

BspNr: A0310

Themenbereich	
Ebene analytische Geometrie, merkwürdige Punkte	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
• Vektorrechnung	TI-92 (A0310a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	A0311
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Inkreis

Angabe und Fragen:

Von einem Dreieck kennt man die Gleichungen der Trägergeraden der Dreiecksseiten. Berechnen Sie die Gleichung des Inkreises.

$$a : 4x - 4y = -20 \quad b : 3x + 4y = 20 \quad c : x = 10$$

Ausarbeitung (System: TI-92)

Zunächst werden die Schnittpunkte der Trägergeraden bestimmt. Anschließend werden mit Hilfe der Einheitsvektoren der Seiten die Richtungen der Winkelsymmetralen ermittelt.

TI-92 calculator screen showing matrix operations:

- $\text{simult}\left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \end{bmatrix}\right) \rightarrow c$ (result: $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$)
- $\text{simult}\left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \end{bmatrix}\right) \rightarrow b$ (result: $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$)
- $\text{simult}\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}\right) \rightarrow a$ (result: $\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$)

Bottom line: $t \langle [3, 4] [1, 0] \rangle, [10] [10] \rangle \rightarrow a$

TI-92 calculator screen showing unit vector calculations:

- $\text{unitV}(b - a) + \text{unitV}(c - a) \rightarrow r_{w\alpha}$ (result: $\begin{bmatrix} -4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$)
- $\text{unitV}(c - b) + \text{unitV}(a - b) \rightarrow r_{w\beta}$ (result: $\begin{bmatrix} -3/5 \\ -9/5 \end{bmatrix}$)
- $a + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow w\alpha$ (result: $\begin{bmatrix} -t + 10 \\ 2 \cdot t - 5 \end{bmatrix}$)

Bottom line: $a + t \cdot [-1] [2] \rightarrow w\alpha$

Jetzt können die Gleichungen der Winkelsymmetralen aufgestellt und deren Schnittpunkt gefunden werden. Damit ist der Inkreisemittelpunkt festgelegt.

TI-92 calculator screen showing the reduction of a system of linear equations:

- $b + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow w\beta$ (result: $\begin{bmatrix} s + 10 \\ 3 \cdot s + 20 \end{bmatrix}$)
- $w\alpha - w\beta$ (result: $\begin{bmatrix} -s - t \\ -3 \cdot s + 2 \cdot t - 25 \end{bmatrix}$)
- $\text{rref}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 25 \end{bmatrix}\right)$ (result: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$)

Bottom line: $\text{rref} \langle [-1, -1, 0] [2, -3, 25] \rangle$

TI-92 calculator screen showing the intersection point of the angle bisectors:

- $a + 5 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow i$ (result: $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$)
- $b - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow i$ (result: $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$)
- $b - a \rightarrow v_{ab}$ (result: $\begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$)

Bottom line: $\text{rref} \langle [2, -3, 25] \rangle$

Nun wird die Trägergerade g_a der Seite a mit einer zu ihr Normalen n durch den Inkreisemittelpunkt geschnitten, was zum Berührungspunkt pa des Inkreises mit der Seite a führt.

Der Abstand von pa zum Inkreisemittelpunkt ist der Radius des Inkreises.

TI-92 calculator screen showing the calculation of the line g_a and its normal vector n :

- $a + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow g_a$ (result: $\begin{bmatrix} 10 \\ t - 5 \end{bmatrix}$)
- $i + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow n$ (result: $\begin{bmatrix} s + 5 \\ 5 \end{bmatrix}$)
- $g_a - n$ (result: $\begin{bmatrix} -s + 5 \\ t - 10 \end{bmatrix}$)

Bottom line: $g_a - n$

TI-92 calculator screen showing the calculation of the contact point pa and the radius r :

- $g_a - n$ (result: $\begin{bmatrix} -s + 5 \\ t - 10 \end{bmatrix}$)
- $a + 10 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow pa$ (result: $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$)
- $i + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow pa$ (result: $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$)
- $\text{norm}(pa - i) \rightarrow r$ (result: 5)

Bottom line: $\text{norm}(pa - i) \rightarrow r$

TI-92 calculator screen showing the derivation of the circle equation:

- $i + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow pa$ (result: $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$)
- $\text{norm}(pa - i) \rightarrow r$ (result: 5)
- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow x_0$ (result: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)
- $(\text{norm}(x_0 - i))^2 - r^2 = 0$
- $x^2 - 10 \cdot x + y^2 - 10 \cdot y + 25 = 0$

Bottom line: $\langle \text{norm}(x_0 - i) \rangle^2 - r^2 = 0$

Zum Schluss muss nur noch die Gleichung des Inkreises aufgestellt werden.