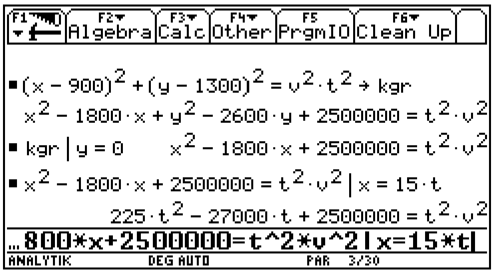


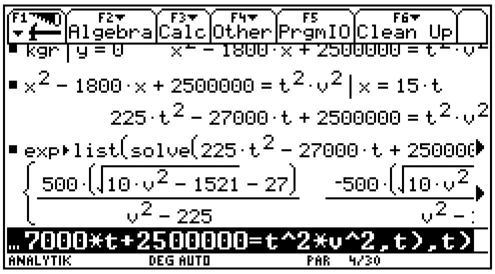




ad 2)

Zunächst wird eine Kreisgleichung *kgr* mit Punkt *B* als Mittelpunkt und variablen Radius $r = v \cdot t$ eingegeben. Die Punkte dieses Kreises sind jene Punkte, die der Motorcrossfahrer nach der Zeit *t* erreicht haben könnte. Nun setzen wir in die Gleichung die Koordinaten ($x = 15\ t$, $y = 0$) jenes Punktes ein, den der Güterzug nach der Zeit *t* erreicht hat. Die entstehende Gleichung ist quadratisch in *t*. Wir lösen sie nach *t* auf und erhalten zwei mögliche Zeiten *t1* und *t2*, zu denen der Motorcrossfahrer mit dem Zug am Bahndamm zusammentreffen könnte.

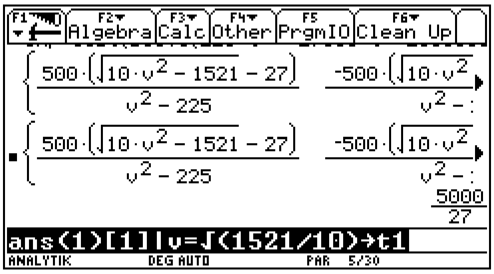


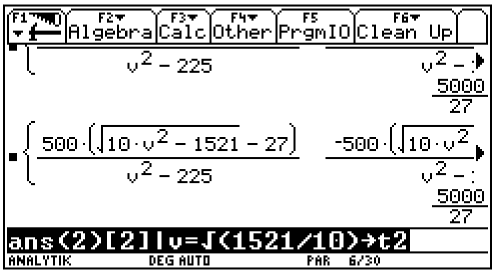


Diese Zeiten müssen aber reell sein, daher darf die Diskriminante der Wurzel höchstens Null sein. Daher darf die Geschwindigkeit *v* des Motocrossfahrers den Wert

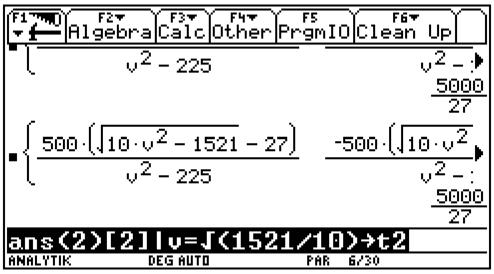
$$\sqrt{\frac{1521}{10}} \approx 12{,}33\ m/s$$

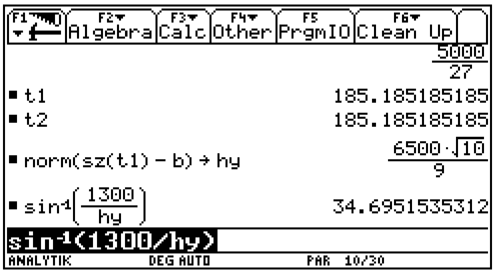
nicht unterschreiten. Dieser Wert ist daher die gesuchte kleinste Geschwindigkeit. Durch Einsetzen dieses Wertes für *v* in den beiden Lösungen erhalten wir zwei Zeiten *t1* = 5000/27 und *t2* = 5000/27, die gleich sind. Es liegt also eine Doppellösung vor.



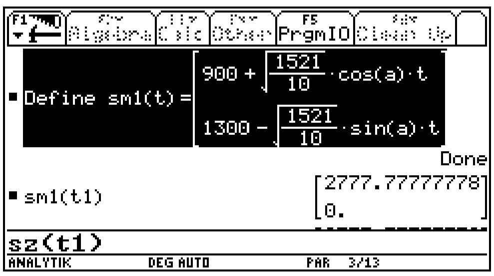


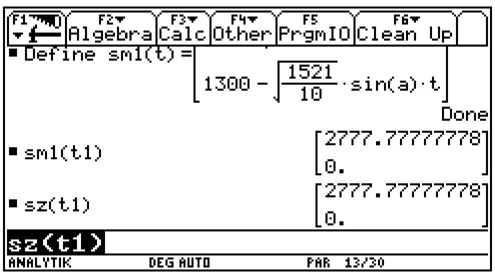
Nun kann der Abstand zwischen dem Treffpunkt *sz*(*t1*) und dem Punkt *B* bestimmt werden. Dieser Abstand ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks mit Winkel α. Die Gegenkathete zu *a* hat die Länge 1300. Damit lässt sich aus der Definition des Sinus der gesuchte Winkel α bestimmen. Wieder gibt es zwei Möglichkeiten rund 34,6° oder rund 180°- 34,6°.

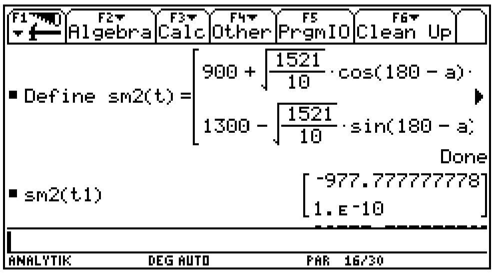


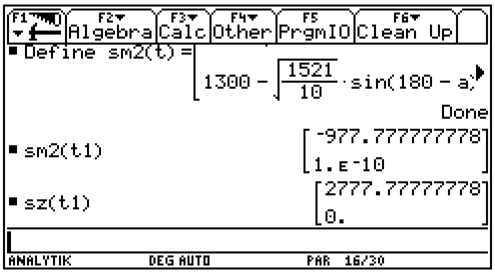


Von der Anschauung her ist es naheliegend, dass man eher mit dem Zug mitfahren als ihm entgegenfahren soll, wenn man eine kleine Geschwindigkeit besitzt. Trotzdem setzen wir die zwei möglichen Bewegungsgleichungen für den Motocrossfahrer ein. Nur der Winkel α = 34,69° führt zur richtigen Lösung.









Auch diesmal sehen wir uns die Bewegungen in der Graphik an.