BspNr: A0512

Themenbereich	
Ellipse in Parameterdarstellung	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Mehrere Lösungsansätze und Darstellungsmöglichkeiten kennen und anwenden können • Vorteile der Parameterdarstellung für bestimmte physikalische und geometrische Probleme erkennen • Optimierungsaufgabe in Parameterdarstellung lösen können • Beweisen von bekannten Beziehungen	TI-92 (A0512a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	7. Klasse
Quelle: Franz Hauser	

Ellipse

Angabe:
Eine Ellipse hat die Parameterdarstellung $x(t) = 5 \cdot \cos t$, $y(t) = 3 \cdot \sin t$.

Fragen:

a) Zeichne die Ellipse mit Hilfe des TI-92 und übertrage die Zeichnung in dein Heft.

b) Ein Punkt *P* bewegt sich nach obiger Weg-Zeitgleichung auf der Ellipse, wobei *t* die Zeit ist. Wann ist seine Geschwindigkeit maximal? Wann ist sie minimal?

c) Es sei *P* der Ellipsenpunkt für $t_1 = \pi/4$.
Bestimme eine Gleichung der Tangente im Punkt und berechne die Schnittpunkte der Tangente mit den Achsen.

d) Die Brennpunkte der Ellipse sind $F_1(4 / 0)$ und $F_2(-4 / 0)$. Berechne den Winkel α, den die Vektoren $\overrightarrow{PF_1}$ und $\overrightarrow{PF_2}$ bilden
(P ist wie oben der Ellipsenpunkt für $t_1 = \pi/4$)
Bestimme die Gleichung der Winkelhalbierenden von α. Zeige, dass diese Winkelhalbierende auf der Tangente in *P* senkrecht steht.

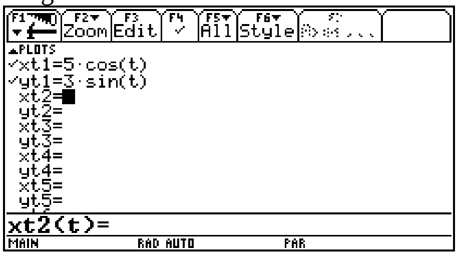
e) Zeige in der Parameterdarstellung, dass für jeden Ellipsenpunkt *E* die Summe der Abstände von den Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist.

BspNr: A0512a

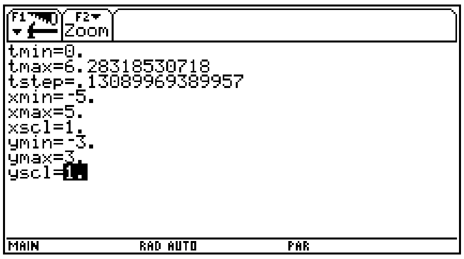
Ausarbeitung (System: TI-92)

ad a)

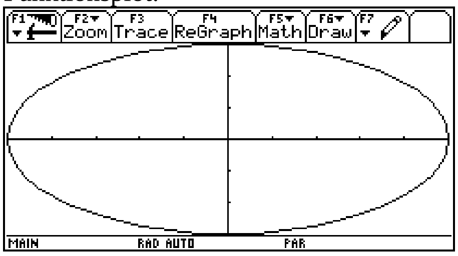
Eingabe im Y=-Editor



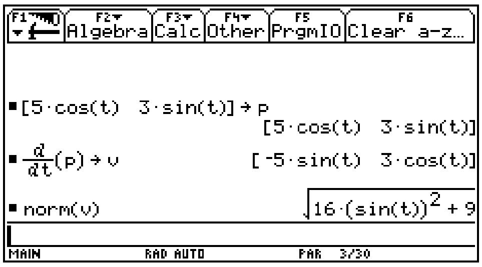
WINDOWS-Koordinaten wählen



Funktionsplot:



ad b)



Die Koordinaten eines beliebigen Punktes (5· cos t / 3· sin t) werden in P gespeichert. Der Tangentialvektor in P ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5\cdot\sin t \\ 3\cdot\cos t \end{pmatrix}$, die Geschwindigkeit

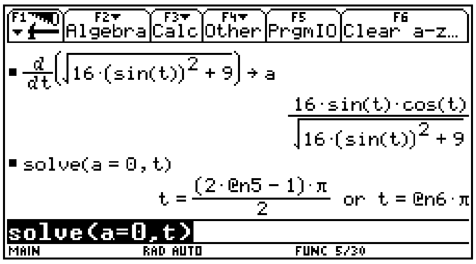
$$|\vec{v}| = \sqrt{25\cdot(\sin t)^2 + 9\cdot(\cos t)^2} = \sqrt{16\cdot(\sin t)^2 + 9}\,.$$

Berechnen der maximalen bzw. minimalen Geschwindigkeit:

