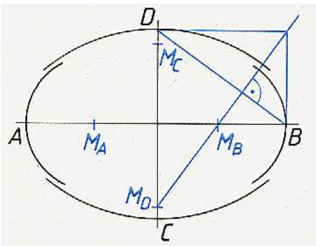
BspNr: A0412

Themenbereich	
Analytische Geometrie, Ellipse	
Ziele	**vorhandene Ausarbeitungen**
•	TI-92 und Cabri (A0412a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Franz Hauser (nach Idee von Josef Böhm: Von Pol zu Pol, von Sprung zu Sprung. http://www.acdca.ac.at/)	

Schmiegkreise einer Ellipse

Angabe und Fragen:
Zeichne mittels „Dynamischer Geometrie"-Software die Ellipse mit $a = 5$, $b = 3$ (1.Hauptlage) und konstruiere Scheitelschmiegkreise mit Hilfe von Streckensymmetralen (verwende dazu die Scheitelpunkte und "nahe gelegene" Ellipsenpunkte).

Führe diesen Vorgang analytisch durch und gib die Gleichungen der Scheitelschmiegkreise an.

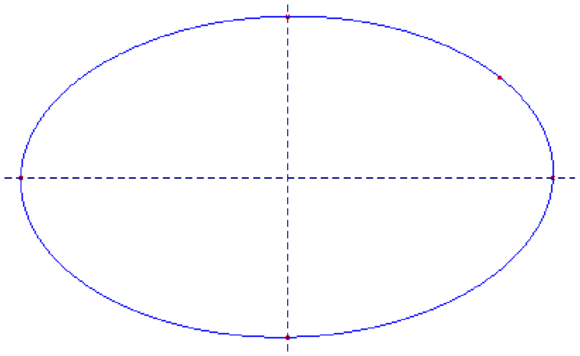


Zeige, dass die in vielen Lehrbüchern angegebene Konstruktion (Abbildung) zum gleichen Ergebnis führt.

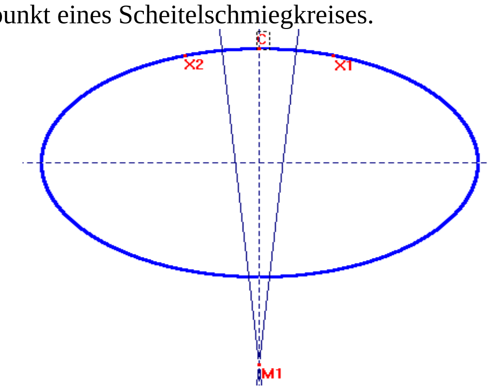
BspNr: A0412a

Ausarbeitung (System: TI-92 und Cabri)

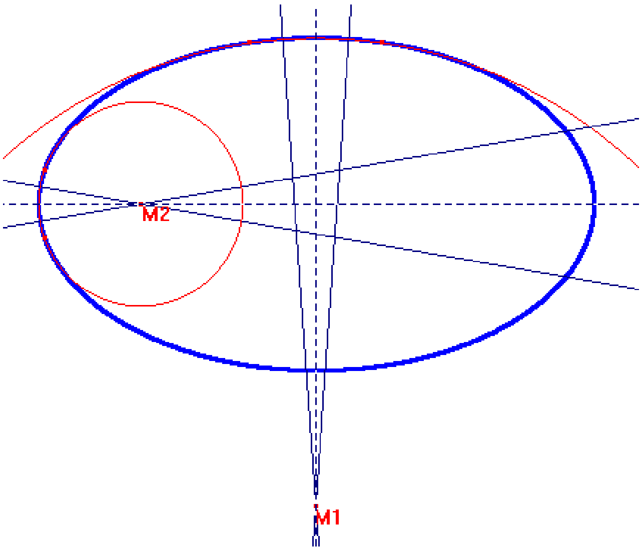
Wir konstruieren in Cabri eine „Ellipse“ durch Angabe von 5 Punkten.

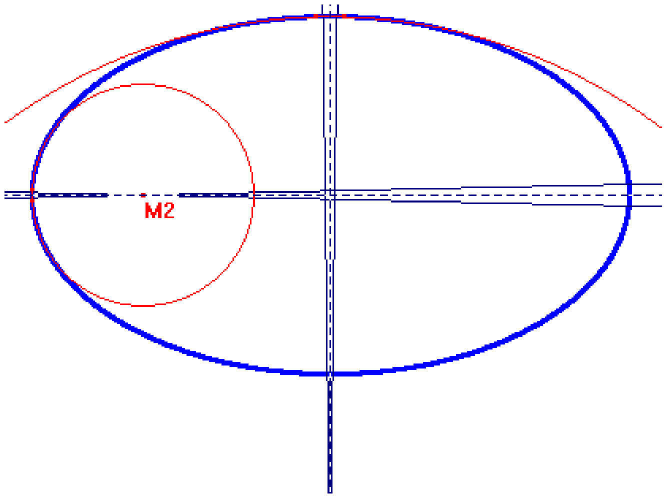


Die „Streckensymetralen“ (Nebenscheitel und zwei symmetrisch liegende Ellipsenpunkte) schneiden einander im Mittelpunkt eines Scheitelschmiegkreises.

