Mathematik und Physik fächerübergreifend unterrichten

Funktionen sind mehr als nur Zuordnungen

$$x \mapsto y$$

<table>
<tr><th colspan="2">Themenbereich</th></tr>
<tr><td colspan="2">Skriptum zur Lehrerfortbildung im Umgang mit dem TI92 und dem CBR
und seinem Einsatz im fächerübergreifenden Unterricht</td></tr>
<tr><th>Inhalte</th><th>Ziele</th></tr>
<tr><td>• Anwendungsaufgaben – mit Schwerpunkt 5. und 6. Klasse M und Ph und Funktionenlehre
• Modellbilden mit Hilfe des TI92
• Messen und Auswerten mit dem CBR
• Arbeitsblätter
• Übungsaufgaben</td><td>• Kennenlernen der Einsatzmöglichkeiten des TI92 und des CBR im Unterricht zum Experimentieren, Modellieren, Analysieren und Veranschaulichen
• Einblicke bekommen, wie sich die Unterrichtssituation durch den Einsatz dieser neuen Technologien verändert hat</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diese exemplarischen Betrachtungen sind aus der eigenen Unterrichtsarbeit entstanden und sollen als Anregung und Ausgangspunkte für eigene Reflexionen und Planungen dienen und aufzeigen, dass das Arbeiten mit Funktionen durch anwendungsorientierte Fragestellungen und fächerübergeifende Betrachtungen bereichert wird. Durch diese Arbeitsweise wurden oft die Grenzen zwischen Physik-, Informatik- und Mathematikunterricht verwischt.</td></tr>
</table>

INHALTSVERZEICHNIS

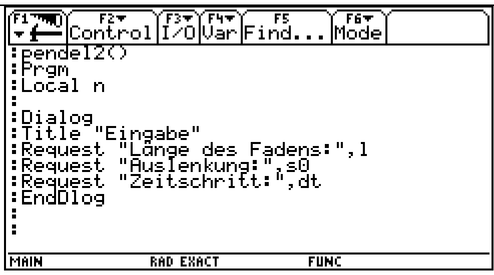
1. Schwingungen

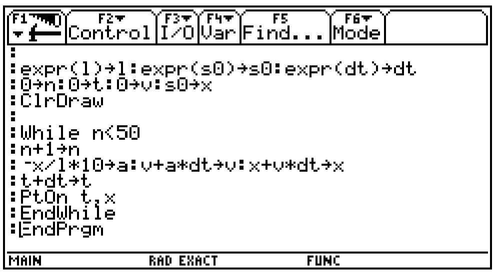
1.1 Modellieren – experimentieren – veranschaulichen – analysieren – am Beispiel Fadenpendel

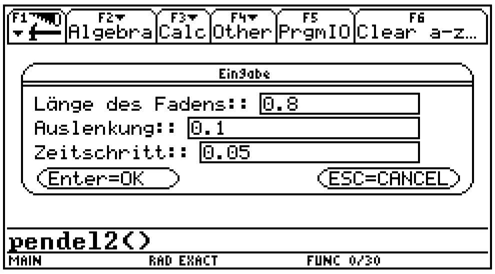
Eine Masse, die an einem praktisch gewichtslosen Faden hängt, schwingt fast genau harmonisch, wenn der Winkel mit der Ruhelage klein bleibt. Dann ist nämlich die rücktreibende Kraft proportional zur Entfernung von der Ruhelage, also eine lineare Funktion dieser Entfernung. Am Pendelkörper mit der Masse m greift das Gewicht F = m · g an.
Wir zerlegen diese Kraft in zwei Komponenten parallel und senkrecht zur Fadenrichtung; die parallele Komponente F_p ruft die Fadenspannung hervor und die senkrechte Komponente F_n wirkt als rücktreibende Kraft und zieht das Pendel in seine Gleichgewichtslage zurück.

Es gilt: $F_n = m \cdot g \cdot \sin\varphi = m \cdot g \cdot \frac{x}{l} = k \cdot x$ (Für kleine Elongationen ist der Unterschied zwischen der Strecke x und dem zugehörigen Bogenstück s vernachlässigbar klein; das Pendel schwingt also annähernd harmonisch mit der Bewegungsgleichung:

$m \cdot a_x = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x$ oder $a_x = -\frac{g}{l} \cdot x$, die mit Hilfe des TI92 gelöst werden soll.

<table>
<tr><td colspan="2">Mit Hilfe des Programms PENDEL2() wird die Schwingung des Fadenpendels am TI92 simuliert und veranschaulicht und analysiert</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Eingabewerte sind:

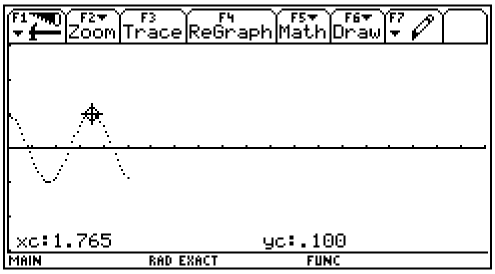
✓ die Pendellänge
✓ die Anfangsauslenkung und
✓ der Zeitschritt</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Aus der Auslenkung wird die Beschleungung ermittelt; diese beeinflusst die Geschwindigkeit und damit ändert sich der Ort des Pendelkörpers, wodurch letztlich wieder die Beschleunigung verändert wird, usw.
Die einzelnen Datenpunkte werden mit PtOn direkt im GRAFIK-Fenster ausgegeben.</td></tr>
</table>



Für die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels mit der Länge l gilt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

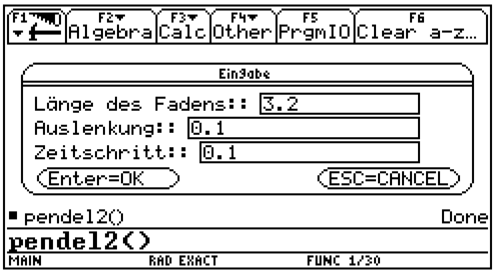
Mit unseren Angaben ergibt sich eine berechnete Schwingungsdauer von 1,8 Sekunden.

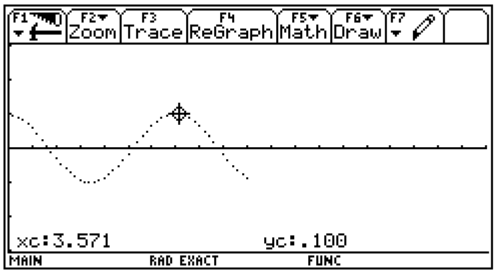


Wir erkennen an der Übereinstimmung der Schwingungsdauer (Rechnung und Simulation), dass unser Pendel im Modell richtig “schwingt” und können damit weitere Analysen und Parameterstudien vornehmen. Der TI92 ermöglicht die gleichzeitige Verfügbarkeit mehrerer Darstellungen.

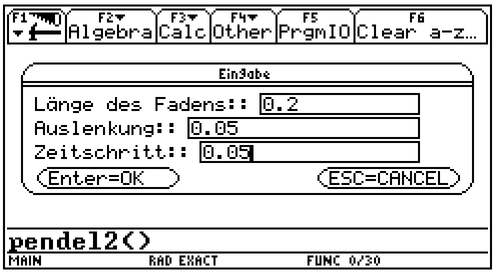
1. Wie hängt die Schwingungsdauer von der Pendellänge ab?

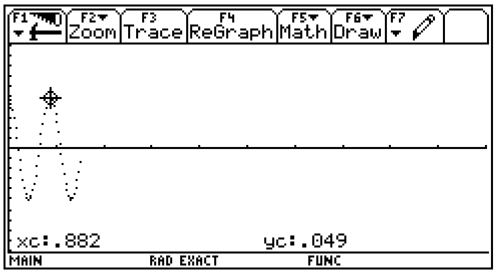
Pendel P_1





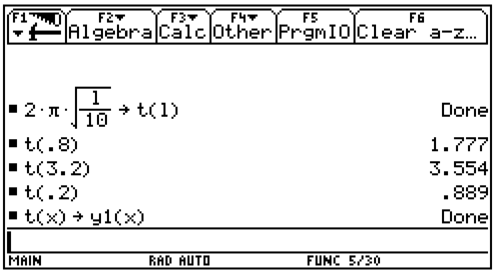
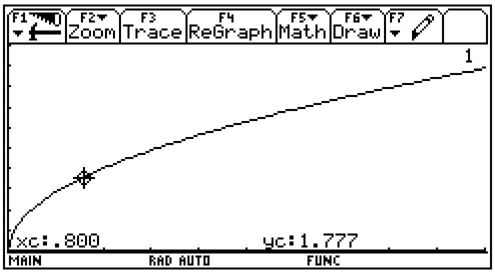
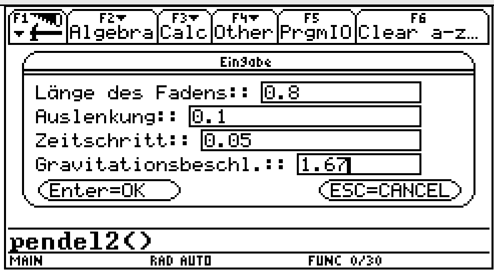
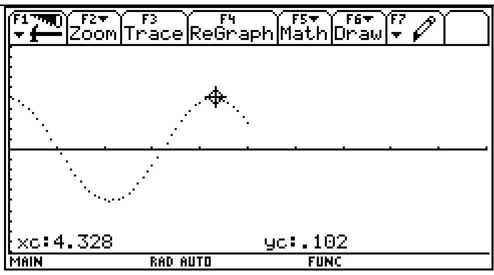
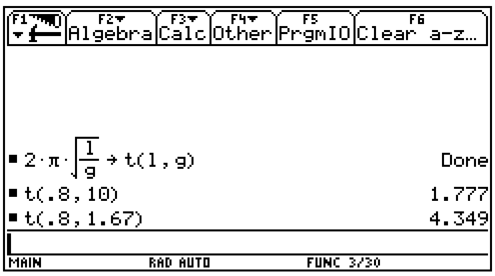
Pendel P_2





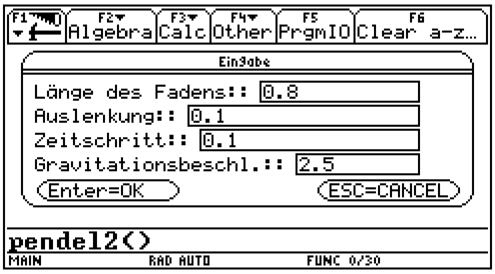
Die Pendellängen von P_1 und P_2 verhalten sich wie (3,2 : 0,2) = **16 : 1** – die daraus resultierenden Schwingungsdauern T_1 und T_2 wie (3,57 : 0,88) = **4 : 1**, d.h. die

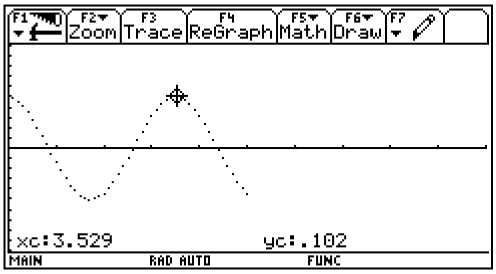
Schwingungsdauer ist proportional zur Wurzel aus der Pendellänge.

Im HOME-SCREEN definieren wir eine Funktion T(l), mit deren Hilfe die Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Pendellänge berechnet werden kann. Diese Funktion ist dann als y1(x) im unten stehenden Diagramm grafisch dargestellt.	
	Mit Hilfe von TRACE (=F3) kann die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Pendellänge noch einmal erfahren und überprüft werden; Ziel ist es auch, durch diese Visualisierungen und Analysen ein vertiefstes Verständnis für Wurzelfunktionen und dem damit bestimmten funktionalen Zusammenhang zu erreichen.
2. *Wie hängt die Schwingungsdauer eines Fadenpendels vom Ort ab?*	
	➢ *Wie groß ist die Schwingungsdauer eines Pendels mit einer Fadenlänge von 0,8 m auf dem Mond?* ➢ *Schwingt es dort langsamer oder schneller?* ➢ *Welche Möglichkeiten haben wir, das herauszufinden?*
	Unser Modellierungsprogramm liefert eine erste Lösung: eine Schwingung dauert dort etwa 4,3 Sekunden, also etwa 2,4 mal so lange wie auf der Erde. ➢ *Wie können wir dieses Resultat überprüfen?*
	Eine Kontrolle im HOME-SCREEN ergibt beim Einsetzen der relevanten Werte in die Funktion T(l,g), die die Abhängigkeit der Schwingungsdauer eines Fadenpendels von der Pendellänge und der Fallbeschleunigung beschreibt, eine Übereinstimung mit den Resultaten aus der Simulation.

