

Themenbereich	
Räumliche analytische Geometrie	
Ziele	vorhandene Ausarbeitungen
<ul style="list-style-type: none"> Räumliche Darstellung von Körpern Anwendung von Matrizen 	TI-92 (A0110a)
Analoge Aufgabenstellungen – Übungsbeispiele	
Lehrplanbezug (Österreich):	6. Klasse
Quelle: Dr. Thomas Himmelbauer	

Berechnung und räumliche Darstellung einer Pyramide

Angabe:

Von einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind die Eckpunkte A , B , und C bekannt:

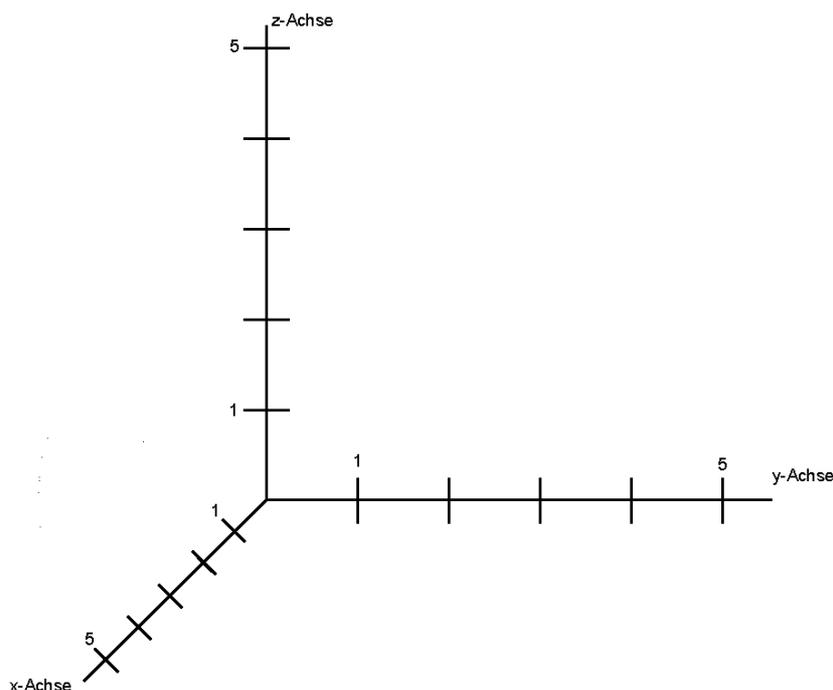
$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ cy \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Höhe h der Pyramide beträgt $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{17}$ E.

Weiters ist die Ebene $\varepsilon: x + y + z = 10$ gegeben.

Fragen:

- Berechne die fehlende Koordinate von C , die Koordinaten des vierten Basispunktes D und der Pyramidenspitze S .
- Berechne die Schnittpunkte der Seitenkanten der Pyramide mit der Ebene ε .
- Beschreibe, wie diese Pyramide und ihre Schnittfläche mit der Ebene ε als Schrägriss im CAS dargestellt werden können.
- Man beschränke sich auf einen einfachen Schrägriss und wähle eine Verkürzung von 0,5 auf der x -Achse und einen Winkel von 135° zwischen x -Achse und y -Achse.

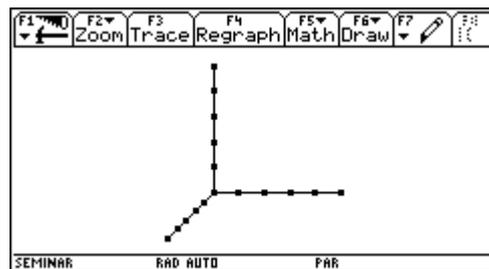
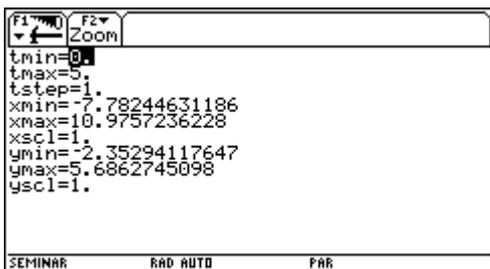
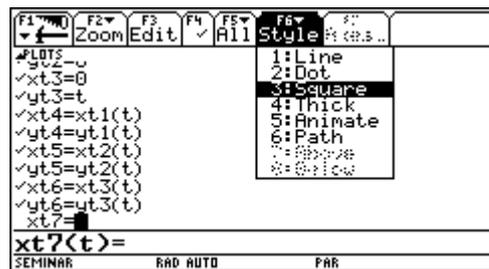
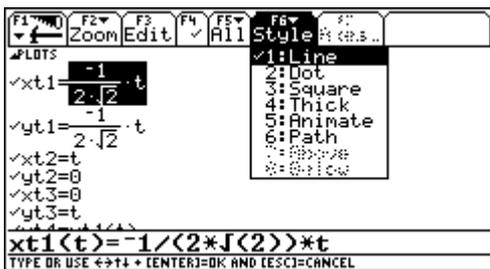


