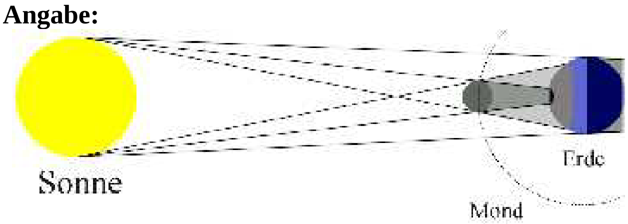
BspNr: A0511

Themenbereich	
Kreisgleichung, Trigonometrische Funktionen	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Fächerübergreifender Unterricht – Verbindung mit Physik • Modellbildung	TI-92 und Cabri (A0511a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	6. bis 8. Klasse
Quelle: Franz Hauser (nach einer Idee aus dem Internet: http://www.learn-line.nrw.de/angebote/m-aufgaben/ info/anwendungsaufgaben/sofi.html)	

Sonnenfinsternis

Angabe:



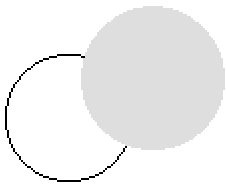
Die Sonne ist etwa 400mal größer, aber auch 400mal weiter entfernt als der Mond. Daher erscheinen Sonne und Mond für uns am Himmel in etwa gleicher Größe.
In bestimmten seltenen Konstellationen kann der Erdmond die Sonnenscheibe am Himmel teilweise oder ganz verdecken.

Fragen:

a) Wieviel Prozent der Sonnenfläche ist verdeckt, wenn der Mondrand gerade zur Hälfte über die Sonne gewandert ist (gleiche Radien)?
Löse durch elementargeometrische Überlegungen.
Dynamische Geometrie (mit Hilfe der Bemaßung)

b) In welcher Konstellation sind genau 50% der Sonne bedeckt (gleiche Radien)?
Zeichne den Graphen einer Funktion, aus dem der Prozentsatz der Bedeckung in Abhängigkeit des Abstands der beiden Mittelpunkte abgelesen werden kann.

c) Im Verlauf eines Jahres ändert sich die Distanz zwischen Erde und Sonne ein wenig und entsprechend auch die scheinbare Größe der Sonne; gleiches gilt auch für den Mond. Wir nehmen daher verschieden große Radien an.

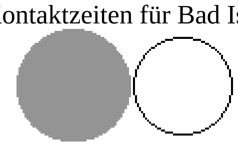


(1) Wieviel Prozent der Sonnenscheibe sind bei der folgenden partiellen Sonnenfinsternis bedeckt?
- Abstand der Mittelpunkte: d = 4,1cm
- Durchmesser der Mondscheibe: $2R$ = 6,1 cm
- Durchmesser der Sonnenscheibe: $2r$ = 5,5 cm

Bestimme auf 3 verschiedene Arten
- Mit Hilfe zweier Kreisscheiben – ausschneiden
- Dynamische Geometrie (mit Hilfe der Bemaßung)
- Rechnerisch

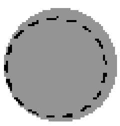
(2) Wieviel Prozent der Sonnenfläche ist verdeckt, wenn der Mondrand gerade zur Hälfte über die Sonne gewandert ist?
- Rechne mit obigen Werten für Mond- und Sonnenradius.
- Berechne allgemein für Mondradius R, Sonnenradius r.

(3) Kontaktzeiten für Bad Ischl am 11. August 1999

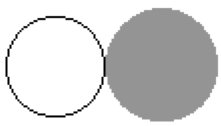


1. Kontakt
11:19:23

2. Kontakt
12:40:57



3. Kontakt
12:43:07



4.Kontakt
14:05:15

Zu welchem Zeitpunkt zwischen 1. und 2. Kontakt sind genau 50% der Sonne bedeckt?
Versuche mit obigen Werten annähernd eine Lösung zu finden.