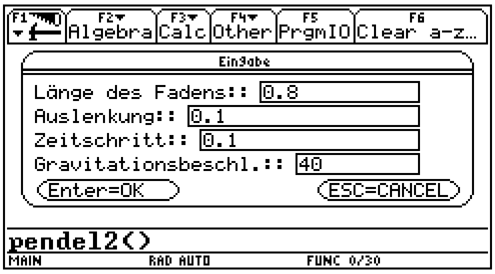
Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Fallbeschleunigung soll nun mehr systematisch untersucht werden; dazu setzen für g einmal 2,5 = ¼ von g_{Erde}(=10) und ein weiteres Mal g = 40 = 4 mal 10.

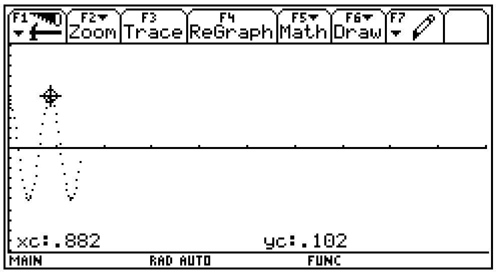
Fall 1





Fall 2

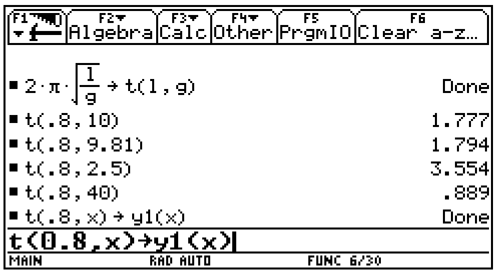


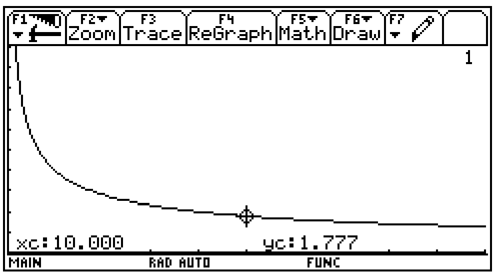


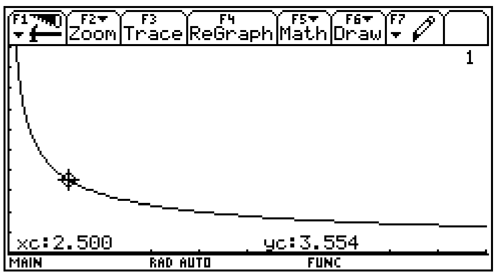
Die Fallbeschleunigungen verhalten sich für den Fall 1 wie 10 : 2,5 = **4 : 1** und für Fall 2 wie 10 : 40 = **1 : 4**; die zugehörigen Schwingungsdauern verhalten sich wie 1,77 : 3,53 = **1 : 2** bzw. 1,77 : 0,88 = **2 : 1**.

Die Schwingungsdauer ist also indirekt proportional zur Wurzel aus der Fallbeschleunigung.

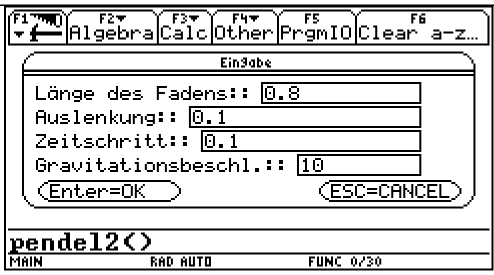
Die Funktion T (l = 0,8 m; g) = y1(x) ergibt für die verwendeten Werte von g die bereits aus der Simulation bekannten Ergebnisse. Die oben beschriebene funktionale Abhängigkeit kann ebenso im GRAFIK-Fenster veranschaulicht werden; eine weitere Möglichkeit wäre die Darstellung der Wertepaare in der Tabelle mit TABLE



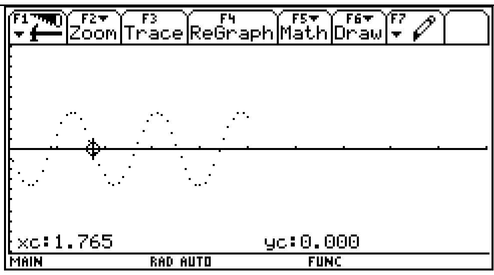


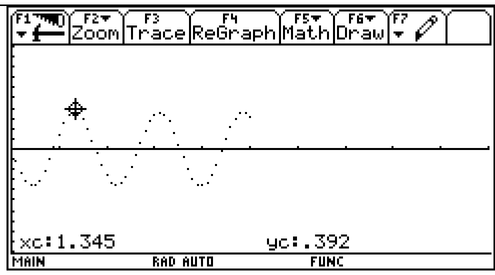


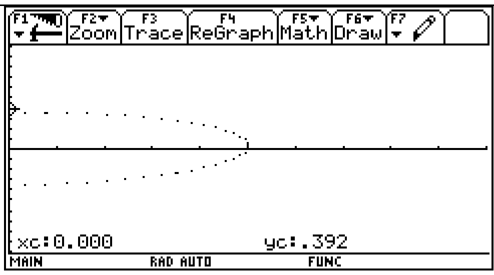
3. Mit welcher "Geschwindigkeit" schwingt der Pendelkörper?

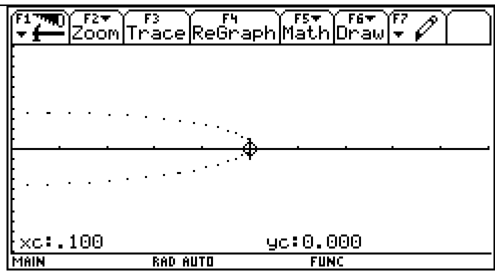


Durch eine einfache Änderung im Programm – PtOn t,v statt PtOn t,x erhalten wir im Grafik-Fenster den zeitlichen Verlauf der horizontalen Geschwindigkeitskomponente angezeigt.

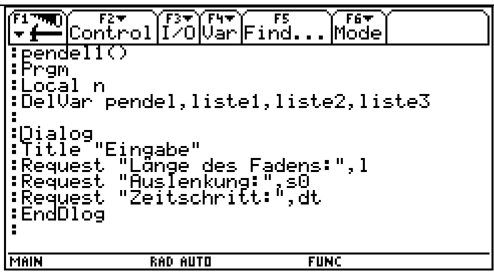


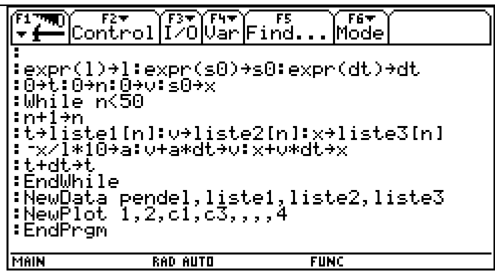


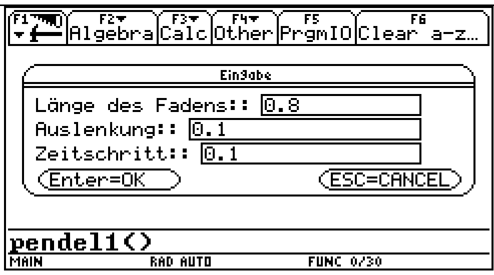




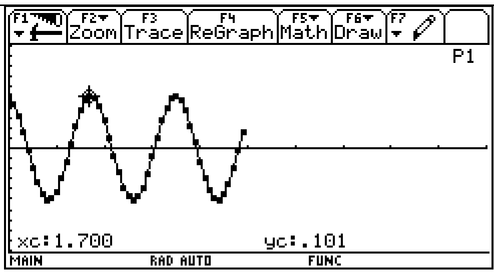
Das Programm PENDEL1() unterscheidet sich sich vom Programm PENDEL2() dadurch, dass die Datenpunkte t,x,und v in Listen abgespeichert werden und zu einem gemeinsamen Datenfile "Pendel" zusammengefasst werden, mit dem den aus dem DATA-MATRIX-Editor verschiedene weitere Berechnungen erfolgen können und grafische Darstellungen definiert werden können



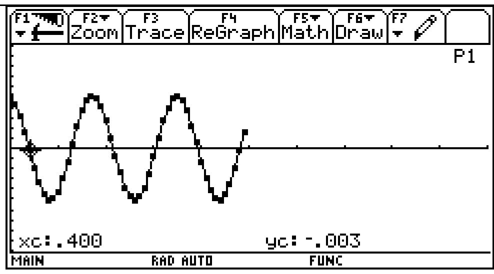




Der definierte Plot (Elongation in Abhängigkeit von der Zeit) kann nun mit ♦GRAPH sofort abgerufen werden – vorher sollten allerdings im WINDOW-Fenster sinnvolle Einstellungen vorgenommen werden! Mit F3 können wir jetzt jeden Datenpunkt einzeln "betrachten".

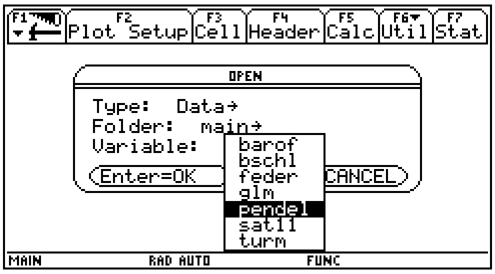


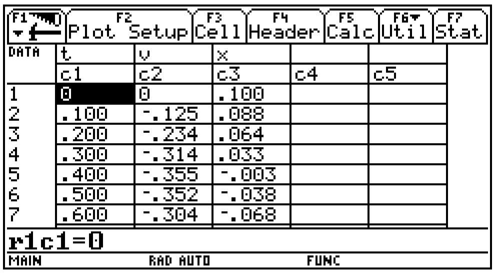
Eine Hin- und Herbewegung (= eine Schwingung) dauert etwa 1,7 Sekunden; die Größe heißt *Schwingungsdauer* T.



Der erste Nulldurchgang findet nach etwa 0,4 Sekunden, das ist ca. ein Viertel der Schwingungsdauer, statt.

Im DATA-MATRIX-Editor stehen dann noch die drei im Programm definierten Listen für die Zeit, die "Geschwindigkeit" und die horizontale Auslenkung gleichzeitig zur Verfügung. Es können dann auch daraus einzelne "Plots" definiert werden:
z.B. t-x-, t-v- bzw. x-v-Diagramme

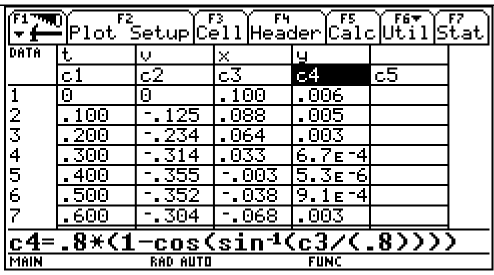




DATA	t	v	x		
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0	0	.100		
2	.100	-.125	.088		
3	.200	-.234	.064		
4	.300	-.314	.033		
5	.400	-.355	-.003		
6	.500	-.352	-.038		
7	.600	-.304	-.068		

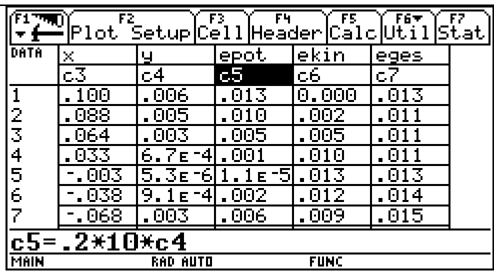
r1c1=0

Es könnte aber auch die Güte des Programms mit Hilfe der Energieerhaltung getestet werden, indem man z.B. in c4 die vertikale Auslenkung, in c5 die potentielle Energie, in c6 die kinetische Energie und in c7 die Gesamtenergie berechnet und überprüft, ob die Gesamtenergie erhalten ist.