Ausarbeitung (System: TI-92)

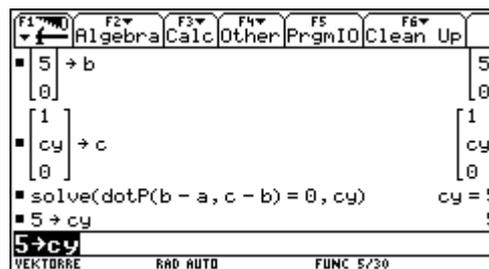
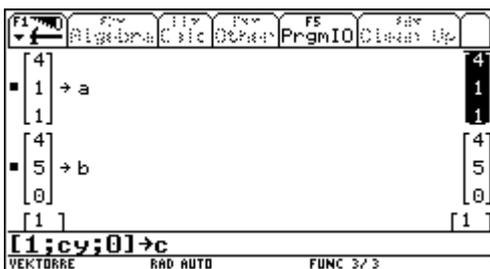
Zunächst erstellen wir das räumliche Koordinatensystem:

Die drei Achsen erhält man als Gerade durch den Ursprung mit den unten angegebenen Richtungsvektoren. Dabei ist die Länge der Vektoren auf die Länge der jeweiligen Einheit abgestimmt. Einmal werden die Geraden mit dem Style Line und einmal mit dem Style Square gezeichnet. Dadurch entstehen bei richtiger Wahl der Window-Variablen die Achsen und die Skalierungen.

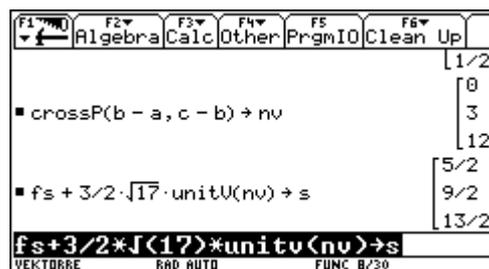
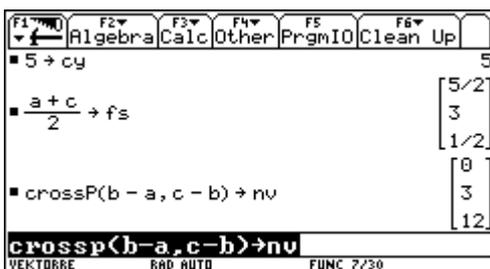
$$\vec{rx} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{ry} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{rz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Dann geben wir die drei Eckpunkte A , B und C ein und berechnen mit Hilfe des inneren Produktes die fehlende Koordinate von C .



Dann berechnen wir den Lotfußpunkt FS der Spitze S und den Normalvektor auf die Ebene der Grundfläche. Durch Abtragen der bekannten Höhe erhalten wir die Spitze.



Nun editieren wir die Trägergeraden der Seitenkanten ka , kb , kc und kd .