BspNr: A0511a

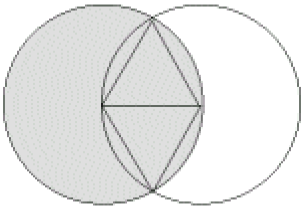
Ausarbeitung (System: TI-92)

Überlegung zur Problemstellung

Für unsere Berechnungen machen wir folgende Vereinfachungen. Die Sonne bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf geradliniger Bahn hinter dem ruhenden Mond vorbei, wobei auch Mond- und Sonnenmittelpunkt kurzzeitig zusammenfallen.

ad a)

Elementargeometrische Überlegungen



$$A_{Dreieck} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \qquad A_{Kreissektor} = \frac{1}{6}\pi r^2$$

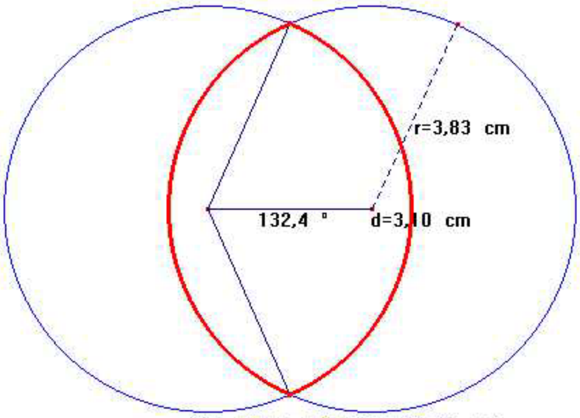
$$A_{Kreisabschnitt} = A_{Kreissektor} - A_{Dreieck} = \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2$$

$$A_{bedeckt} = 2\,A_{Dreieck} + 4\,A_{Kreisabschnitt} = \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2$$

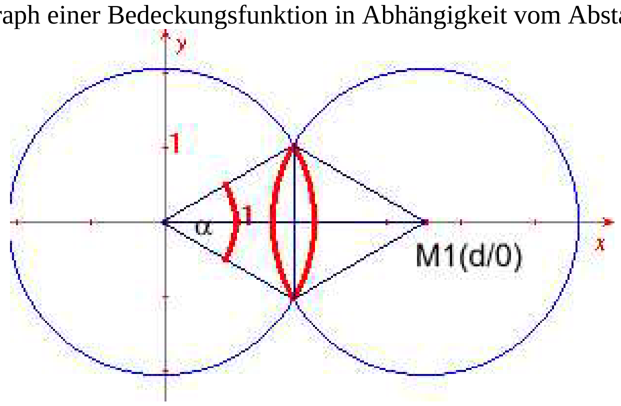
$$p = A_{bedeckt} / A_{Kreis} \approx 0{,}391 = 39{,}1\%$$

Lösung mit dynamischer Geometrie

ad b) Konstellation zur 50%-igen Bedeckung (Dynamische Geometrie)



Graph einer Bedeckungsfunktion in Abhängigkeit vom Abstand der beiden Mittelpunkte(TI-92)



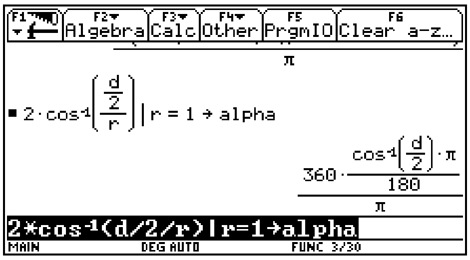
Die Kreise mit den Gleichungen

k_{Mond}: $x^2 + y^2 = r^2$ und

k_{Sonne}: $(x-d)^2 + y^2 = r^2$

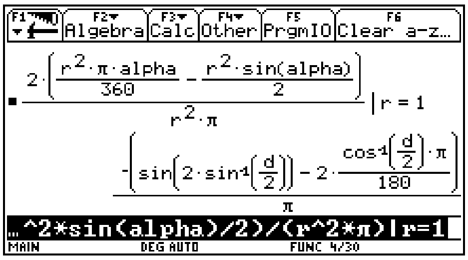
haben die Schnittpunkte an der Stelle $x = d/2$.