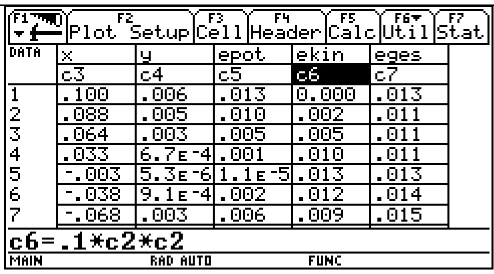
DATA	t	v	x	y	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0	0	.100	.006	
2	.100	-.125	.088	.005	
3	.200	-.234	.064	.003	
4	.300	-.314	.033	6.7E-4	
5	.400	-.355	-.003	5.3E-6	
6	.500	-.352	-.038	9.1E-4	
7	.600	-.304	-.068	.003	

c4=.8*(1-cos(sin^{-1}(c3/(.8))))



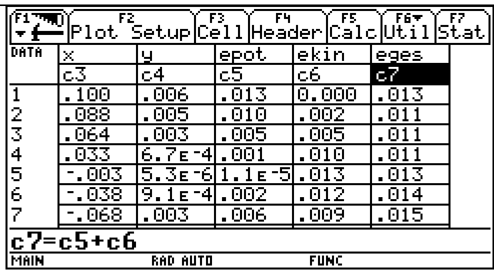
DATA	x	y	epot	ekin	eges
	c3	c4	c5	c6	c7
1	.100	.006	.013	0.000	.013
2	.088	.005	.010	.002	.011
3	.064	.003	.005	.005	.011
4	.033	6.7E-4	.001	.010	.011
5	-.003	5.3E-6	1.1E-5	.013	.013
6	-.038	9.1E-4	.002	.012	.014
7	-.068	.003	.006	.009	.015

c5=.2*10*c4



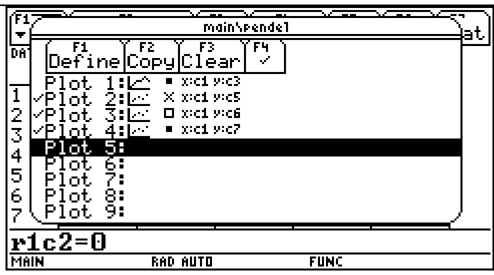
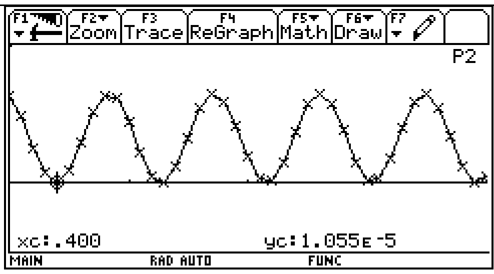
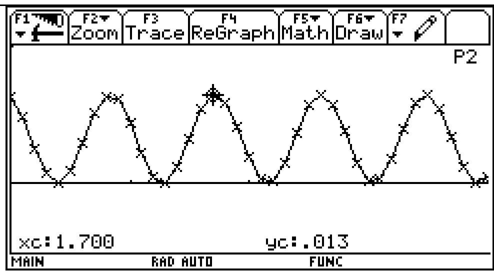
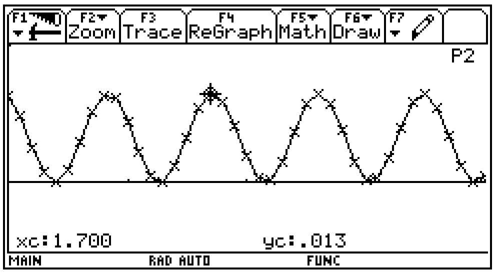
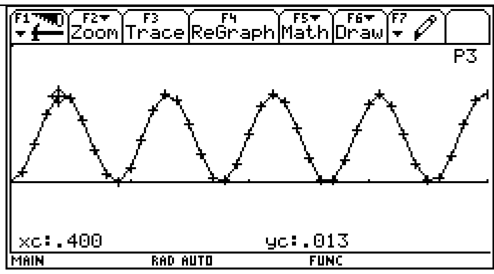
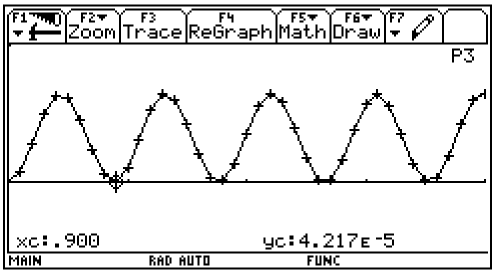
DATA	x	y	epot	ekin	eges
	c3	c4	c5	c6	c7
1	.100	.006	.013	0.000	.013
2	.088	.005	.010	.002	.011
3	.064	.003	.005	.005	.011
4	.033	6.7E-4	.001	.010	.011
5	-.003	5.3E-6	1.1E-5	.013	.013
6	-.038	9.1E-4	.002	.012	.014
7	-.068	.003	.006	.009	.015

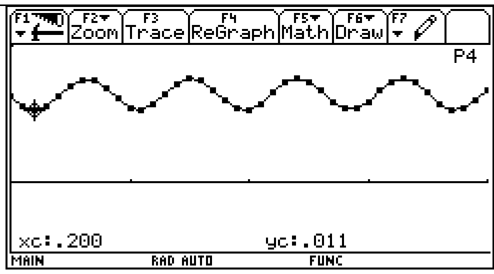
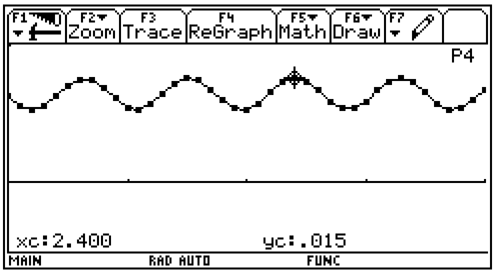
c6=.1*c2*c2



DATA	x	y	epot	ekin	eges
	c3	c4	c5	c6	c7
1	.100	.006	.013	0.000	.013
2	.088	.005	.010	.002	.011
3	.064	.003	.005	.005	.011
4	.033	6.7E-4	.001	.010	.011
5	-.003	5.3E-6	1.1E-5	.013	.013
6	-.038	9.1E-4	.002	.012	.014
7	-.068	.003	.006	.009	.015

c7=c5+c6

Mit F2/ PLOT SETUP und DEFINE werden jetzt weitere drei “PLOTS” (für die zeitliche Entwicklung der potentiellen Energie, der kinetischen Energie und der Gesamtenergie) definiert, um die Güte der Simulation zu testen.	
 Die potentielle Energie hat im Nulldurchgang ihr Minimum und ihr Maximum nach einer halben Periode, d.h. bei maximaler Elongation	 
Die kinetische Energie (wobei hier nur die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit berücksichtigt ist, was für kleine Auslenkungen zulässig ist), zeigt einen Verlauf, der um eine Viertelperoiode gegenüber der potentiellen Energie verschoben ist: Sie ist maximal beim Durchgang durch die Ruhelage und minimal jeweils eine Viertelperiode vorher und nachher, also in den Umkehrpunkten.	 

Die Gesamtenergie ist bei unserer Simulation nicht ganz erhalten; sie weist doch deutliche Schwankungen auf. Die Schwankungsbreite beträgt immerhin etwa 27% vom Maximalwert. Durch Verkleinerung des Zeitschritts lassen sich diese Abweichungen noch teilweise reduzieren – durch Berücksichtigung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente zu einem großen Teil; unberücksichtigt bleibt weiterhin die “Ausdehnung des Massenpunktes”.	 

Erweiterungsmöglichkeiten:

- Errechne gleichzeitig zur numerischen Lösung auch die exakte Lösung $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, d.h. versuche durch Variation von x_0 und ω möglichst gute Übereinstimmung zu erreichen.
- Da Bewegungsabläufe – wie wir sie eben modelliert und simuliert haben - in der Natur äußerst selten vorkommen, soll das Programm so erweitert werden, dass ***Reibungskräfte*** (Luftwiderstand und “Lagerreibung”) berücksichtigt werden können. Diese sollen als Kraft der rücktreibenden Kraft entgegenwirken und realistischerweise proportional zur Geschwindigkeit sein.
- Nach Einbau der Reibungskraft sollen mit verschiedenen ***Reibungskonstanten*** Parameterstudien durchgeführt werden und eine Aussage darüber getroffen werden, ob und wie die ***Schwingungsdauer*** beeinflusst wird.
- Weiters sollen Gesetzmäßigkeiten zwischen den einzelnen Amplituden für eine konstante Reibungszahl gefunden werden und herausgefunden werden, nach welcher Funktion der ***Abfall der Amplituden*** erfolgt.
- Das Programm soll dahingehend erweitert werden, dass es möglich ist, dem schwingenden System eine Schwingung “aufzuzwingen”. Das Pendel soll mit einer bestimmten Frequenz ***angestoßen*** werden, d.h. es soll ihm in einer bestimmten Frequenz Energie zugeführt werden. Es muss dabei die Bewegungsgleichung dahingehend modifiziert werden, indem eine äußere Kraft hinzugefügt wird (z.B: $F_a = r_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$). Durch Variation der Frequenz und der Stärke der erzwingenden Schwingung kann der Resonanzfall ermittelt werden und herausgefunden werden, wann als Resultat eine gleichbleibende, d.h. eine “ungestörte” Schwingung herauskommt.

- Wir wollen wissen, wie sich so ein Pendel verhält, wenn der Auslenkungswinkel beliebig groß wird, wie dies etwa bei einer *Schaukel* eintreffen kann.

Eine Schaukel kann sich auch überschlagen, wenn die Geschwindigkeit groß genug ist, um sie über den oberen Totpunkt hinauszuschleudern. Eine derartige Schaukel muss an starren Stangen befestigt werden, sonst würde die an den Fäden oder Seilen hängende Masse bei Winklen, die größer als 90° sind und die Geschwindigkeit nicht ausreicht, die Kreisbahn verlassen, also in unserem Fall abstürzen. Als Systemgrößen sollen der Auslenkungswinkel φ und die Winkelgeschwindigkeit ω gewählt werden. Beide Größen ändern sich ständig; die rücktreibende Kraft hängt vom Winkel φ ab und ändert die Winkelgeschwindigkeit ω.Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ beeinflusst wiederum ω, ω bestimmt die Flussgröße $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi$ verändert wieder φ - es entsteht ein Zyklus.Die rücktreibende Kraft wächst bei Vergrößerung des Winkels φ und verkleinert auf dem Umweg über die Winkelgeschwindigkeit ω wieder den Winkel φ.Durch diese negative Rückkopplung wird das Verhalten des Systems stabilisiert.
Wann aber wird das System instabil?

1.2 Experimentieren mit dem CBR[1] – Erforschen funktionaler Zusammenhänge

1.2.1 Arbeitsweise und Handhabung des CBR

Der CBR ist ein Schall-Bewegungsdetektor, der einen Ultraschallimpuls aussendet und die Zeit misst, bis der Impuls nach Reflexion am nächstgelegenen Objekt wieder zurückkehrt. Der Ultraschallsensor nimmt bis zu 200 Messungen je Sekunde vor; der Messbereich reicht von etwa 0,5 bis 6 Meter.
Wie jeder andere Schall-Bewegungsdetektor misst auch der CBR den Zeitraum zwischen dem Absenden des Ultraschallimpulses und der Ankunft des ersten Echos; allerdings hat der CBR einen eingebauten Mikroprozessor, der beim Sammeln der Daten anhand der Schallgeschwindigkeit[2] die Entfernung des Objekts vom CBR und anschließend die erste und zweite Ableitung der Entfernungsdaten nach der Zeit berechnet. So erhalten wir Geschwindigkeits- und Beschleunigungsinformationen. Diese Messwerte werden in den Listen L1(=Zeit), L2(=Entfernung), L3(=Geschwindigkeit) und L4(=Beschleunigung) gespeichert.

---

[1] **C**alculator – **B**ased - **R**anger

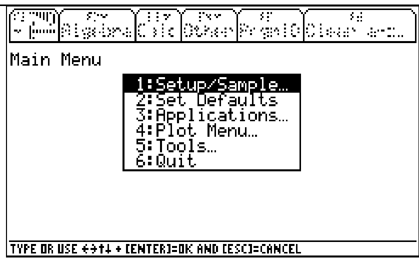
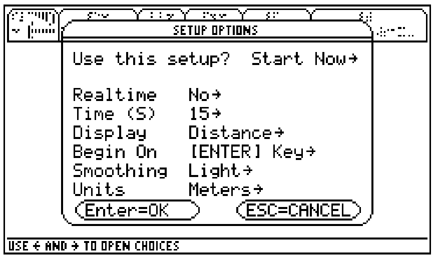
[2] Es wird mit einer nominalen Schallgeschwindigkeit gerechnet; für hochgenaue Messungen kann mit Hilfe eines Programmierbefehls (Siehe Handbuch zum CBR Seite 40-41) die aktuelle Umgebungstemperatur spezifiziert werden.

Es ist eine lehrreiche Übung, die Berechnungen des CBR selbst nachzuvollziehen: an Hand der erfassten Zeiten in L1 und der zugehörigen Entfernungsdaten in L2 lässt sich die Geschwindigkeit des Objekts zu jedem Messzeitpunkt berechnen; anschließend können die selbst berechneten Ergebnisse mit den Geschwindigkeitsdaten in L3 verglichen werden.

$$L3_n = \frac{(L2_{n+1} + L2_n)/2 - ((L2_n + L2_{n-1})/2}{L1_{n+1} - L1_n}$$

Ebenso soll an Hand der Geschwindigkeitsdaten in L3 (oder der selbst berechneten Werte) und der zugehörigen Zeiten in L1 die Beschleunigung des Objekts zu jedem Zeitpunkt ermittelt und mit den Werten in L4 verglichen werden.

