BspNr: A0413

Themenbereich	
Ebene analytische Geometrie, Gleichung von Kreis und Ellipse	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
• Verbindung von CAS mit Dynamischer Geometrie • Umgehen mit Kreis- und Ellipsengleichung	Cinderella (A0413a), TI-Interactive (A0413b)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	7. Klasse
Quelle: Markus Binder	

Leiter an einer Mauer

Angabe:
Romeo steht auf der Mitte einer Leiter, die an die Mauer von Julias Haus gelehnt ist, als plötzlich die Leiter wegzurutschen beginnt.

Fragen:
a) Auf welcher Bahnkurve bewegt sich Romeo, wenn er sich an der rutschenden Leiter festhält?

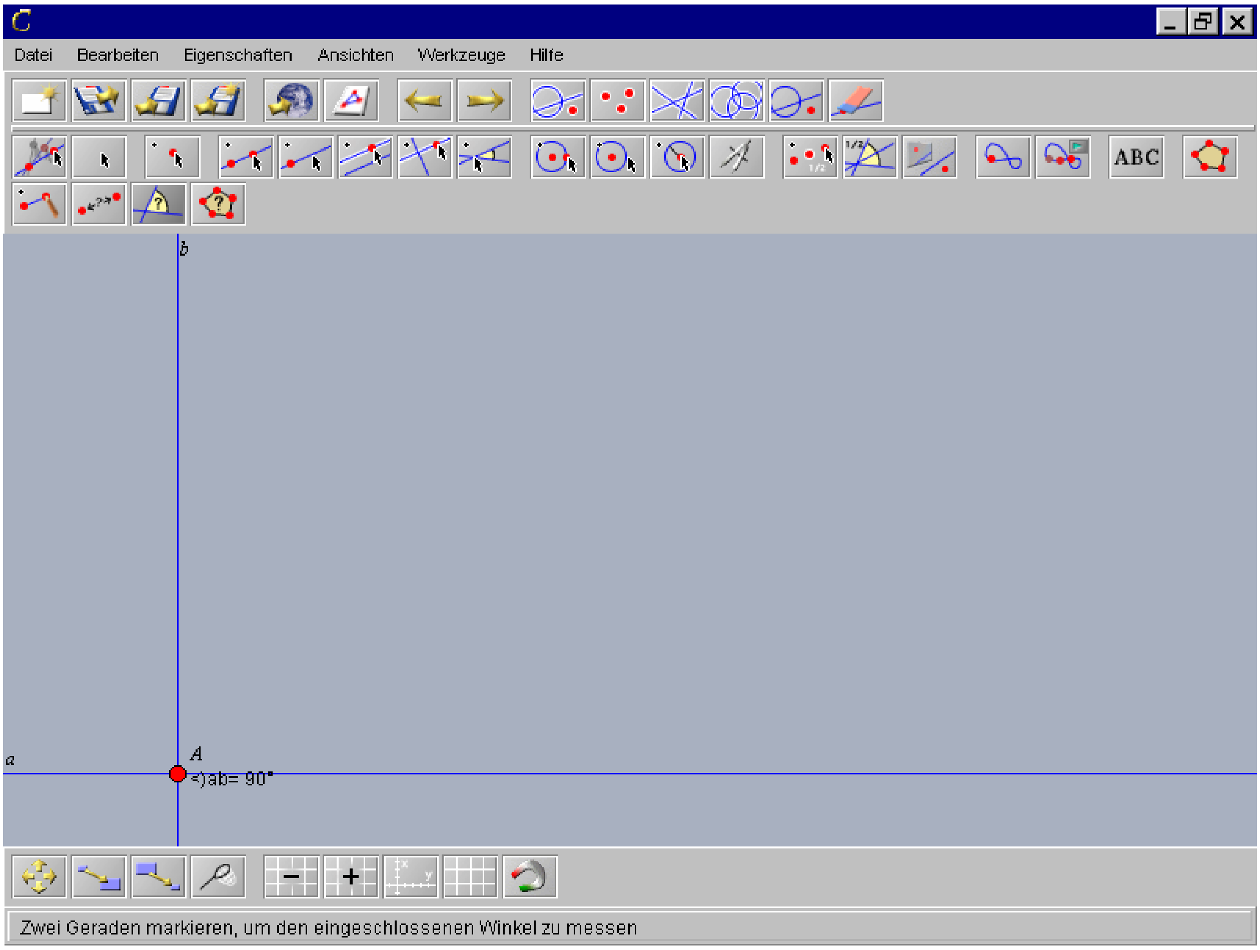
b) Welche Bahn erhält man, wenn Romeo nicht in der Mitte, sondern an einem anderen Punkt der Leiter steht?