Weiters gilt $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{r}$.



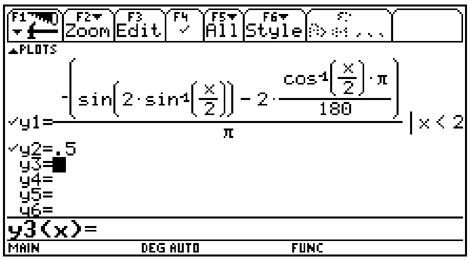
Daraus folgt $\alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\frac{d}{2}}{r}\right)$

und $A_{Kreissegment} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2}$



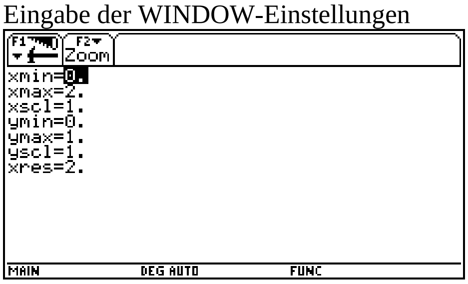
Der Prozentsatz der bedeckten Sonnenfläche ist

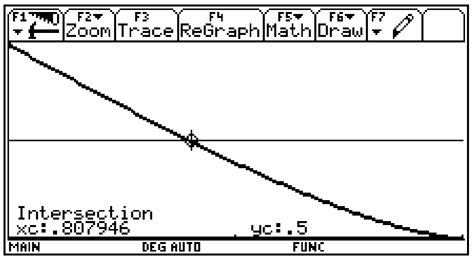
$$\frac{2 \cdot \left(\frac{r^2 \pi \alpha}{360} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2}\right)}{r^2 \pi}$$



Obiger Term wird in den `[y=]-Editor` kopiert und der Abstand *d* durch die Variable *x* ersetzt.

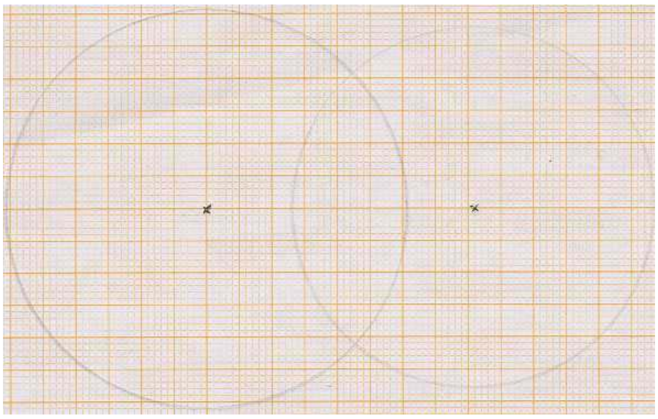
Eingabe der WINDOW-Einstellungen





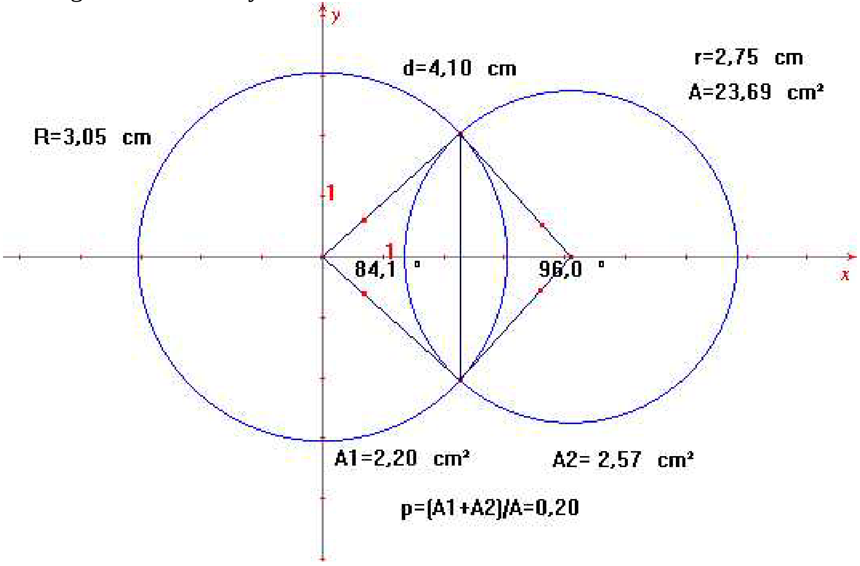
Aus der Grafik kann der Schnittpunkt der beiden Funktionen $y1$ und $y2$, also die Konstellation für 50%-ige Bedeckung abgelesen werden.