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$a + t \cdot (s - a) \rightarrow ka$					$\begin{bmatrix} 13/2 \\ 4 - \frac{3 \cdot t}{2} \\ \frac{7 \cdot t}{2} + 1 \\ \frac{11 \cdot t}{2} + 1 \end{bmatrix}$
a+t*(s-a)→ka					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 9/30			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$b + t \cdot (s - b) \rightarrow kb$					$\begin{bmatrix} \frac{11 \cdot t}{2} + 1 \\ 4 - \frac{3 \cdot t}{2} \\ 5 - \frac{t}{2} \\ \frac{13 \cdot t}{2} \end{bmatrix}$
b+t*(s-b)→kb					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 10/30			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$c + t \cdot (s - c) \rightarrow kc$					$\begin{bmatrix} \frac{13 \cdot t}{2} \\ \frac{3 \cdot t}{2} + 1 \\ 5 - \frac{t}{2} \\ \frac{13 \cdot t}{2} \end{bmatrix}$
c+t*(s-c)→kc					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 11/30			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$c + t \cdot (s - c) \rightarrow kc$					$\begin{bmatrix} 5 - \frac{t}{2} \\ \frac{13 \cdot t}{2} \end{bmatrix}$
$a + c - b \rightarrow d$					$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
a+(c-b)→d					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 12/30			

Um rasch den Schnittpunkt mit der Ebene \mathcal{E} berechnen zu können, arbeiten wir mit ihrem Normalvektor. Durch Einsetzen der Gleichungen der entsprechenden Kanten in die Ebenengleichung können wir den Parameter für den Schnittpunkt und damit auch den Schnittpunkt errechnen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$d + t \cdot (s - d) \rightarrow kd$					$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3 \cdot t}{2} + 1 \\ \frac{7 \cdot t}{2} + 1 \\ \frac{11 \cdot t}{2} + 1 \end{bmatrix}$
d+t*(s-d)→kd					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 13/30			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow nve$					$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\text{solve}(\text{dotP}(nve, ka) = 10, t)$					$t = 8/15$
$ka t = 8/15 \rightarrow sna$					$\begin{bmatrix} 16/5 \\ 43/15 \\ 59/15 \end{bmatrix}$
VEKTORRE					
	RAD AUTO	FUNC 16/30			

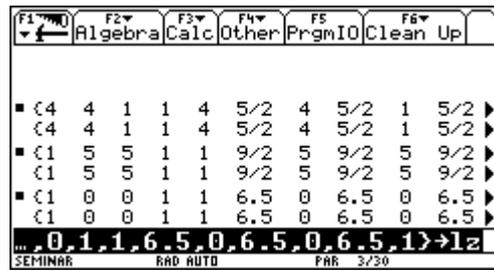
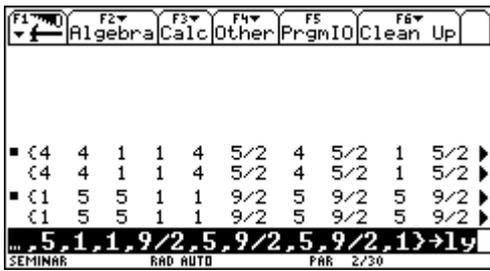
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$ka t = 8/15 \rightarrow sna$					$\begin{bmatrix} 16/5 \\ 43/15 \\ 59/15 \end{bmatrix}$
$\text{solve}(\text{dotP}(nve, kb) = 10, t)$					$t = 2/9$
$kb t = 2/9 \rightarrow snb$					$\begin{bmatrix} 11/3 \\ 44/9 \\ 13/9 \end{bmatrix}$
kb t=2/9→snb					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 18/30			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$kb t = 2/9 \rightarrow snb$					$\begin{bmatrix} 11/3 \\ 44/9 \\ 13/9 \end{bmatrix}$
$\text{solve}(\text{dotP}(nve, kc) = 10, t)$					$t = 8/15$
$kc t = 8/15 \rightarrow snc$					$\begin{bmatrix} 9/5 \\ 71/15 \\ 52/15 \end{bmatrix}$
kc t=8/15→snc					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 20/30			

Nun stellen wir die drei Listen lx , ly und lz – für die x -, y - und z -Koordinaten - auf, deren Linienzug uns die Pyramide zeichnen wird. Hier ist folgende Reihenfolge gewählt worden: A; B; C; D; A; S; B; S; C; S; D