BspNr: A0413a

Ausarbeitung (System: Cinderella)

Konstruktion der Mauer und des Bodens

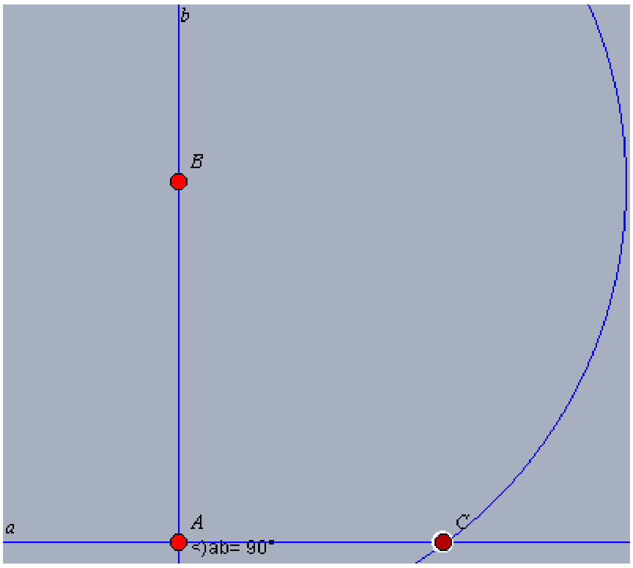
Zu Beginn konstruieren wir Mauer und Boden als aufeinander normalstehende Gerade:



Oberer und unterer Leiterendpunkt

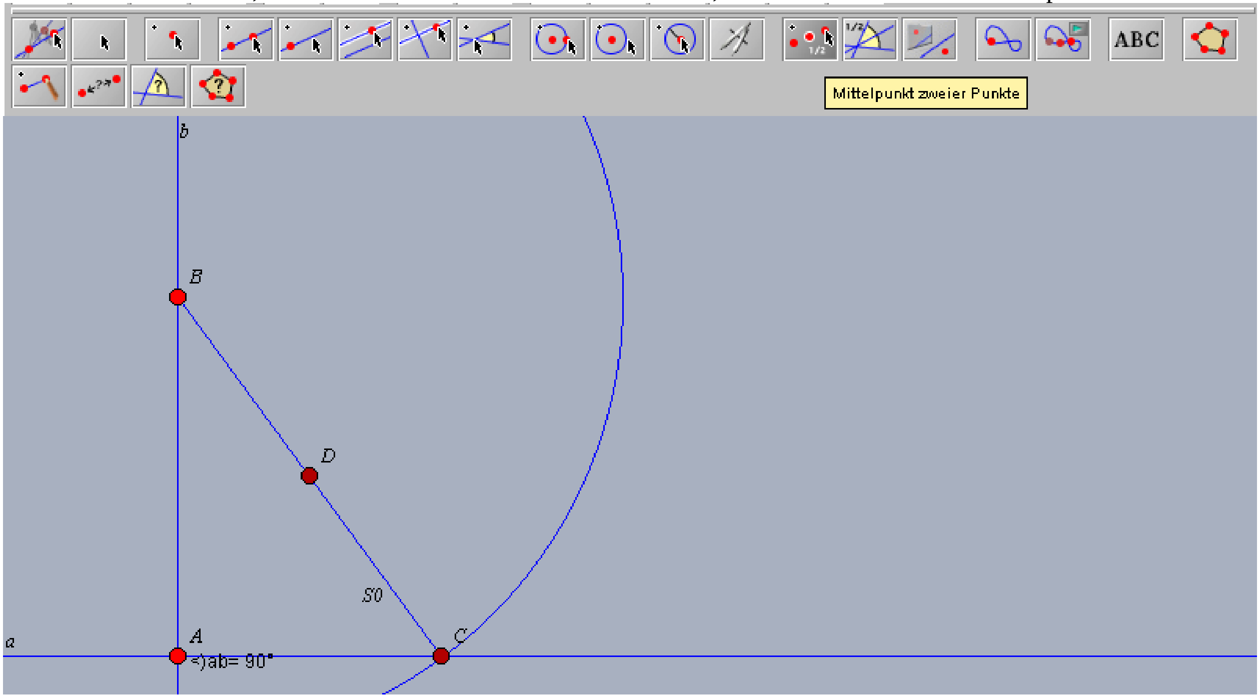
Den oberen Leiterendpunkt *B* wählen wir frei auf der Geraden *b*.