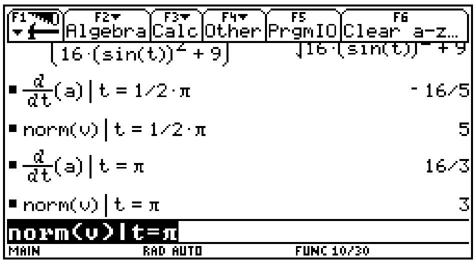
(1) ohne Differentialrechnung:

Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt P (5· cos t / 3· sin t) ist $\sqrt{16\cdot(\sin t)^2 + 9}$. Dieser Term nimmt den größten Wert an für $(\sin t)^2 = 1$, den kleinsten Wert für $(\sin t)^2 = 0$.
Daraus folgt: die minimale Geschwindigkeit beträgt 3 für $t = n\cdot\pi$, die maximale Geschwindigkeit 5 für $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, ...$

(2) mit Differentialrechnung:

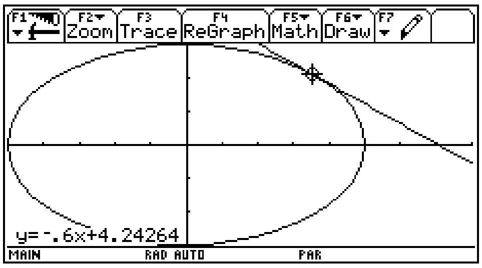


Die Geschwindigkeit ist minimal bzw. maximal, wenn ihre Ableitung Null ist. Dies ist der Fall für $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, ...$ oder $t = 0, \pi, 2\pi, ...$



Überprüfen des Maximums bzw. Minimums mit der 2. Ableitung und Berechnung der maximalen bzw. minimalen Geschwindigkeit.

c)

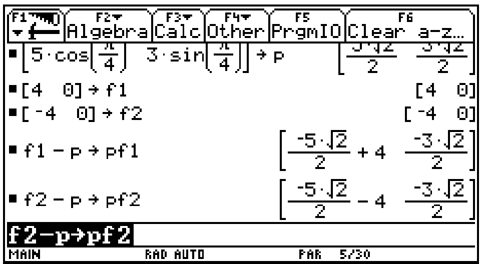


Die Gleichung der Tangente im Punkt P mit $t = \pi/4$ kann im `GRAPH-Fenster` abgelesen werden:

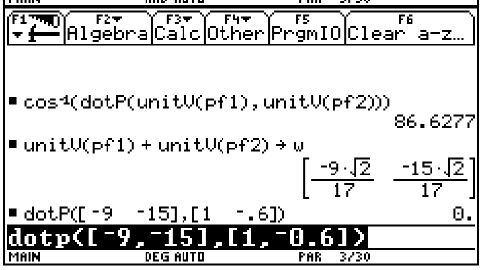
$$t_p : y = -0{,}6x + 4{,}24264$$

Daraus errechnet sich die Nullstelle der Tangente bei $x = 7{,}071$.

ad d)



Die Koordinaten der Punkte P, F_1 und F_2 werden eingegeben und gespeichert, ebenso die Vektoren $\overrightarrow{PF_1}$ und $\overrightarrow{PF_2}$.



Aus der Vektor-Winkel-Formel errechnet man den Winkel α, den die Vektoren $\overrightarrow{PF_1}$ und $\overrightarrow{PF_2}$ bilden: $\alpha \approx 86{,}63°$.
Einen Vektor $\vec{w}$ in Richtung der Winkelsymmetralen erhält man durch Vektoraddition der Einheitsvektoren von $\overrightarrow{PF_1}$ und $\overrightarrow{PF_2}$.
Mit Hilfe des Orthogonalitätskriteriums wird gezeigt, dass $\vec{w}$ auf den Richtungsvektor der Tangente normal steht.

ad e)

Es ist $\overrightarrow{PF_1} = \begin{pmatrix} 4 - 5\cdot\cos t \\ -3\cdot\sin t \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PF_2} = \begin{pmatrix} -4 - 5\cdot\cos t \\ -3\cdot\sin t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{PF_1}\right| + \left|\overrightarrow{PF_2}\right| &= \sqrt{(4-5.\cos t)^2 + (-3.\sin t)^2} + \sqrt{(-4-5.\cos t)^2 + (-3.\sin t)^2} = \\ &= \sqrt{16 - 40.\cos t + 25.\cos^2 t + 9.\sin^2 t} + \sqrt{16 + 40.\cos t + 25.\cos^2 t + 9.\sin^2 t} = \\ &= \sqrt{16 - 40.\cos t + 16.\cos^2 t + 9} + \sqrt{16 + 40.\cos t + 16.\cos^2 t + 9} = \\ &= \sqrt{25 - 40.\cos t + 16.\cos^2 t} + \sqrt{25 + 40.\cos t + 16.\cos^2 t} = \\ &= \sqrt{(5 - 4.\cos t)^2} + \sqrt{(5 + 4.\cos t)^2} = (5 - 4.\cos t) + (5 + 4.\cos t) = 10 = 2a \end{aligned}$$