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$kc t = 8/15 \rightarrow snc$					$\begin{bmatrix} 9/5 \\ 71/15 \\ 52/15 \end{bmatrix}$
$\text{solve}(\text{dotP}(nve, kd) = 10, t)$					$t = 2/3$
$kd t = 2/3 \rightarrow snd$					$\begin{bmatrix} 2 \\ 10/3 \\ 14/3 \end{bmatrix}$
kd t=2/3→snd					
VEKTORRE	RAD AUTO	FUNC 22/30			

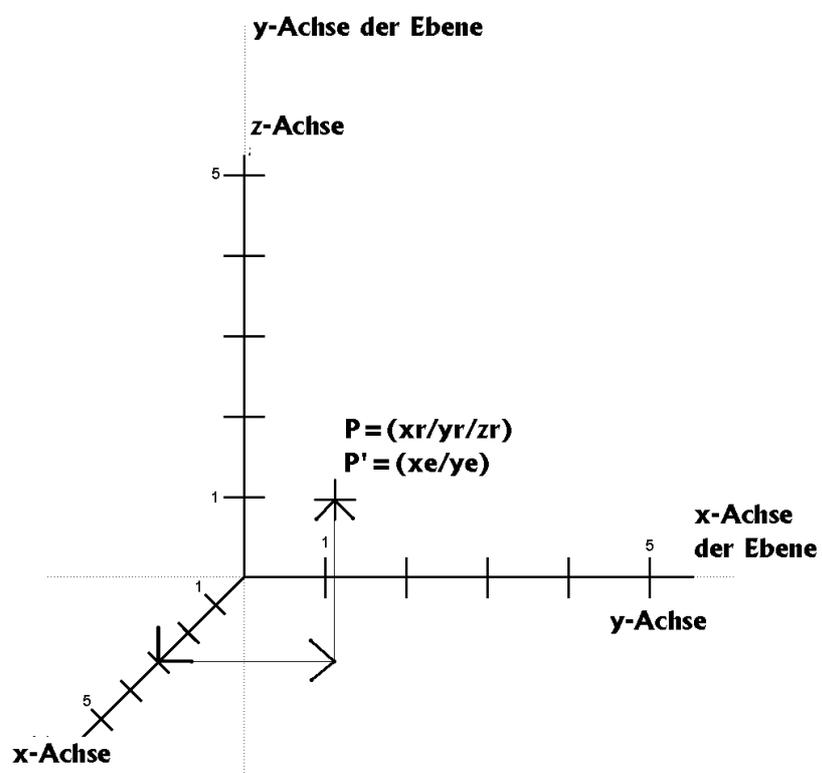
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\{4 \ 4 \ 1 \ 1 \ 4 \ 5/2 \ 4 \ 5/2 \ 1 \ 5/2 \}$					
$\{4 \ 4 \ 1 \ 1 \ 4 \ 5/2 \ 4 \ 5/2 \ 1 \ 5/2 \}$					
$\dots, 1, 1, 4, 5/2, 4, 5/2, 1, 5/2, 1 \rightarrow lx$					
SEMINAR					
	RAD AUTO	PAR 1/30			



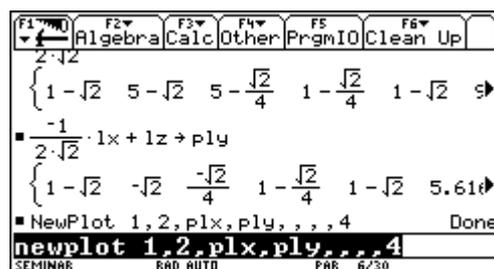
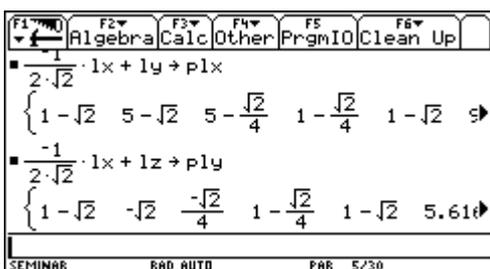
Um die Projektion eines Punktes $P = \begin{pmatrix} xr \\ yr \\ zr \end{pmatrix}$ zu erhalten gehen wir analog zum Zeichnen des Punktes ins

Koordinatensystem vor. Wir addieren zum xr -fachen des Einheitsvektors der x -Achse das yr -fache des Einheitsvektors der y -Achse und das zr -fache der z -Achse und erhalte so die Formel für die den Ortsvektor des Projektion P' des räumlichen Punktes P (siehe Zeichnung).