ad c) (1) Lösungsvariante durch Zeichnen auf mm-Papier



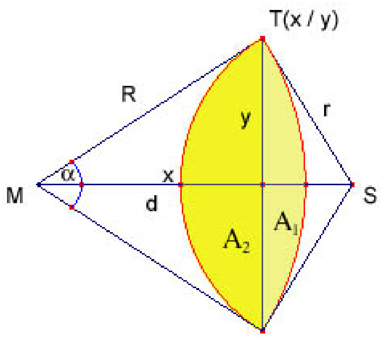
Durch Abzählen erhält man rund 490 mm^2 gemeinsame Fläche.
Dies entspricht ca. 20% der kleineren Kreisfläche.

Lösungsvariante mit Dynamischer Geometrie



Die Sonnenscheibe ist zu rund 20% vom Mond abgedeckt.

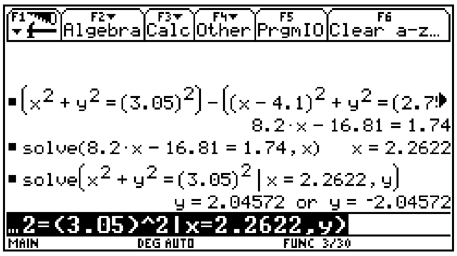
Lösungsvariante mit TI-92



Kreisgleichungen:

k_{Mond}: $x^2 + y^2 = R^2$

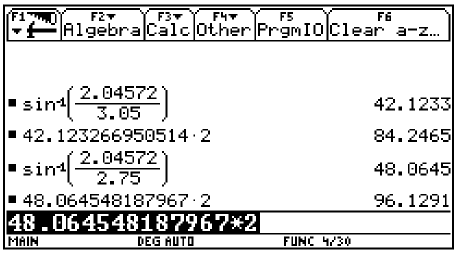
k_{Sonne}: $(x - d)^2 + y^2 = r^2$



Bestimmung der Schnittpunkte:

$T_1(2{,}262 / 2{,}046)$

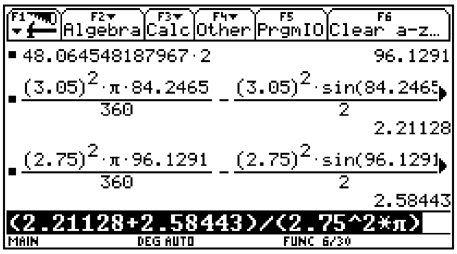
$T_2(2{,}262 / -2{,}046)$



Winkeln der Kreissektoren berechnen

$\alpha \approx 84{,}25°$

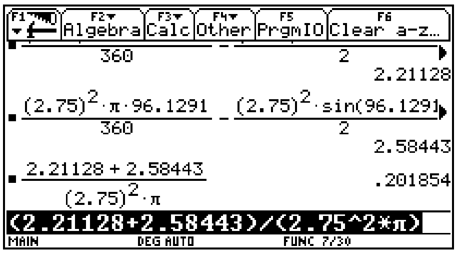
$\beta \approx 96{,}13°$



Berechnen der Kreisabschnitte:

$A_1 \approx 2{,}21$

$A_2 \approx 2{,}58$

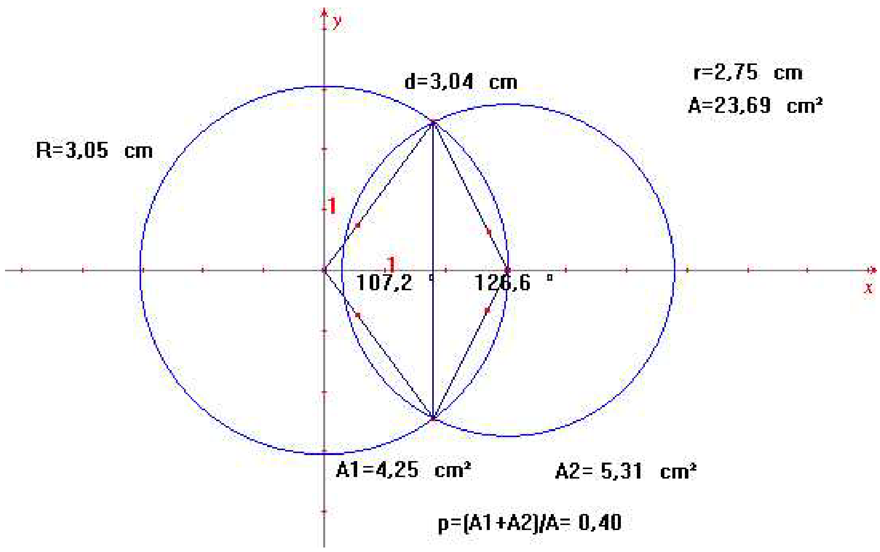


Überdeckte Fläche $\approx$ 4,7957

Das sind 20,18% der Sonnenfläche.

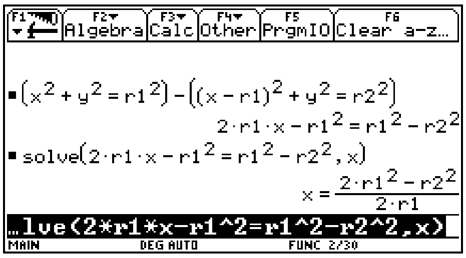
(2)

Lösungsvariante mit Dynamischer Geometrie für d = 4,1, R = 3,05 und r = 2,75

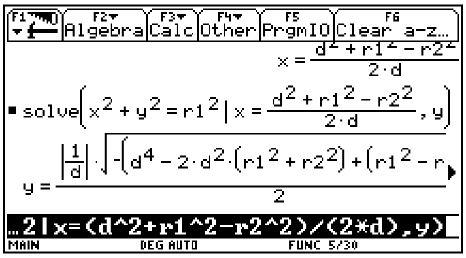


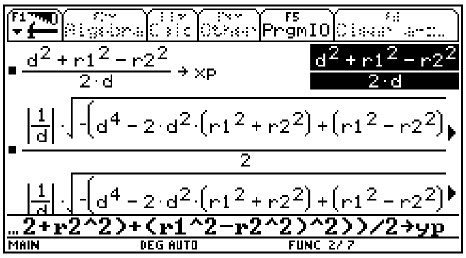
Wenn der Mondrand gerade zur Hälfte über die Sonne gewandert ist, ist die Sonne zu rund 40% vom Mond abgedeckt.