Mit Hilfe des CBR und eines grafischen Rechners können ohne aufwendige Messungen und manuelles Auftragen Bewegungsdaten gesammelt und anschließend analysiert werden. So können die funktionalen Zusammenhänge zwischen Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit an Realexperimenten erforscht werden.
Im CBR ist das für die einzelnen TI-Taschenrechner angepasste Programm RANGER enthalten, das in den Taschenrechner übertragen werden kann.

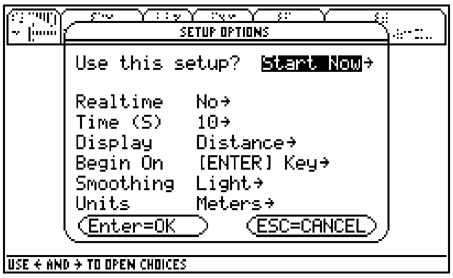
Nach dem Starten des RANGER-Programms wird der Anfangsbildschirm angezeigt, wo die Einstellungen vor der Messung eingesehen und verändert werden können.	
Wird der Eintrag SETUP/SAMPLE gewählt, so wird der Bildschirm SETUP angezeigt; hier muss ENTER gedrückt und START NOW gewählt werden. Nach Einrichten des Experiments wird dann die Messung mit ENTER gestartet.	

Im Modus REALTIME = YES verarbeitet der CBR die gewünschten Daten für das Diagramm (Abstand, Geschwindigkeit oder Beschleunigung) und überträgt diese nach jeder einzelnen Abstandsmessung an den Taschenrechner. RANGER zeichnet dann für diesen Impuls ein einzelnes Pixel.Dadurch ist die maximale Messrate in diesem Modus beschränkt, weil alle diese genannten Operationen vor der nächsten Einzelmessung abgeschlossen sein müssen. Das Messen, Verarbeiten und Übertragen der Daten dauert für einen Datenpunkt ca. 0,08 Sekunden. Da für Operationen wie das Zeichnen des Punktes zusätzliche Zeit benötigt wird, sinkt die effektive Messrate im RANGER auf eine Messung in ca. 0,125 Sekunden. Dieser Modus eignet sich daher nur für langsamere Objekte, wenn man die Ergebnisse bereits bei der Erfassung sehen möchte; allerdings kann nur ein Datentyp(Abstand, Geschwindigkeit oder Beschleunigung) pro Einzelmessung erfasst und grafisch dargestellt werden.
Für schnellere Objekte sollte der Modus REALTIME=NO verwendet werden. In diesem Modus werden die Daten im CBR gespeichert und erst nach vollendeter Messung an den Taschenrechner übertragen. Die Messrate kann für nahe Objekte bis auf eine Messung in 0,005 Sekunden ansteigen. Die Daten können auch gemeinsam genutzt werden, so dass alle Schüler mit den gleichen Daten an der Datenanalyse teilnehmen könnten, da die Daten mit Hilfe des Verbindungskabels und dem Befehl TOOLS/GET CBR DATA auf jedes Gerät, wo das Programm RANGER installiert ist, sehr einfach übertragen werden können.
Nachdem die Daten erhoben und mittels RANGER grafisch dargestellt wurden, kann man ihre Beziehung zu einer Funktion untersuchen (linear, quadratisch, exponentiell, sinusförmig). Da die Daten in Listen gespeichert sind und als statistische Diagramme dargestellt werden, kann man diese Beziehung mittels *TRACE*, *GRAPH, Y=* oder einer entsprechenden *Regression* erforschen. *Innerhalb* des RANGER-Programms kann auch ein interessierender Datenbereich ausgewählt werden und dieser Datensatz durch Glätten manipuliert werden. *Außerhalb* des RANGER-Programms können wir die Daten mit Hilfe des Listen – bzw. Dateneditors des Taschenrechners untersuchen. An die Daten kann mit Hilfe des Y=-EDITORS des Taschenrechners eine Funktion manuell angepasst werden oder mit Hilfe der Regressionsfunktionen des Taschenrechners eine automatische Bestimmung der den Daten am ehesten entsprechenden Gleichung vorgenommen werden.

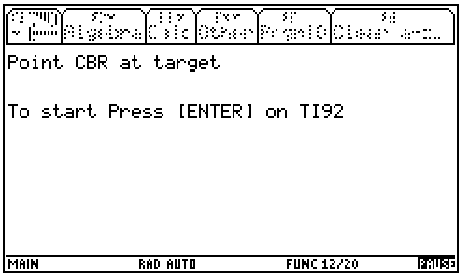
1.2.2 Messungen mit dem CBR (am Beispiel Fadenpendel)

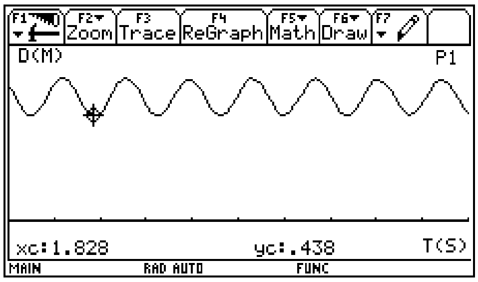
Es sollen Untersuchungen einer einfachen harmonischen Bewegung durch Beobachtung eines frei schwingenden Pendels vorgenommen werden und die Ergebnisse mit den aus Rechnungen und Simulationen erhaltenen Resultaten verglichen werden.

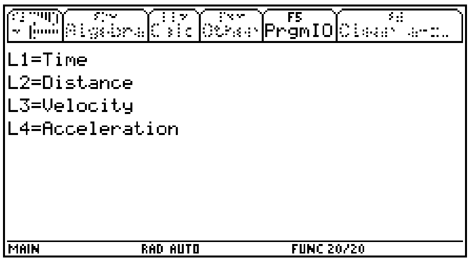
Datenerfassung



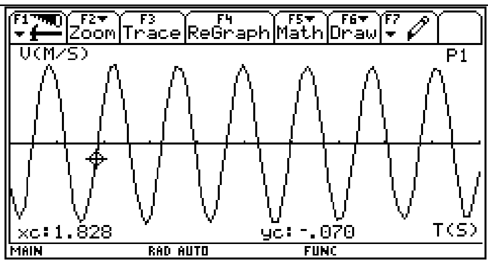
- ✓ Das Pendel muss so aufgebaut und ausgerichtet werden, dass es in direkter Linie mit dem CBR schwingt.
- ✓ Während der Datenerfasssung ist ein klickendes Geräusch zu hören.
- ✓ Nach Ende der Messsequenz zeigt der Taschenrechner automatisch ein Zeit-Entfernungs-Diagramm an.

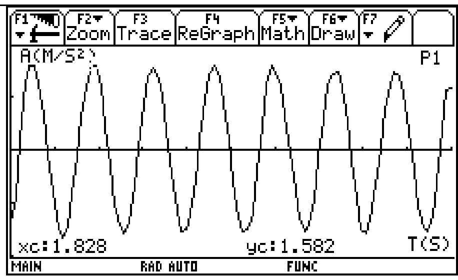


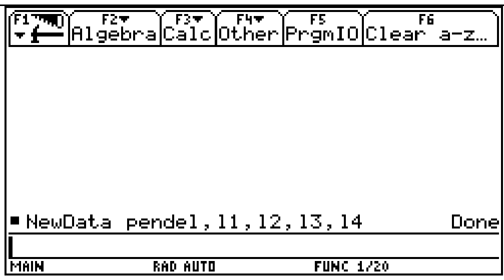


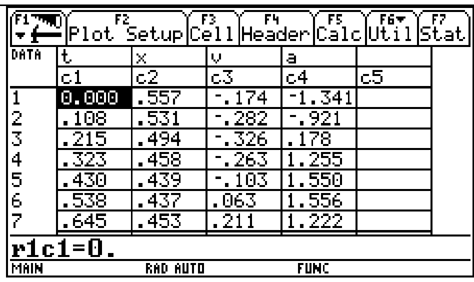


In den Listen L3 und L4 stehen die Daten für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Pendelkörpers bereit; sie können entweder über das RANGER-Programm direkt angezeigt werden oder über den DATA-MATRIX-Editor mit Hilfe entsprechender Definitionen geplottet werden.









Physikalische und mathematische Zusammenhänge

Es kann nun aus diesen Grafen bzw. Daten die Frequenz bzw. die Schwingungsdauer des Pendels ermittelt werden und mit den Ergebnissen der Simulationsrechnungen bzw. durch Berechnen der Schwingungsdauer nach der Formel verglichen werden.
Weiter soll auch nach einem Zusammenhang zwischen den einzelnen Größen x, v und a in Abhängigkeit von der Zeit gesucht werden. Die Ableitungen sinusförmiger Funktionen sind wieder sinusförmig; es soll aber die Phasenbeziehung zwischen Position und Geschwindigkeit des Pendelkörpers beachtet werden.
Das Diagramm von L2 gegen L3, d.h. Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Auslenkung bildet eine Ellipse.

1.3 Arbeitsblatt – Messungen am Fadenpendel mit dem CBR

Datenerfassung	
1. Wie groß ist der Abstand vom CBR zur Ruhepostion und 2. wie weit wirst du das Pendel aus der Ruhelage auslenken?	Abstand $_{\text{CBR-Ruhelage}}$ = ... m Amplitude = ... m
3. Stelle mit Hilfe einer Stoppuhr fest, wie lange 10 Schwingungen dauern und berechne daraus die Schwingungsdauer des Pendels! 4. Welchen Vorteil bringt es, zehn Schwingungen statt nur einer zu stoppen?	*zehn* Schwingungen dauern .... s; *eine* Schwingung dauert .... s. Die Mittelwertbildung über einen .... Zeitraum .... Messfehler!
5. Schätze den während einer Schwingung zurückgelegten Weg!	Während einer Schwingung legt der Pendelkörper etwa .... m zurück.
6. Was fällt dir an der Form des angezeigten Zeit-Entfernungs-Diagramms auf?	Der zeitliche Verlauf der Entfernung ist s.........förmig; d.h. es handelt sich um eine p.................... Funktion.
7. Wie wird die von dir gewählte und gemessene Anfangsauslenkung in diesem Diagramm repräsentiert?	

Untersuchungen	
Ändere im SETUP-Bildschirm die Zeit von 10 auf 5 Sekunden und wiederhole die Messsequenz: 8. Wie ändert sich das Aussehen des Diagramms und warum ändert es sich?	
9. Bestimme an Hand der Datenpunkte in deinem Diagramm die Anzahl vollständiger Zyklen je Sekunde; dieser Messwert wird als Frequenz bezeichnet.	die Frequenz beträgt ....Hz die Schwingungsdauer beträgt .... s; es gilt der Zusammenhang ....
10. Welchen Einfluss hat die Verkürzung des Fadens auf die Periode des Pendels?	je kürzer das Pendel, desto .... die Periode(Schwingungsdauer)
11. Welchen Einfluss hat die Verlängerung des Fadens auf die Periode des Pendels?	je länger das Pendel, desto .... die Periode(Schwingungsdauer)
12. Welche Beziehung besteht zwischen der Amplitude des Pendelschwungs und dem Gesamtweg des Pendels in einer Periode?	Die Amplitude macht etwa ein .... des vom Pendel in einem Zyklus zurückgelegten Weges aus.
13. Vergleiche das Zeit-Entfernungs- mit dem Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm und führe Ähnlichkeiten und Unterschiede auf!	Ähnlichkeiten:.. .... Unterschiede: ....
14. In welcher Position hat der Pendelkörper die größte Geschwindigkeit?	in der ....
15. In welcher Position hat der Pendelkörper die geringste Geschwindigkeit?	wenn der Pendelkörper seine .... Entfernung von der .... hat.
16. Wie beeinflusst eine Änderung der Masse des Pendelkörpers das Diagramm?	...., weil die Schwingungsdauer T nur von .... und .... abhängt.
17. Wie beeinflusst eine Änderung der Anfangsauslenkung das Zeit-Entfernungs-Diagramm?	
18. Wie beeinflusst eine Änderung der Anfangsauslenkung das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm?	
19. Wie beeinflusst eine Änderung der Anfangsauslenkung das Zeit-Beschleunigungs-Diagramm?	

Modellierungen	
1. Bilde das Abstand-Zeit-Verhalten des Pendels mit Hilfe deines TI92 und der Formel für eine sinusförmige Funktion **x(t) = A · sin (ω· t + φ)** nach, wobei x(t) die aktuelle Position, A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz, φ den Phasenwinkel und t die Zeit bezeichnet; die Kreisfrequenz ergibt sich folgendermaßen aus der Periode T : $\omega = \frac{2\pi}{T}$	x(t) = ... · sin (........ · t + ...)
2. Gib diese Gleichung mit den berechneten Werten für A, ω und φ in den Y=-EDITOR ein und stelle diese Funktion und das statistische Diagramm von L1(Zeit) gegen L2(Abstand) simultan dar.	Ändere die Werte für A, ω und φ, bis du eine gute Übereinstimmung erhältst. Wenn dir ein TI-83 oder TI-86 zur Verfügung steht, kannst du zur Bestimmung dieser Werte auch eine sinusartige Regression verwenden.
3. Untersuche das Verhältnis zwischen Position und Geschwindigkeit, indem du L2(Abstand) gegen L3(Geschwindigkeit) grafisch darstellst. 4. Welches Aussehen erwartest du von dem sich ergebenden Diagramm? 5. Vergleiche das tatsächliche Ergebnis mit deinen Erwartungen!	
Versuche auch das Geschwindigkeit-Zeit-Verhalten und das Beschleunigungs-Zeit-Verhalten mit deinem TI92 nachzubilden, indem du folgende Formeln verwendest: $v(t) = -\omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ und $a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$	v(t) = ... a(t) = ...