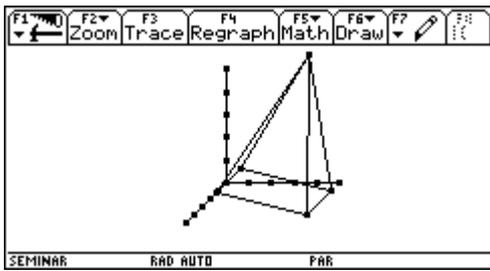
$$xr \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} + yr \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zr \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot xr + yr \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot xr + zr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe \\ ye \end{pmatrix}$$



Daher werden nun die Listen der Koordinaten der projizierten Punkte bestimmt – plx und ply - und der Newplot-Befehl aktiviert.



Schon kann man die Pyramide bewundern. Anschließend geben wir die Listen für die Darstellung der Schnittfigur ein. Hier wurde die Reihenfolge SNA, SNB, SNC, SND, SNA gewählt.



```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
1 -√2 -√2 4 1 - 4 1 -√2 5.61
NewPlot 1,2,plx,ply,,,4 Done
(16/5 11/3 9/5 2 16/5)÷1x2
(16/5 11/3 9/5 2 16/5)
(43/15 44/9 71/15 10/3 43/15)÷1x
(43/15 44/9 71/15 10/3 43/15)
(59/15 13/9 52/15 14/3 59/15)÷1x
(59/15 13/9 52/15 14/3 59/15)
5.13/9.52/15.14/3.59/15>1z2
SEMINAR RAD AUTO PAR 4/9

```

Wieder werden die Koordinaten der projizierten Punkte berechnet und die Schnittfigur dargestellt.

```

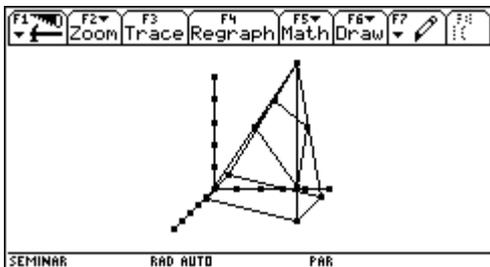
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
-1/2√2 · 1x2 + 1y2 ÷ plx2
{43/15 - 4√2/5 44/9 - 11√2/12 71/15 - 9/2}
-1/2√2 · 1x2 + 1z2 ÷ plz2
{59/15 - 4√2/5 13/9 - 11√2/12 52/15 - 9/2}
-1/(2√2) * 1x2 + 1z2 ÷ plz2
SEMINAR RAD AUTO PAR 11/30

```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
-1/2√2
{43/15 - 4√2/5 44/9 - 11√2/12 71/15 - 9/2}
-1/2√2 · 1x2 + 1z2 ÷ plz2
{59/15 - 4√2/5 13/9 - 11√2/12 52/15 - 9/2}
NewPlot 2,2,plx2,ply2,,,4 Done
newplot 2,2,plx2,ply2,,,4
SEMINAR RAD AUTO PAR 12/30

```



```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
NewPlot 2,2,PIX2,PIY2,,,4 Done
(10 0 0 10) ÷ 1x3 (10 0 0 10)
(0 10 0 0) ÷ 1y3 (0 10 0 0)
(0 0 10 0) ÷ 1z3 (0 0 10 0)
-1/2√2 · 1x3 + 1y3 ÷ plx3
{-5√2/2 10 0 -5√2/2}
-1/(2√2) * 1x3 + 1y3 ÷ plx3
SEMINAR RAD AUTO PAR 16/30

```

Man kann die Figur auch noch durch das Spurdreieck der Ebene egränzen.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
-1/2√2
{-5√2/2 10 0 -5√2/2}
-1/2√2 · 1x3 + 1z3 ÷ plz3
{-5√2/2 0 10 -5√2/2}
NewPlot 3,2,plx3,ply3,,,4 Done
newplot 3,2,plx3,ply3,,,4
SEMINAR RAD AUTO PAR 18/30

```