Lösungsvariante mit TI-92 allgemein für Mondradius r_1 und Sonnenradius r_2

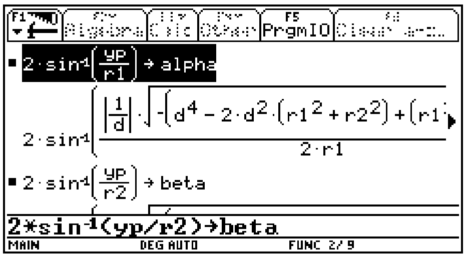


Bestimmung der Schnittpunkte der beiden Kreise

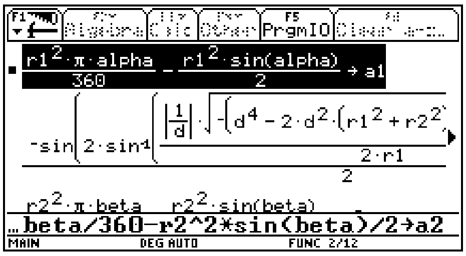




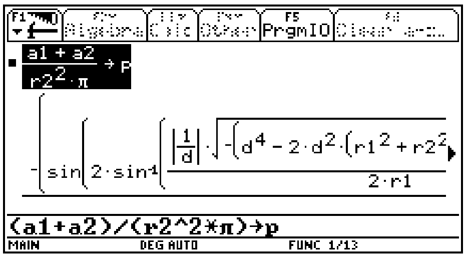
Schnittpunktkoordinaten speichern auf *xp* und *yp*



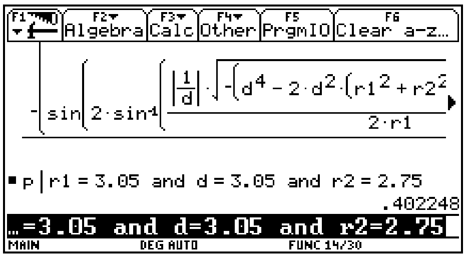
Winkel der Kreissektoren berechnen und speichern auf *alpha* bzw. *beta*



Berechnen der Kreisabschnitte und speichern in A_1 bzw. A_2

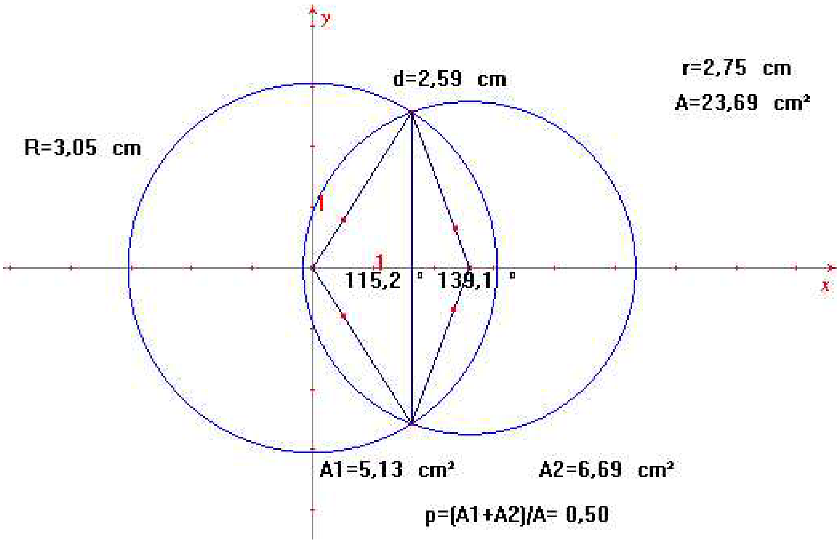


Berechnung des Prozentsatzes der Sonnenabdeckung



Obige Werte für Mond- und Sonnenradius eingesetzt ergibt eine 40,22%-ige Abdeckung der Sonne, wenn der Mondrand gerade zur Hälfte über die Sonne gewandert ist.

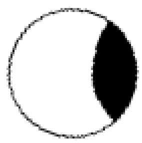
(3)
Lösungsvariante mit Dynamischer Geometrie für die angegebenen Werte



Unter der Voraussetzung von geradliniger und gleichförmiger Bewegung sind 50% der Sonne um ca. 12:01:10 vom Mond abgedeckt.

Zusätzliches Übungsbeispiel
Wieviel Prozent der Sonnenscheibe sind bei den folgenden partiellen Sonnenfinsternissen bedeckt?

a) Durchmesser der Sonnenscheibe = Durchmesser der Mondscheibe: $2r = 5{,}1$ cm
Länge des Schattens: $l = 4{,}5$ cm
Breite des Schattens: $b = 1{,}7$ cm



b) Abstand der Mittelpunkte: $d = 1{,}2$ cm
Durchmesser der Mondscheibe: $2R = 6{,}1$ cm
Durchmesser der Sonnenscheibe: $2r = 5{,}5$ cm