Der untere Leiterendpunkt *C* muss einen konstanten Abstand von *B* haben, weswegen wir einen Kreis konstruieren. Der Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden *a* (Boden) ist ebendieser untere Leiterendpunkt *C*.



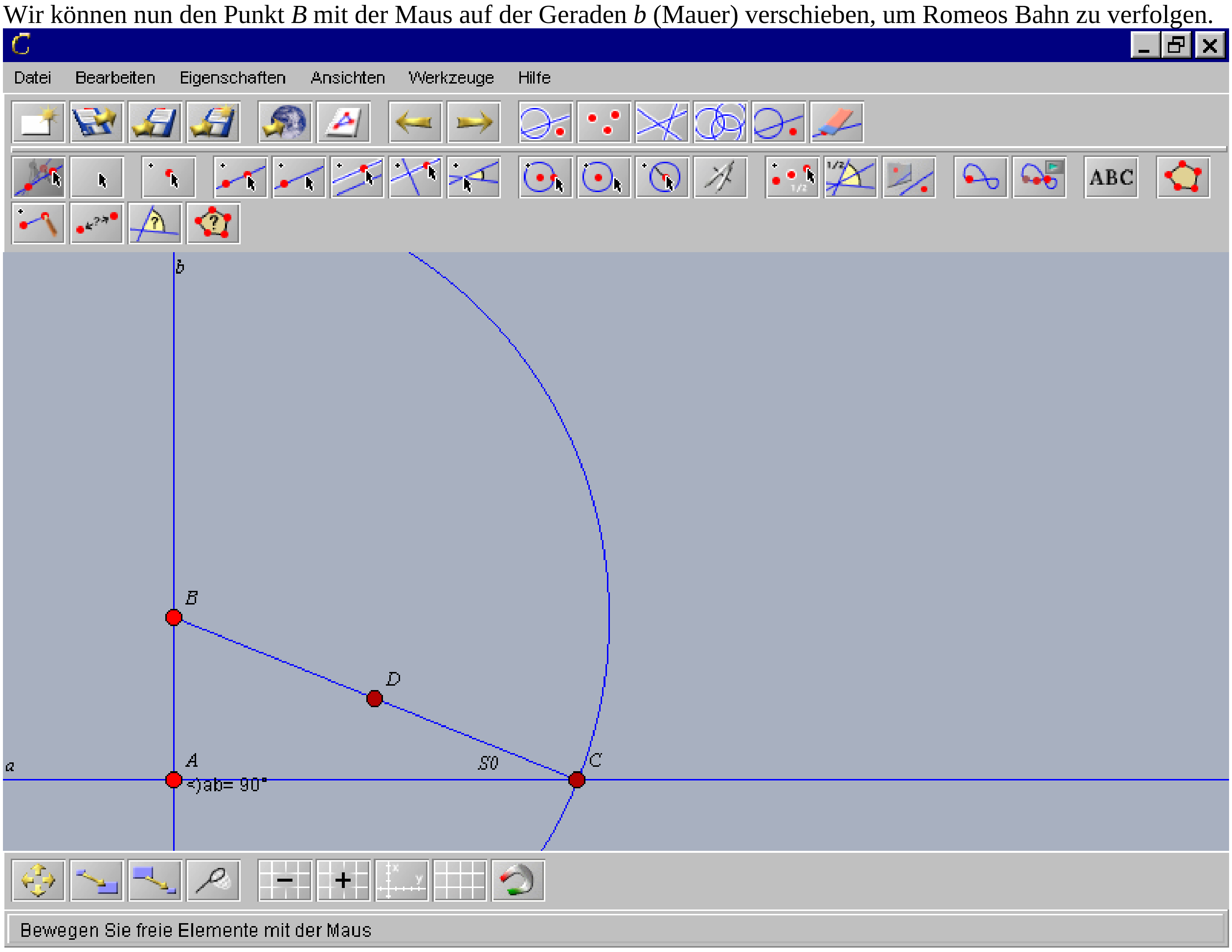
Die Leiter und Romeo

Verbinden wir *B* und *C*, und halbieren wir die entstehende Strecke, so erhalten wir Romeos Standpunkt auf der Leiter.



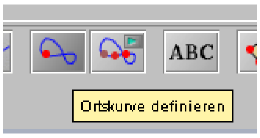
Die Leiter rutscht...