Die Auslenkung eines schwingenden Körpers als Funktion der Zeit ist folgendermaßen gegeben

$$\mathbf{x(t) = 0{,}7 + 3 \cdot \cos(5 \cdot t)}$$

(Zeiten in Sekunden, Längen in Meter)

Finde die Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers für die Zeit t=2s, indem du die Momentangeschwindigkeit mit Hilfe des Differenzenquotienten $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ermittelst und ebenso analog die Momentanbeschleunigung! Vergleiche anschließend deine Resultate mit den Werten, die du beim Einsetzen in die oben angegebenen Formeln erhältst.

x(2s) = ... m , v(2s) = ... m/s und a(2s) = ... m/s²

1.4 Arbeitsblatt – Arbeitsaufgaben zum Faden- und zum Federpendel

Zur Bearbeitung der folgenden Fragestellungen stehen dir zur Verfügung:

- ✓ die Programme PENDEL1() und PENDEL2() am TI92
- ✓ verschiedene Feder- und Fadenpendel, Stoppuhr, Metermaß, Balken- und Federwaage
- ✓ das CBR mit dem Programm RANGER
- ✓ dein TI92
- ✓ dein Physikbuch und dein Physikheft (dort sollst du auch deine Ergebnisse festhalten!)

1. ***Adaptiere*** die Programme PENDEL1() und PENDEL2() derart, dass du damit das Schwingungsverhalten eines Federpendels modellieren bzw. simulieren kannst:
   Eingaben: Anfangsauslenkung, Federkonstante, Reibungskonstante, Zeitschritt, Masse

2. Bestimme die ***Federkonstante*** der vorhandenen Federn durch eine Messreihe und Auswertung der Daten mit dem DATA-MATRIX-Editor und der linearen Regressionsfunktion deines TI92. Belaste dazu die Federn der Reihe nach mit verschiedenen Massestücken und lies die Dehnung der Feder ab; trage die Wertepaare in eine Tabelle ein und ermittle mit Hilfe des TI92 die entsprechenden Ausgleichsgeraden. Überlege dir, wie du aus der Geradengleichung auf die Federkonstante schließen kannst.

Feder 1 - Federkonstante k_1 = ... N/m								
Belastung (in g)	0	10	30	50	70	80	90	100
Länge (in cm)								
Feder 2 - Federkonstante k_2= .... N/m								
Belastung (in g)	0	40	50	70	90	100	150	200
Länge (in cm)								

Feder 3 - Federkonstante k_3 = ... N/m								
Belastung (in g)	0	10	20	30	40	50	60	70
Länge (in cm)								

3. Bestimme die Massen der vorhandenen Pendelkörper

m_1 = ... kg, m_2 = ...kg und m_3 = ... kg

und analysiere mit den experimentell ermittelten Federkonstanten und den drei vorhandenen Pendelkörpern mit deinen adaptierten Simulationsprogrammen das Schwingungsverhalten aller drei Federn, indem du die Schwingungsdauer grafisch ermittelst.

Kombination	k_1/m_1	k_1/m_2	k_1/m_3	k_2/m_1	k_2/m_2	k_2/m_3	k_3/m_1	k_3/m_2	k_3/m_3
Schwingungs-dauer T(s)									

4. Errechne gleichzeitig zu den numerischen Lösungen die exakte Lösung $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ und versuche durch Variation von x_0 und ω möglichst gute Übereinstimmung zu erreichen. Trage zu den einzelnen Feder/Masse-Kombinationen in der folgenden Tabelle die Werte für ω , ω^2 und Federkonstante durch Masse ein und überprüfe den bereits bekannten Zusammenhang dieser Größen

Kombination	k_1/m_1	k_1/m_2	k_1/m_3	k_2/m_1	k_2/m_2	k_2/m_3	k_3/m_1	k_3/m_2	k_3/m_3
ω									
ω^2									
k/m									

5. Führe die entsprechenden realen Experimente zu den in den Aufgaben 3 und 4 simulierten Federschwingern aus und versuche vorerst mit der Stoppuhr die jeweilige Schwingungsdauer zu bestimmen. Untersuche auch, ob sich die Schwingungsdauer ändert, wenn du die Anfangsauslenkung variierst!

....

6. Stelle fest, ob und wie sich die Maximalgeschwindigkeit des Federpendels mit der Anfangsauslenkung x_0 ändert! Führe dazu entsprechende Simulationsrechnungen durch und definiere Zeit- Geschwindigkeits- Plots, aus denen du dann grafisch die relevanten Daten ermitteln kannst!

....

Kombination	k_1/m_1	k_1/m_2	k_1/m_3	k_2/m_1	k_2/m_2	k_2/m_3	k_3/m_1	k_3/m_2	k_3/m_3
ω									
x_0 (in m)									
$\omega \cdot x_0$									
v (in m/s)									

7. Baue in dein Simulationsprogramm die Reibungskraft ein und versuche durch Variation der Reibungskonstante das Schwingungsverhalten des Federpendels so nachzubilden, wie du es im Realexperiment erlebst. Versuche auch eine Gesetzmäßigkeit zwischen den einzelnen Amplituden zu finden, indem du das Verhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden Amplituden x_0, x_1, x_2 ,... bildest.

Kombination	k_1/m_1	k_1/m_2	k_1/m_3	k_2/m_1	k_2/m_2	k_2/m_3	k_3/m_1	k_3/m_2	k_3/m_3
x_0/x_1									
x_1/x_2									

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender maximaler Auslenkungen ist immer ....; die Amplituden bilden eine .... Folge und der Abfall der Amplituden geht nach einer .... $x_n(t) = x_0 \cdot e^{-\lambda.t}$.

Errechne parallel zum Programm diese (einhüllende) Funktion und versuche durch Variieren der Konstante λ eine möglichst gute Übereinstimmung zu erhalten. Kannst du eine Relation zwischen λ und den Systemparametern Masse, Federkonstante und Reibungskonstante erkennen?

Masse m	***Federkonstante k***	***Reibungskonstante c***	λ
m = ... kg	k = ... N/m	c = ... kg/s	
2m = ... kg	k = ... N/m	c = ... kg/s	
m = ... kg	2k = ... N/m	c = ... kg/s	
m = ... kg	k = ... N/m	2c = ... kg/s	
2m = ... kg	k = ... N/m	2c = ... kg/s	

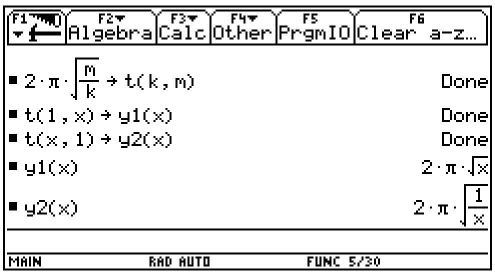
Der Parameter λ hängt nur von .... und .... ab, mittels $\lambda = \frac{\ldots\ldots}{2\cdot\ldots\ldots}$

8. Überprüfe nun deine bisherigen Berechnungen und Modellierungen durch Messung und Auswertung mit dem ***CBR***!

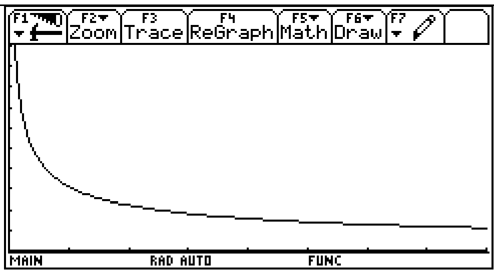
9. Welche ***funktionalen Abhängigkeiten*** bestehen für die Schwingungsdauer eines Federpendels und wie lauten sie? Wovon hängt die Schwingungsdauer eines Federpendels nicht ab? Hängt die Schwingungsdauer von der Reibungskonstante ab?

Die Schwingungsdauer eines Federpendels hängt von der .... und der ....-..................... ab. Mit größerer Reibungskonstante λ wird die Schwingungsdauer T .... Die Schwingungsdauer ist nicht abhängig von der ....

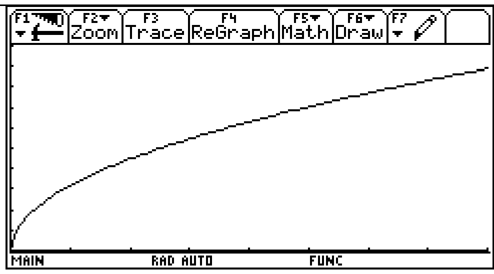
- *Welche Funktion gehört zu welchem Grafen?*



Im HOME-SCREEN siehst du die Formel für die Schwingungsdauer eines Federpendels und daraus wurden die beiden Funktionen y1(x), wobei x für die Masse des Pendelkörpers steht und y2(x) mit x als Federkonstante definiert. Diese Funktionen sind in den beiden nächsten Schaubilden grafisch dargestellt.



Hier wird die Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der .... veranschaulicht; Schwingungsdauer und .... aus der .... sind zueinander .... proportional.



Hier wird die Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der .... veranschaulicht; Schwingungsdauer und .... aus der .... sind zueinander .... proportional.

10. Vervollständige die folgende Tabelle und überprüfe noch einmal die ermittelten funktionalen Zusammenhänge!

m (in kg)	1	0,5	0,25	2	1	0,5	0,25	2	1
k(in N/m)	1	1	1	1	4	4	4	4	9
T(in s)									

11. Mit einem Fadenpendel kann man verhältnismäßig leicht die örtliche Fallbeschleunigung ermitteln. Das Pendel schwingt umso rascher, je .... die Fallbeschleunigung ist.

12. Welche Schwingungsdauer hat ein Fadenpendel mit der Pendellänge 1 m an den Polen der Erde, am Erdäquator und in Mitteleuropa?

am Erdäqutor	g = 9,83 m/s²	T = ... s
an den Polen	g = 9,78 m/s²	T = ... s
in Mitteleuropa	g = 9,81 m/s²	T = ... s

13. Wie schnell würde dieses Pendel an den Oberflächen der anderen Planeten unseres Sonnensystems bzw. auf der Sonne selbst schwingen? Berechne die Schwingungsdauer, indem du aus deinem Physikbuch die notwendigen Daten zur Berechnung der jeweiligen Fallbeschleunigung entnimmst, und vielleicht im DATA-MATRIX-Editor arbeitest! Für die Fallbeschleunigung auf der Oberfläche eines Planeten gilt $g = \gamma \cdot \frac{M}{r^2}$ mit γ = 6,67E-11 als Gravitationskonstante, M als Masse des Planeten in kg und r als Planetenradius in m.

Planet	Masse	Radius	Fallbeschleunigung	Schwingungsdauer
Merkur				
Venus				
Erde				
Mars				
Jupiter				
Saturn				
Uranus				
Neptun				
Pluto				
Sonne				

1.5 Arbeitsblatt (Schwingungen und allgemeine Sinusfunktion)

Ein punktförmiger Körper bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius r. Zum Zeitpunkt t = 0 befindet er sich in P_0 (r/0), zum Zeitpunkt t in P_t (r · cos(φ(t)) / r · sin(φ(t))), wobei φ(t) das Bogenmaß der bis zum Zeitpunkt t durchgeführten Drehbewegung ist. Es gilt φ(t) = ω · t ; die Konstante ω heißt Winkelgeschwindigkeit.
Wird der Körper beleuchtet, so beschreibt der Schattenpunkt S_t auf einem normal zu den Lichtstrahlen aufgestelltem Schirm eine Schwingung um die „Ruhelage", wie bei einer schwingenden Schraubenfeder.

- **y(t) = r · sin(φ(t))** heißt ***Elongation*** und gibt den Abstand von der Ruhelage an;
- die maximale Elongation heißt ***Amplitude*** der Schwingung.
- ***T*** ist die ***Umlaufszeit*** der Kreisbewegung bzw. die ***Schwingungsdauer*** der Schwingung.
- Die Zahl der Umläufe pro Sekunde heißt ***Drehzahl***; die Zahl der vollen Schwingungen pro Sekunde heißt ***Frequenz*** der Schwingung.

Es gilt: $f = \frac{1}{T}$ und ω = 2πf ; die Winkelgeschwindigkeit ist also das 2π-fache der Frequenz und heißt auch Kreisfrequenz der Schwingung.