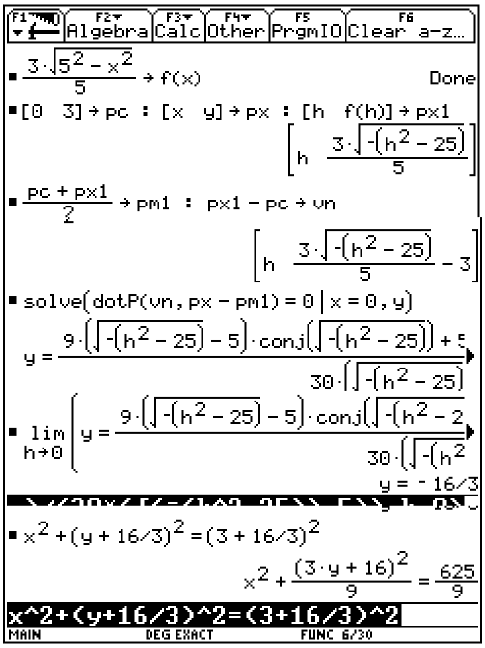


Analog ermitteln wir den Mittelpunkt eines Schmiegkreises in einem Hauptscheitel und zeichnen die Schmiegkreise. Durch Annäherung der Ellipsenpunkte an die Nebenscheitel erhalten wir die Schmiegkreise in den Scheitelpunkten der Ellipse.





Analytische Lösung mit TI-92:



Gegeben ist die Gleichung der Ellipse $9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225$ in erster Hauptlage. Wir wollen den Schmiegkreis im Nebenscheitel *C*(0;3) bestimmen.

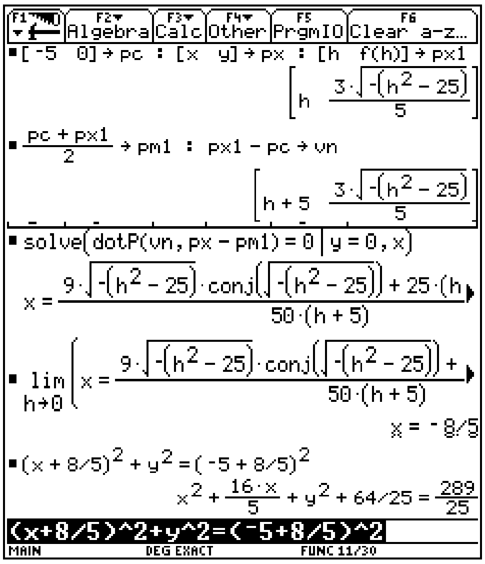
Wir speichern die Funktionsgleichung, die Koordinaten des Nebenscheitels *C* und des Ellipsenpunktes X_1.

Punkt und Normalvektor der Streckensymmetrale wird ermittelt.

Die Streckensymmetrale schneiden wir auf Grund der Symmetrie mit der *y*-Achse.

Nach dem Grenzübergang für *h* gegen 0 erhalten wir für die *y*-Koordinate des Mittelpunktes –16/3 und als Gleichung des Schmiegkreises in *C*:

$$x^2 + (y + \frac{16}{3})^2 = \frac{625}{9}$$



Analog bestimmen wir den Schmiegkreis im Hauptscheitel *A*(-5 ; 0).

Gleichung des Schmiegkreises in *A*: $(x + \frac{8}{5})^2 + y^2 = \frac{289}{25}$

Zusatzbeispiel

Bestimme die Scheitelschmiegkreise an die Ellipse in 1.Hauptlage $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ und zeige die Übereinstimmung mit

$$k_1: \; M_1(-a + \frac{b^2}{a}; 0), \; r_1 = \frac{b^2}{a}$$

im Hauptscheitel A(-a ; 0) und mit

$$k_2: \; M_2(0; b - \frac{a^2}{b}), \; r_2 = \frac{a^2}{b}$$

im Nebenscheitel C(0 ; b).

Ermittle auch die Scheitelschmiegkreise für die Hyperbel und die Parabel.