

| Themenbereich | |
|---|---------------------------|
| Ebene analytische Geometrie, Kreisgleichung, Teilverhältnis | |
| Ziele | vorhandene Ausarbeitungen |
| <ul style="list-style-type: none"> • Verbindung von CAS mit Dynamischer Geometrie • Analytische Überprüfung klassischer Sätze der Geometrie | TI-92 (A0410a) |
| Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele | A0411 |
| Lehrplanbezug (Österreich): | 6. Klasse |
| Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer | |

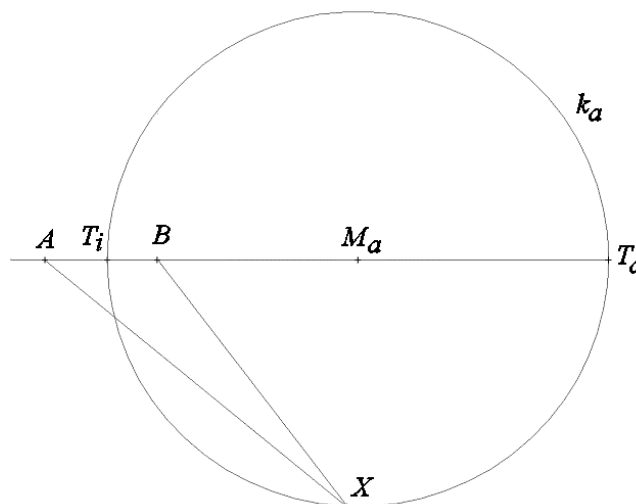
Kreis des Apollonios

Angabe:

Der Kreis des Apollonios von Perge:

Der griechische Mathematiker Apollonios von Perge (2. Jhd. n. Chr.) entdeckte folgende Eigenschaft. Die Menge aller Punkte X , für die gilt, dass das Verhältnis der Abstände zu zwei festen Punkten A und B konstant ist, ist der Apollonische Kreis k_a . Sein Mittelpunkt ist der Halbierungspunkt zwischen dem inneren und dem äußeren Teilungspunkt und er verläuft durch diese beiden Punkte.

$$k_a = \left\{ X \mid \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \text{konstant} \right\}$$



Fragen:

- 1) Berechne Mittelpunkt und Radius des Kreises des Apollonios für die Punkte $A = (ax \mid ay)$ und $B = (bx \mid by)$ und das Verhältnis n !
- 2) Stelle den Kreis und die Strecke AB durch eine Parameterdarstellung für $A = (1 \mid 2)$ und $B = (10 \mid 7)$ und $n = \frac{1}{3}$ dar.
- 3) Konstruiere mit einer dynamischen Geometrie für zwei Punkte A und B den Kreis des Apollonios für ein Verhältnis 1:3!

Ausarbeitung (System: TI-92)

ad 1)

Zunächst geben wir die Punkte A und B und einen variablen Punkt XP ein. Danach setzen wir das Verhältnis der Strecken an.

TI-92 calculator screen showing the input of points A and B as vectors. The screen shows:

- $\begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} \rightarrow a$ with coordinates $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix} \rightarrow b$ with coordinates $\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 2/40

TI-92 calculator screen showing norm calculations and a ratio equation. The screen shows:

- $\text{norm}(a - xp) = n \rightarrow g11$
- $\text{norm}(b - xp) = n \rightarrow g11$
- Equation: $\frac{\sqrt{x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2}}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot bx \cdot x + y^2 - 2 \cdot by \cdot y + bx^2 + by^2}} = n$
- Result: $\text{norm}(a-xp)/\text{norm}(b-xp)=n \rightarrow g11$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 4/40

Nun wird die Gleichung bruchfrei und anschließend durch Quadrieren wurzelfrei gemacht. Die Gleichung erhält die Form einer Kreisgleichung. Durch Division kann dann der Koeffizient von x^2 und y^2 auf 1 normiert werden.

TI-92 calculator screen showing algebraic manipulation of the equation. The screen shows:

- Equation: $\frac{\sqrt{x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2}}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot bx \cdot x + y^2 - 2 \cdot by \cdot y + bx^2 + by^2}} = n$
- Step: $g11 \cdot \text{getDenom}(\text{left}(g11)) \rightarrow g12$
- Equation: $\sqrt{x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2} = n \cdot \sqrt{x^2 - 2 \cdot bx \cdot x + y^2 - 2 \cdot by \cdot y + bx^2 + by^2}$
- Step: $g12^2 \rightarrow g13$
- Equation: $x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2 = n^2 \cdot (x^2 - 2 \cdot bx \cdot x + y^2 - 2 \cdot by \cdot y + bx^2 + by^2)$
- Result: $g12^2 \rightarrow g13$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 6/40