Eine Schwingung habe die Amplitude r = 2 m und die Frequenz f = 10 s^{-1}.

- *Stelle eine Formel für die Elongation auf und berechne die angegebenen Elongationen sowie die Schwingungsdauer!*

y(t) =

T = s

y(1)	y(0,01)	y(0,04)	y(1,01)	y(1,4)	y(2)

<table>
<tr><td rowspan="2">Bestimme mit Hilfe des TI92 die Momentangeschwindigkeiten der oben definierten Schwingung näherungsweise mit Hilfe des Differenzenquotienten!</td><td>v(1)</td><td>v(0,01)</td><td>v(0,04)</td><td>v(1,01)</td><td>v(1,4)</td><td>v(2)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Eine Schwingung habe die Elongation
$y(t) = 5 \cdot \sin(2t)$.
➢ Gib die Amplitude r, die Kreisfrequenz ω, die Frequenz f und die Schwingungsdauer T an!</td><td colspan="6">r =
ω =
f =
T =</td></tr>
<tr><td>Für eine Schwingung gilt :
$y(t) = ½ \sin(½ \cdot t)$.
➢ Zu welchen Zeiten ist die Elongation Null, zu welchen Zeiten maximal, wann minimal?</td><td colspan="6">$t_{y=0}$ =
$t_{y=max}$ =
$t_{y=min}$ =</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ein „punktförmig kleiner“ Körper bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt O. Er befindet sich zum Zeitpunkt t in $P_t(x_1/x_2)$.
(1) Stelle Formeln für x_1 und x_2 auf, wenn der Körper im Punkt (0/2) startet!
➢ Stelle Formeln für x_1 und x_2 auf, wenn sich der Körper zum Zeitpunkt t = 3 im Punkt (0/2) befindet!</td><td colspan="6">(1)
$x_1 (t)$ =
$x_2 (t)$ =</td></tr>
<tr><td colspan="6">(2)
$x_1 (t)$ =
$x_2 (t)$ =</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Stelle eine Formel für die Elongation y(t) einer allgemeinen Sinusschwingung mit der Amplitude r, der Schwingungsdauer T und der Phasenverschiebung α/ω gegenüber der Grundschwingung auf!
(1) r = 7; T = 4; α/ω = 0
(2) r = 1; T = 10; α/ω = π
(3) r = 10; T = 2; α/ω = - 5/4
(4) r = 2; T = 8; α/ω = 7/2</td><td colspan="6">(1)
y(t) =</td></tr>
<tr><td colspan="6">(2)
y(t) =</td></tr>
<tr><td colspan="6">(3)
y(t) =</td></tr>
<tr><td colspan="6">(4)
y(t) =</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6">Eine Schwingung hat die Elongation
(1) $y(t) = 1/5 \cdot \sin(8t + \pi/6)$
(2) $y(t) = 3 \cdot \sin(60\pi \cdot t - \pi)$. Berechne
➢ die Amplitude,
➢ die Schwingungsdauer und
➢ die Phasenverschiebung α
gegenüber der Grundschwingung!</td><td>r_1</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>T_1</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>α_1</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>r_2</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>T_2</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>α_2</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">➢ Zu welchen Zeiten ist der Körper in der Ruhelage, zu welchen Zeiten ist er von der Ruhelage am weitesten entfernt?</td><td>(1)</td><td>$t_{y=0}=$</td><td>$t_{y=max}=$</td><td>$t_{y=min}=$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$t_{y=0}=$</td><td>$t_{y=max}=$</td><td>$t_{y=min}=$</td></tr>
</table>

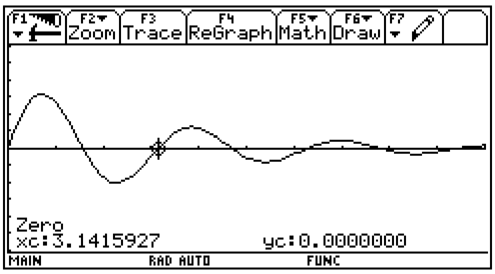
1.6 Gedämpfte Schwingungen – Überlagerungen von harmonischen Schwingungen mit einer Exponentialfunktion

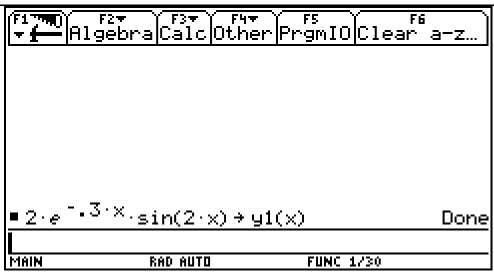
Gedämpfte Schwingungen werden durch eine Funktionsgleichung der Gestalt

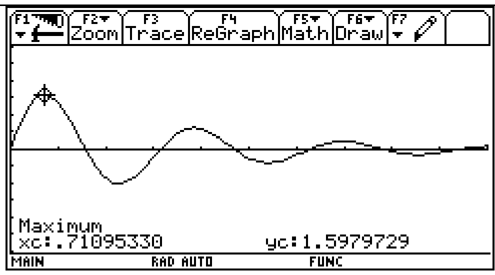
f: $y = y_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ beschrieben.

Der Term $y = y_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ gibt dabei die Abnahme der Anfangsamplitude y_0 mit der Zeit t an; der positive Parameter k heißt Dämpfungsfaktor.

Die Grafen der Funktionen f_1: $y = y_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ und f_2: $y = -y_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ bilden die sogenannten ***Leitkurven***; sie berühren den Grafen von f in jenen Punkten, für deren Abszisse $\sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) = \pm 1$.

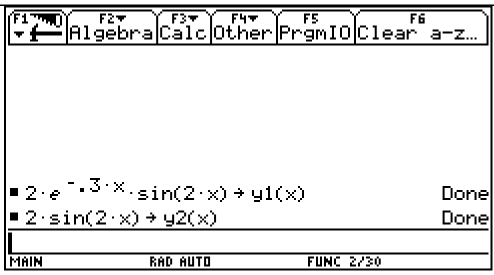
<table>
<tr><td colspan="2">Die Funktion $f: R^+ \mapsto R, y = 2 \cdot e^{-0,3x} \cdot \sin 2x$ beschreibt eine gedämpfte Schwingung.</td></tr>
<tr><td>➢ Ermittle die Schwingungsdauer!
T = ... s
➢ Welche Bedeutung haben die Nullstellen der Funktion in der Physik?
....
➢ Wann ist die Auslenkung maximal und wie groß ist sie dann? (1LE = 1 dm)
....</td><td>
</td></tr>
</table>

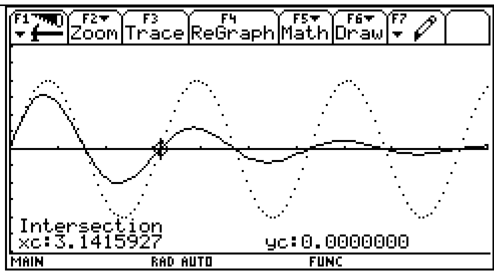




➢ Stelle fest,ob die maximale Amplitude dieser gedämpften Schwingung nach genau einem Viertel der Schwingungsdauer auftritt und interpretiere das Ergebnis!

....





➢ *Was wird durch die Funktion y2(x) eigentlich definiert?*

....

➢ *Stimmen die Abszissen der Hoch- und Tiefpunkte der beiden Funktionen überein?*

.... , weil ....

➢ *Welche Eigenschaften der Sinusfunktion gehen wegen der Exponentialfunktion verloren, welche bleiben erhalten?*	gleich bleiben: .... verloren gehen: ....

Welche physikalische Bedeutung haben die Hochpunkte und Tiefpunkte der Funktion?

....

➢ *Wie viel Zeit vergeht bei einer ungedämpften Schwingung zwischen dem Erreichen zweier aufeinanderfolgender Hoch- bzw. Tiefpunkte und gilt das auch für die vorliegende Funktion?* (Gib eine Erklärung!)

....

....

Welche physikalische Bedeutung haben die Wendepunkte und die Steigungen der Wendetangenten der Funktion?

....

Gibt es hier eine Übereinstimmung zwischen ungedämpfter und gedämpfter Schwingung ?

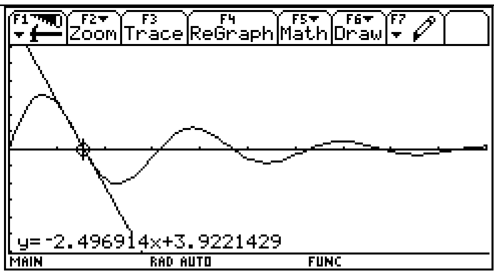
..........., weil ....

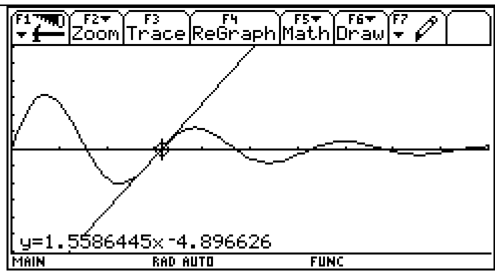
- *Es soll nun die „*Geschwindigkeit*" (in dm/s) der Schwingung zu einem bestimmten Zeitpunkt ermittelt werden:*

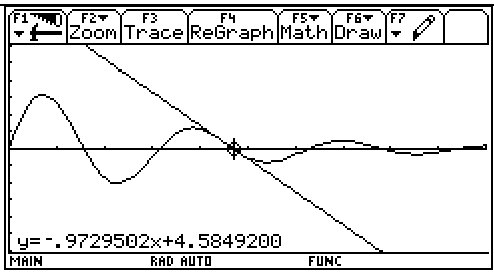
Dazu stehen dir zum jetzigen Zeitpunkt zwei verschiedene Methoden zur Verfügung:

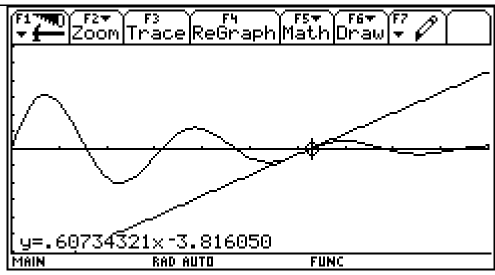
1. Du weißt, dass du aus der „Steilheit" einer Zeit-Weg-Kurve Aussagen über die Geschwindigkeit des bewegten Massenpunktes machen kannst; mit Hilfe des TI92 kannst du nun im GRAFIK-Fenster an den Grafen der Funktion, die diese Schwingung beschreibt, in jedem beliebigen Punkt die Tangente legen(mit F5/TANGENT) und aus deren Steigung die „Geschwindigkeit" ablesen.

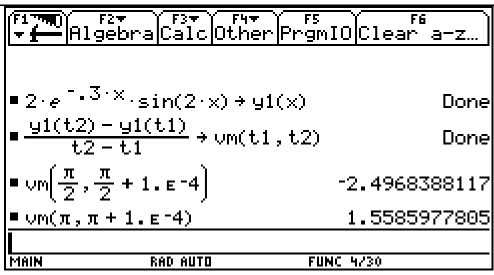
2. Du weißt auch, dass die *Momentangeschwindigkeit* eines Körpers definiert ist als $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$; du kannst also die *mittlere Geschwindigkeit* in einem bestimmten Zeitintervall mit Hilfe des Differenzenquotienten (zurückgelegter Weg durch dafür benötigte Zeit) berechnen und dich durch Verringerung des Zeitintervalls beliebig genau einem bestimmten Zeitpunkt nähern.

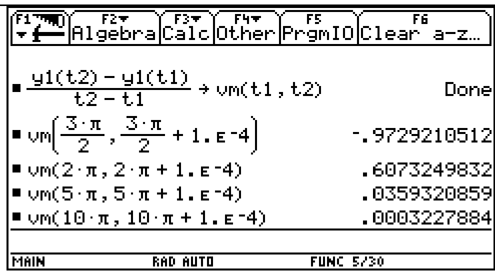












- *Wann kommt die Schwingung praktisch zum Stillstand und woran kannst du das feststellen?*

....

- *Definiere die beiden Leitkurven im Y= - EDITOR , stelle sie im GRAFIK-Fenster dar und ermittle die Berührungspunkte mit dem „Schwingungsgrafen"!*

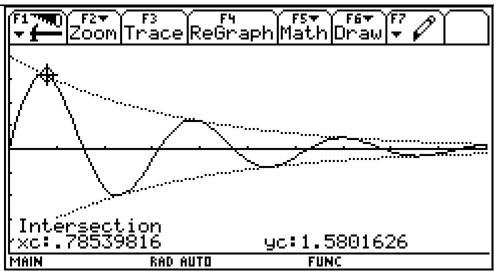
....