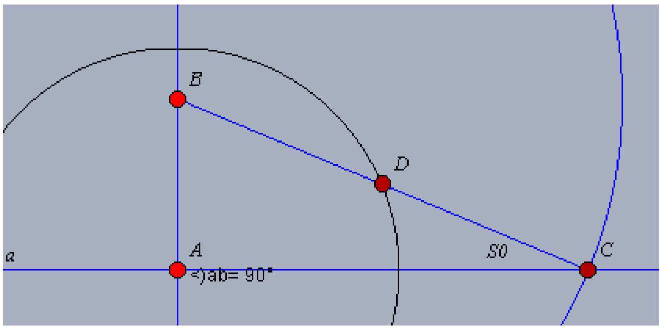
Wir können nun den Punkt *B* mit der Maus auf der Geraden *b* (Mauer) verschieben, um Romeos Bahn zu verfolgen.



Cinderella animiert die Leiter zur Bewegung

Mit dem einfachen Verschieben des Punktes *B* ist noch nicht recht zu erkennen, auf welcher Bahn sich Romeo bewegt, deswegen nutzen wir eine sehr anschauliche Funktion, die uns Cinderella bietet: Wir lassen die entstehende Bahn auf dem Schirm als Ortskurve einzeichnen.

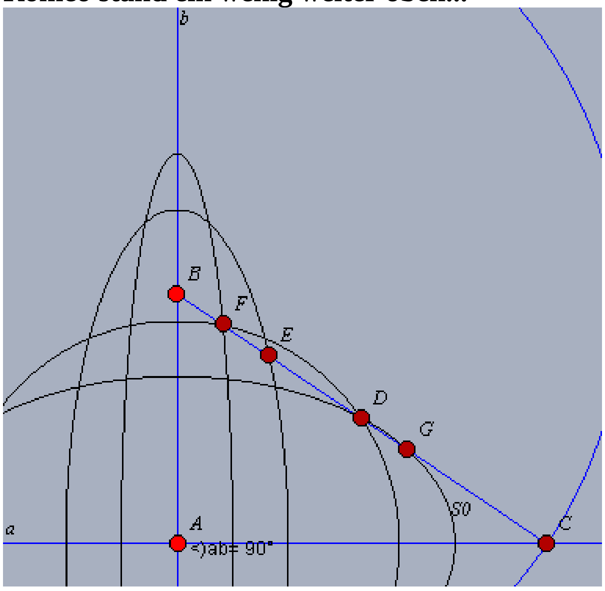




Romeo, der sich im Punkt *D* an der Leiter festhält, bewegt sich also offenbar auf einem Viertelkreis, wenn die Leiter zu rutschen beginnt.

Versuchen wir abschließend noch zu klären, was bei einem beliebigen Standpunkt auf der Leiter passiert.

Romeo stand ein wenig weiter oben...



Nehmen wir an, dass Romeo schon fast am Ziel oder noch zu Beginn seines Aufstiegs war und legen wir weitere Punkte auf der Strecke *BC* (Leiter) fest – zum Beispiel durch Halbieren der schon vorhandenen Teilstrecken von *BC*.

Man erkennt beim Bewegen von Punkt *B*, dass alle übrigen Standpositionen *E*, *F*, *G* bei rutschender Leiter zu einer elliptischen Bahn für Romeo führen.

BspNr: A0413b

Ausarbeitung (System: TI-Interactive)

Nachgerechnet...

Rechnen wir abschließend mit TI-Interactive nach, ob unsere Vermutung bezüglich der Bahnen von Romeo richtig waren.

Bezeichnen wir die Höhe des oberen Leiterendes mit *h* sowie die feste Länge der Leiter mit *L*, dann ist der Abstand *d* des unteren Leiterendes von der Mauer

$$\sqrt{L^2 - h^2} \to d$$

Aus dem Strahlensatz ergibt sich, dass

$$\frac{d}{L} = \frac{x_{Romeo}}{\frac{L}{2}} \to eq1$$

und

$$\frac{y_{Romeo}}{h} = \frac{\frac{L}{2}}{L} \to eq2$$

.

Berechnen wir aus diesen Gleichungen die Koordinaten von Romeo während des Rutschens der Leiter:

$$\text{solve}\left(eq1 \text{ and } eq2, \left\{x_{Romeo}, y_{Romeo}\right\}\right) \mid h > 0 \text{ and } L > 0 \qquad x_{Romeo} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} \text{ and } y_{Romeo} = \frac{h}{2}$$

Quadrieren wir die *x*- und die *y*-Koordinate von Romeo, so erhalten wir eine Konstante – den Radius des Kreisbogens, auf dem sich Romeo bewegt:

$$\left(\frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}$$

Dieser Radius ist konstant und hängt nur von der Länge der Leiter ab.