TI-92 calculator screen showing further algebraic manipulation. The screen shows:

- Equation: $(1 - n^2) \cdot x^2 + (2 \cdot n^2 \cdot bx - 2 \cdot ax) \cdot x + (1 - n^2) \cdot y^2 + (2 \cdot n^2 \cdot by - 2 \cdot ay) \cdot y + ax^2 + ay^2 - n^2 \cdot (bx^2 + by^2) = 0$
- Step: $\text{propFrac}\left(\frac{g14}{1 - n^2}\right) \rightarrow g15$
- Equation: $\frac{n^2 \cdot x^2}{n^2 - 1} - \frac{x^2}{n^2 - 1} - \frac{2 \cdot n^2 \cdot bx \cdot x}{n^2 - 1} + \frac{2 \cdot ax \cdot x}{n^2 - 1} + \frac{r}{n^2 - 1} = 0$
- Result: $\text{propFrac}(g14/(1-n^2)) \rightarrow g15$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 8/40

Jetzt lassen sich aus der Gleichung die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises ablesen und dann der Radius des Kreises bestimmen.

TI-92 calculator screen showing the derivation of the center coordinates. The screen shows:

- Equation: $(1 - n^2) \cdot x^2 + (2 \cdot n^2 \cdot bx - 2 \cdot ax) \cdot x + (1 - n^2) \cdot y^2 + (2 \cdot n^2 \cdot by - 2 \cdot ay) \cdot y + ax^2 + ay^2 - n^2 \cdot (bx^2 + by^2) = 0$
- Step: $\text{propFrac}\left(\frac{g14}{1 - n^2}\right) \rightarrow g15$
- Equation: $\frac{n^2 \cdot y^2}{n^2 - 1} - \frac{y^2}{n^2 - 1} - \frac{2 \cdot n^2 \cdot by \cdot y}{n^2 - 1} + \frac{2 \cdot ay \cdot y}{n^2 - 1} + \dots = 0$
- Result: $\text{propFrac}(g14/(1-n^2)) \rightarrow g15$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 8/40

TI-92 calculator screen showing the derivation of the center coordinates. The screen shows:

- Equation: $(1 - n^2) \cdot x^2 + (2 \cdot n^2 \cdot bx - 2 \cdot ax) \cdot x + (1 - n^2) \cdot y^2 + (2 \cdot n^2 \cdot by - 2 \cdot ay) \cdot y + ax^2 + ay^2 - n^2 \cdot (bx^2 + by^2) = 0$
- Step: $\text{propFrac}\left(\frac{g14}{1 - n^2}\right) \rightarrow g15$
- Equation: $\frac{ay \cdot y}{-1} + \frac{n^2 \cdot bx^2}{n^2 - 1} + \frac{n^2 \cdot by^2}{n^2 - 1} - \frac{ax^2}{n^2 - 1} - \frac{ay^2}{n^2 - 1} + \dots = 0$
- Result: $\text{propFrac}(g14/(1-n^2)) \rightarrow g15$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 8/40

TI-92 calculator screen showing the derivation of the center coordinates. The screen shows:

- Equation: $\frac{ay \cdot y}{-1} + \frac{n^2 \cdot bx^2}{n^2 - 1} + \frac{n^2 \cdot by^2}{n^2 - 1} - \frac{ax^2}{n^2 - 1} - \frac{ay^2}{n^2 - 1} + \dots = 0$
- Step: $\frac{n^2 \cdot bx - ax}{n^2 - 1} \rightarrow mx$
- Step: $\frac{n^2 \cdot by - ay}{n^2 - 1} \rightarrow my$
- Result: $(n^2 \cdot by - ay) / (n^2 - 1) \rightarrow my$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 10/40

TI-92 calculator screen showing the derivation of the center coordinates. The screen shows:

- Equation: $(x - mx)^2 + (y - my)^2 - g15 \rightarrow r^2$
- Equation: $n^2 \cdot (ax^2 - 2 \cdot ax \cdot bx + ay^2 - 2 \cdot ay \cdot by + bx^2 + by^2) = (n^2 - 1) \cdot r^2$
- Step: $\sqrt{r^2} \rightarrow ra$
- Equation: $\frac{n}{n^2 - 1} \cdot \sqrt{ax^2 - 2 \cdot ax \cdot bx + ay^2 - 2 \cdot ay \cdot by + bx^2 + by^2} = ra$
- Result: $\sqrt{r^2} \rightarrow ra$

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 12/40

ad 2)

Es folgt die Eingabe der speziellen Daten.