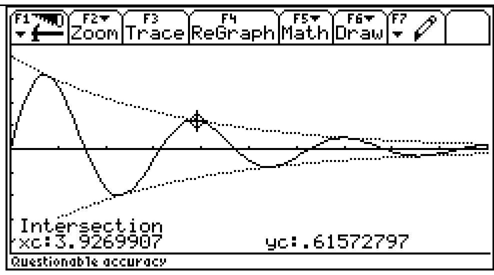
Fallen diese Berührungspunkte mit den Hoch- und Tiefpunkten zusammen?

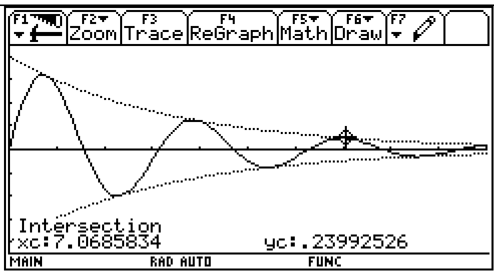
....

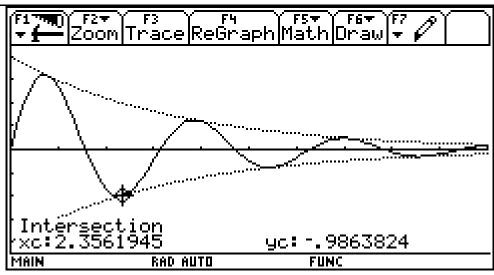
- *Versuche die Abszissen dieser Berührungspunkte als Vielfache von der Schwingungsdauer auszudrücken! Gelingt dir das und was fällt dir auf?*

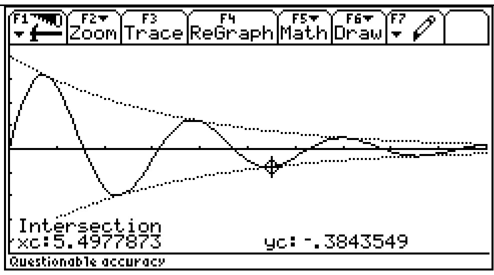
....

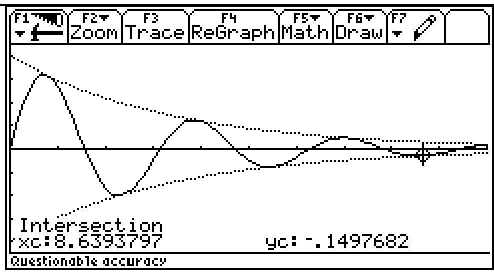












- *Speichere die Abszissen der eben berechneten sechs Berührungspunkte als x_i ab und berechne für jeden einzelnen Wert x_i die Funktionswerte der Funktion f*: y = sin(2x).*
- *Was fällt dir auf?*

....

Abszisse	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_i als Vielfaches von π						
sin (2 . x_i)						

2. Wachstumsprozesse

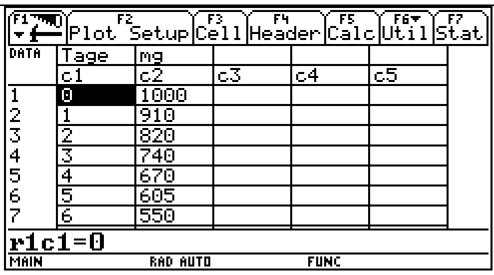
2.1 Radioaktiver Zerfall

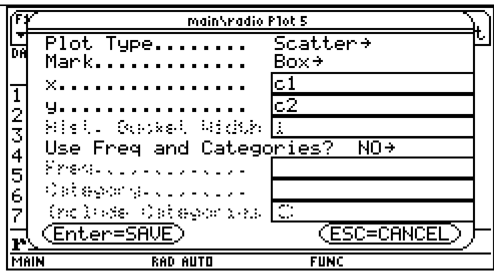
Am 26. April 1986 explodierte der vierte Reaktorblock des Kernkraftwerks Tschernobyl. Das bei der Atomspaltung entstehende radioaktive Isotop Jod-131 wurde in die Luft geschleudert und – vom Wind verweht – in ganz Europa abgelagert. Einer Probe von Waldpilzen aus der Steiermark wurden 1000 mg Jod – 131 entnommen. Folgende Werte hat man in den darauffolgenden 8 Tagen gemessen:

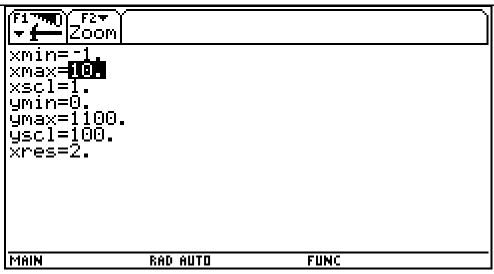
Tage	0	1	2	3	4	5	6	7	8
mg Jod – 131	1000	910	820	740	670	605	550	500	450

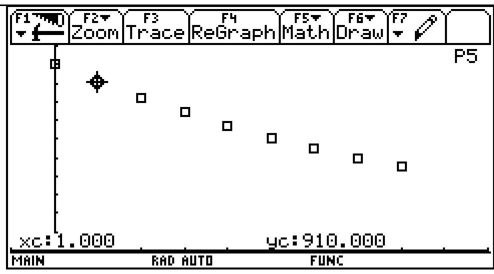
➢ *Stelle ein mathematisches Gesetz zur Beschreibung dieses Zerfallsprozesses auf!*

(Arbeite mit dem DATA-MATRIX-Editor und versuche eine Ausgleichskurve zu finden)









➢ *Ermittle, wie viel Prozent der jeweils vohandenen Menge in einer Zeiteinheit (= 1 Tag) zerfällt!*

Vervollständige dazu die untenstehende Tabelle und interpretiere das Ergebnis!

Zeitintervall	[0 ; 1]	[1 ; 2]	[2 ; 3]	[3 ; 4]	[4 ; 5]	[5 ; 6]	[6 ; 7]	[7 ; 8]
Abnahme(absolut)	90							
Abnahme (in %)	0,09							

Beim radioaktiven Zerfall zerfällt in einer Zeiteinheit immer .... Bruchteil (Prozentsatz p) der .... vorhandenen Substanz. Diese kontinuierliche Abnahme bzw. die noch vorhandene Menge an radioaktivem Stoff kann ich durch folgende rekursive Darstellung beschreiben:

$$N(t+\Delta t) = N(t) \cdot (1 - \ldots\ldots\ldots).$$

Ich erkenne, dass aufeinanderfolgende Werte für N(t) eine .... Folge bilden und kann daher die zeitliche Entwicklung der Menge an radioaktivem Jod auch explizit durch eine .... funktion beschreiben:

$$N(t) = \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots^{\ldots\ldots}$$

Bei einer geometrischen Folge ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder immer konstant.

Du kannst das Bildungsgesetz der Folge, die diesen radioaktiven Zerfall beschreibt, daher auch dadurch finden, indem du die Quotienten je zweier aufeinander folgender Werte berechnest und daraus den Mittelwert des „Wachstumsfaktors“ bestimmst. Dann kannst du den Zerfallsvorgang sowohl rekursiv als auch explizit darstellen!

- *Überprüfe diese Aussagen am vorliegenden Beispiel, indem die die folgende Tabelle vervollständigst!*

Zeit t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dfrac{N_t}{N_{t-\Delta t}}$								

- *Welche Bedeutung hat der Zahlenwert des Wachstumsfaktors?*

....

- *Wie interpretierst du einen Wert kleiner 1, gleich 1 bzw. größer 1?*

....

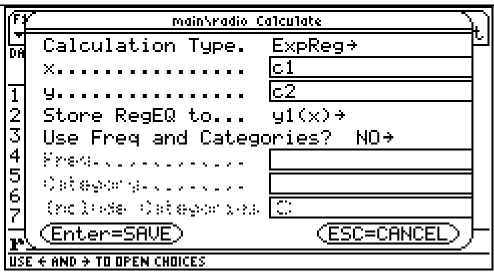
- Warum liegt hier kein linearer Zusammenhang vor?

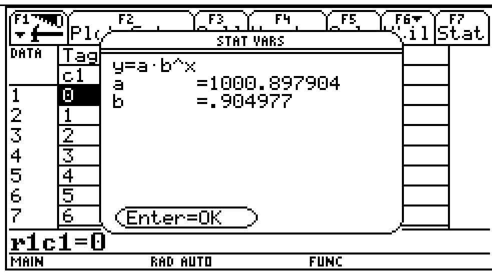
....

- Wozu ist die Änderungsrate (Änderung pro Periode) proportional?

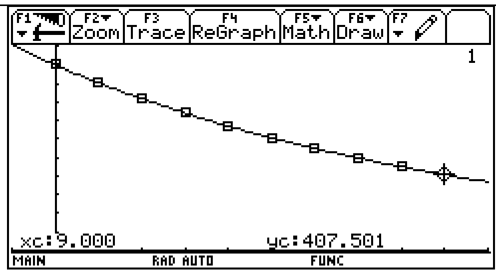
....

Nutze nun die Regressionsfunktionen deines TI92, um eine Funktion zu finden, die dir die Menge an noch vorhandenem radioaktiven Stoff in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen angibt.





Wenn wir nun diese Funkton gemeinsam mit den geplotteten Datenpunkten darstellen, sehen wir, dass die gemessenen und berechneten Werte im Wesentlichen übereinstimmen.



➢ *Welche Bedeutung haben die beiden vom TI92 ermittelten Parameter a und b?*

a ....

b ....

In deinem Physikbuch findest du für den radioaktiven Zerfall noch eine weitere Formel:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

mit

- t für die Zeit
- N_0 für die zur Zeit t=0 noch unzerfallenen Atomkerne
- N(t) für die zur Zeit t noch unzerfallenen Atomkerne und
- λ als Zerfallskonstante, die vom radioaktiven Stoff abhängt.

- *Versuche nun mit Hilfe deines TI92 durch zielorientiertes Probieren diese Zerfallskonstante zu bestimmen.*

λ = ... (Einheit?)

- *Beschreibe, welche Bedeutung λ in diesem Beispiel und allgemein für einen Wachstumsprozess hat!*

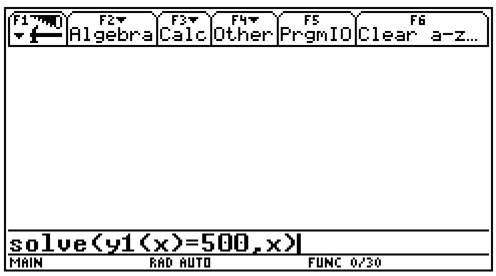
....

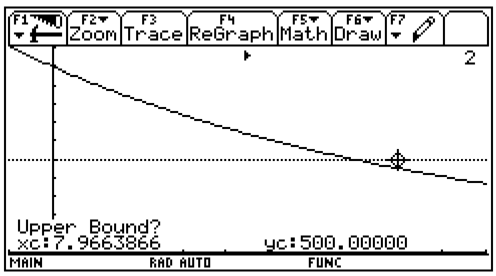
➢ *Wie lange dauert es, bis die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Menge an radioaktivem Jod zerfallen ist?*

- *Löse die Aufgabe mit drei verschiedenen Methoden!*

  - Im HOME-SCREEN
    (durch Berechnung mit SOLVE)
  - im GRAFIK-FENSTER
    (durch F5/INTERSECTION)

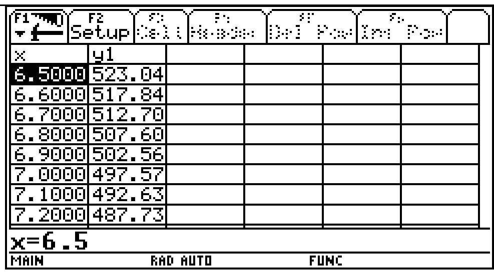
    und
  - im TABLE-Fenster





(durch Einschränken des Intervalls mit TBLSET und Wahl ein entsprechenden Δtbl)

Die Halbwertszeit τ für J-131 beträgt .... Tage



➢ *Wann sind nur mehr 10 mg vorhanden?*

- *Löse auch diese Aufgabe wieder mit allen drei Methoden!*
  - Im HOME-SCREEN (durch Berechnung mit SOLVE)
  - im GRAFIK-FENSTER (durch F5/INTERSECTION)

und

- im TABLE-Fenster

(durch Einschränken des Intervalls mit TBLSET und Wahl ein entsprechenden Δtbl)

Nach .... Tagen sind nur mehr 10 mg radioaktives Jod vorhanden.

Welche Menge an radioaktivem J-131 in mg und in % vom Ausgangswert N_0 von 1000 mg ist nach 5 „Halbwertszeiten“ noch vorhanden?

➢ *Versuche eine weitere Formel für den Zerfallsprozess zu finden, in der die Halbwertszeit τ verwendet wird!*

Zeit t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	10τ	$k\tau$
N(t)	1000								
$N(t)/N_0$									

Nach welcher Zeit t in Tagen sind nur mehr x % der ursprünglich vorhandenen Menge an radioaktivem Jod vorhanden?