TI-92 calculator screen showing the input of specific data. The screen shows:

- Equation: $\frac{n}{n^2 - 1} \cdot \sqrt{ax^2 - 2 \cdot ax \cdot bx + ay^2 - 2 \cdot ay \cdot by + bx^2 + by^2}$
- Input: $1 \rightarrow ax$ (1), $2 \rightarrow ay$ (2), $10 \rightarrow bx$ (10), $7 \rightarrow by$ (7), $1/3 \rightarrow n$ (1/3)

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 17/40

TI-92 calculator screen showing the input of specific data. The screen shows:

- Input: $10 \rightarrow bx$ (10), $7 \rightarrow by$ (7), $1/3 \rightarrow n$ (1/3), mx (-1/8), my (11/8), ra ($\frac{3 \cdot \sqrt{106}}{8}$)

Calculator status: APPDL, RAD AUTO, PAR 20/40

Im Parametermode wird der Kreis, die Strecke und ihre Aufteilung durch geschickte Wahl des Parameters t und der Windowvariablen $tstep$ auf einmal dargestellt.

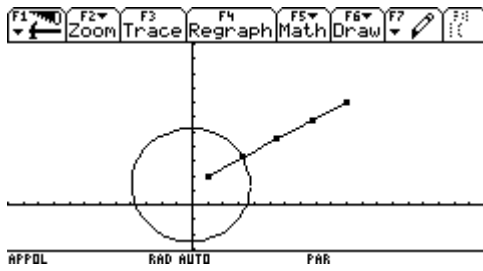
```

F1 [ ] F2 [ ] F3 [ ] F4 [ ] F5 [ ] F6 [ ] F7 [ ]
Zoom Edit All Style
PLOTS
✓xt1=mx+ra*cos(t)
✓yt1=my+ra*sin(t)
✓xt2=ax+t*(bx-ax)|t≤1
✓yt2=ay+t*(by-ay)
✓xt3=ax+10*t/4*(bx-ax)|t≤.4
✓yt3=ay+10*t/4*(by-ay)
-----
xt1(t)=mx+ra*cos(t)
APPDL RAD AUTO PAR
  
```

```

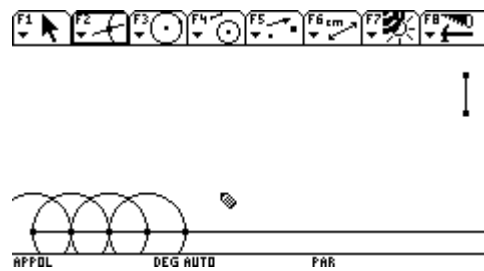
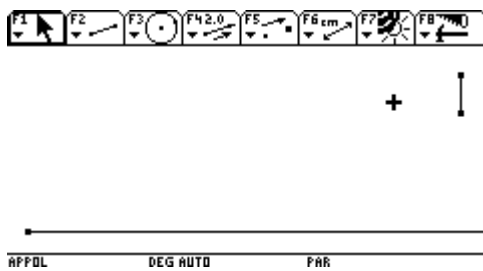
F1 [ ] F2 [ ]
Zoom
tmin=0.
tmax=6.28318530718
tstep=1
xmin=-12.
xmax=19.
xsc1=1.
ymin=-3.
ymax=11.
ytc1=1
-----
APPDL RAD AUTO PAR
  
```

Über Zoomsq_r erhält man eine unverzerrte Darstellung.

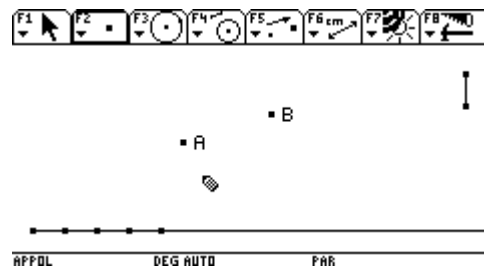
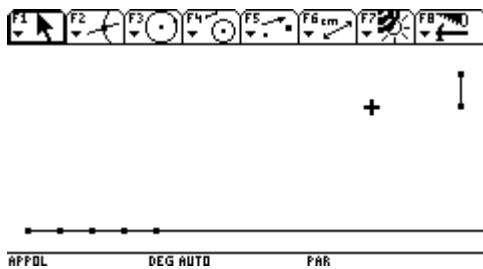


ad 3)

Am unteren Bildschirmrand wird ein Strahl und am rechten Bildschirmrand wird eine Strecke aufgetragen. Die Länge der Strecke wird mit der Funktion Compass viermal auf dem Strahl abgetragen.



Die Kreise werden ausgeblendet und es werden die beiden Punkte A und B festgelegt.



Ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius gleich der Streckenlänge und ein Kreis mit Mittelpunkt B und Radius gleich der dreifachen Streckenlänge werden gezeichnet. Danach werden die Schnittpunkte der Kreise bestimmt. Bei Veränderung der Streckenlänge hinterlassen die Schnittpunkte der beiden Kreise als Spur den Kreis von Apollonios.