➢ *Gib, wenn immer es möglich ist, das Ergebnis mit Hilfe von τ an !*

x	3,125	6,25	12,5	25	50	10	1	0,1	0,01	0,001
t										

➢ *Was fällt dir auf, wenn du deine Ergebnisse in den letzten 5 Spalten vergleichst?*

....

➢ *Kannst du eine Erklärung dafür finden?.*

....

2.2 Begrenztes Wachstum

Ein Gegenstand hat im Kühlschrank eine Temperatur von 6°C. Er wird in eine Umgebung mit 20°C gebracht. Sein Temperaturzuwachs pro Minute beträgt 30% des Unterschiedes zwischen (der Grenze) 20°C und seiner Temperatur am Beginn dieser Minute.

Wie entwickelt sich der Temperaturverlauf während der ersten 7 Minuten?

Minute	Temperatur (in °C) am Anfang der Minute	Temperaturdifferenz (in °C) zur Umgebung	Temperaturzuwachs (in °C) in dieser Minute
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			

Für diese Art des begrenzten Wachstums gilt:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = k \cdot (G - T)$$

- *Erkläre diese Formel und formuliere sie in Worten!*

Wir wollen nun ein Simulationsprogramm KUEHL() erstellen, das uns den Temperaturverlauf berechnet und wo wir den Zeitschritt beliebig klein machen können!

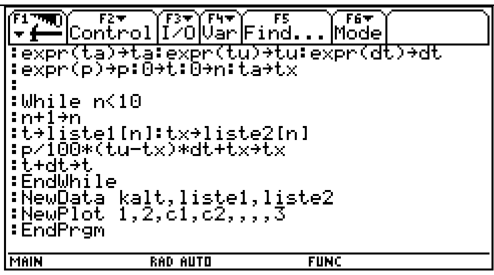
Eingabeparameter:

ta ... Anfangstemperatur (in °C) des Gegenstandes

tu ... Temperatur der Umgebung (in °C)

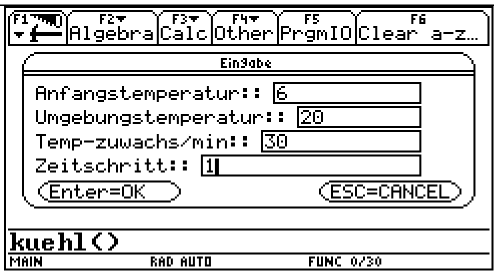
p ... Temperaturzuwachs pro Minute (in %)

dt .... Zeitschritt (in min)



Die gesamte Modellierung steht in einer einzigen Zeile, deren Inhalt eine Differenzengleichung ist:

$$T_{neu} = T_{alt} + p \cdot (T_{Umgebung} - T_{alt}) \cdot \Delta t$$

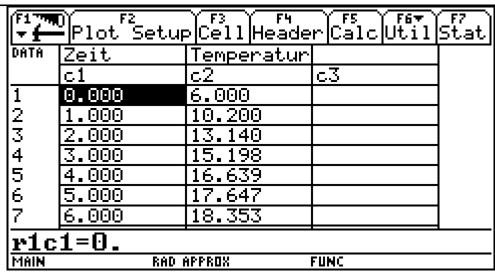


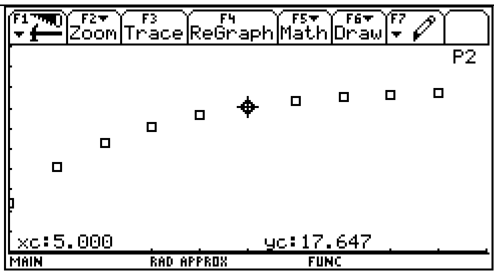
Das Programm wird im HOME-SCREEN aufgerufen und stellt nach Eingage der Modellparameter im DATA-MATRIX-Editor, wie festgelegt, die Wertepaare (Zeit/Temperatur) zur Verfügung.

- ➢ *Findest du eine Regressionfunktion, die den Temperaturverlauf beschreibt?*

....

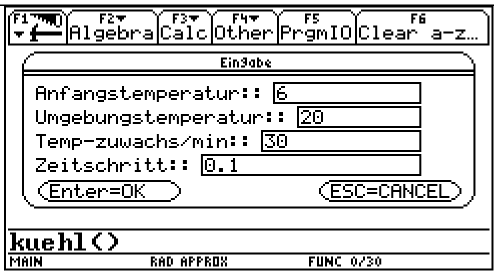
- ➢ *Experimentiere mit den Regressionfunktionen deines TI92!*

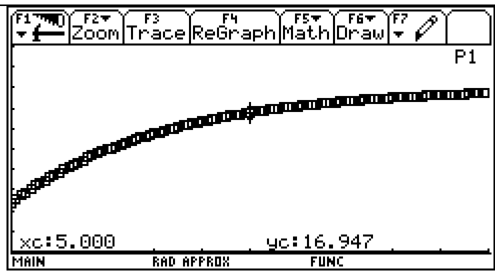




Da wir mit Differenzengleichungen arbeiten, ist zu erwarten, dass die Resultate von der Wahl des Zeitschrittes abhängen.

- ➢ *Untersuche, wie sich die Wahl des Zeitschritts auf die Ergebnisse auswirken!*



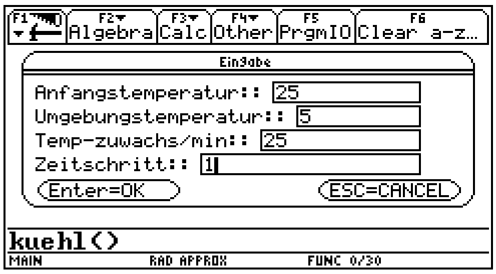


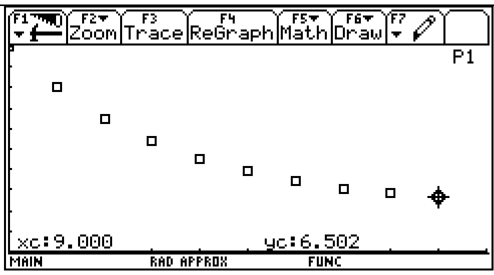
Lassen sich mit unserem Modell auch Abkühlungsvorgänge simulieren?

Beispiel:

Ein Gegenstand mit 25°C wird in einen Kühlschrank mit 5°C gebracht. Seine Temperaturabnahme pro Minute beträgt 25% des Unterschieds zwischen seiner Temperatur am Beginn dieser Minute und 5°C (=Grenze).

- ➢ *Wie entwickelt sich der Temperaturverlauf während der ersten 10 Minuten?*



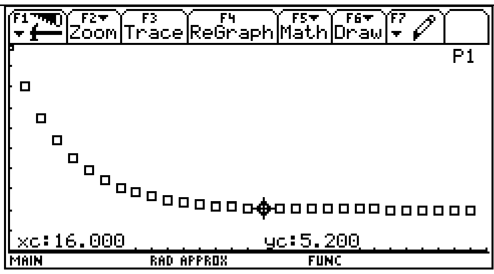


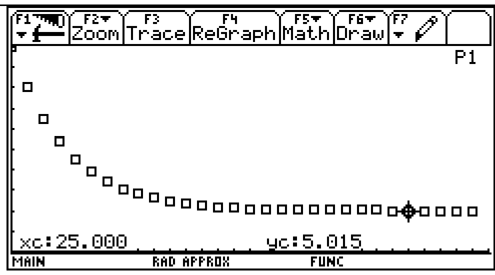
- ➢ *Wann beträgt die Temperatur des Gegenstandes nur mehr 5,2°C?*

....

- ➢ *Welche Temperatur hat der Gegenstand nach 25 Minuten?*

....

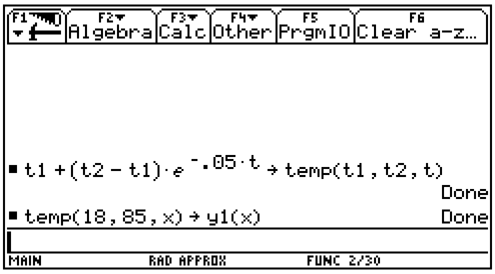


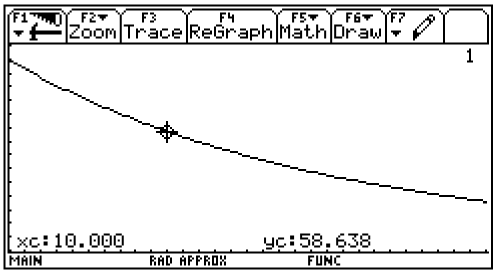


Abkühlvorgang:

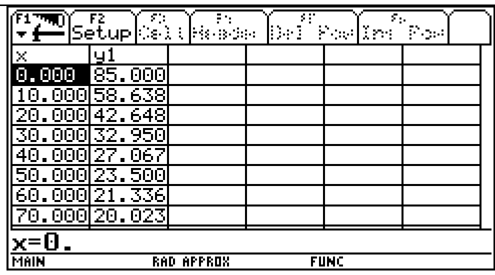
In einem Gefäß befindet sich heißes Wasser mit der Temperatur T_2 = 85°C; die Umgebung hat die Temperatur T_1 = 18°C. Die Abkühlung auf die Temperatur T erfolgt nach den Newtonschen Abkühlungsgesetz $T = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$ (Zeit t in Minuten).

- *Ermittle das Schaubild der T(t) – Funktion im Grafikfenster!*





- *Welche Temperatur hat das Wasser*
  - nach 10 min ....
  - nach 20 min ....
  - nach 40 min ....
  - nach 1h? ....

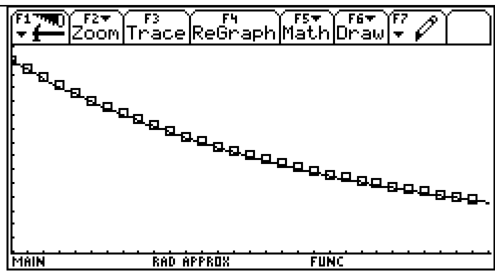


Um wieviel °C ändert sich die Temperatur absolut in den folgenden Zeitintervallen?

Δt(min)	[0;10]	[10;20]	[20;30]	[30;40]	[40;50]	[50;60]	[60;70]	[70;80]	[80;90]
ΔT(°C)									

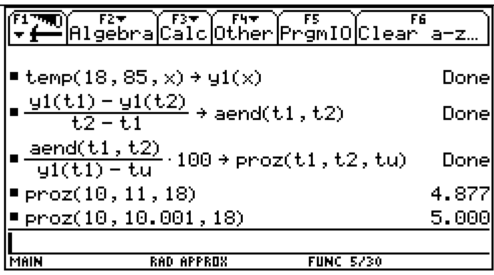
- *Stelle eine Vermutung auf, wovon die Abkühlungsgeschwindigkeit abhängt?*

Versuche den Temperaturabfall pro Zeiteinheit in % des Unterschiedes zwischen aktueller Temperatur und Umgebungstemperatur aus dem Diagramm oder durch eine selbst definierte Funktion zu ermitteln und löse die Aufgabe dann mit deinem Simulationsprogramm KUEHL()!



p = ... %

Vergleiche nun den Wert für p mit der für diese



Rechnungen verwendeten Funktionsgleichung

$$T\ (t) = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot e^{-0{,}05\ \cdot\ t}$$

- *Was fällt dir auf ?*
- *Findest du jetzt auch für die Beispiele mit dem Kühlschrank (siehe weiter oben) eine geeignete Funktionsgleichung?*

Du bekommst eine Tasse mit besonders heißem Tee (93°C) serviert. Dazu da ihn gezuckert trinkst, möchtest du zwei Stück Würfelzucker hineingeben. Dadurch wird der Tee – vor allem durch den Lösungsvorgang – um 15°C abgekühlt. Du bevorzugst 38°C als Trinktemperatur. Ist es nun klüger, den Zucker sofort hineinzuwerfen – oder abzuwarten, bis der Tee auf 53°C abgekühlt ist und erst dann zu zuckern?

- *Verwende das Newtonsche Abkühlunsgesetz und stelle beide Vorgänge im Grafik-Fenster dar!*
- *Erkläre das Ergebnis!*
- *Hat sich deine Vermutung bestätigt?*

Erweiterungsmöglichkeiten für den Physik-Unterricht:

Im Experiment werden Temperaturen bei Abkühlungsvorgängen händisch oder unter Verwendung des PHYSIK – PC aufgenommen und anschließend modelliert bzw. kann auch nach einer Funktionsgleichung geforscht werden. Mit Hilfe des TI92 soll dann die Güte der Modellrechnung und die Anpassung der Funktionsgleichung an die Rohdaten überprüft werden.

3. Lineare und quadratische Funktionen

3.1 Beispiele zum Federpendel

1.) Eine Schraubenfeder ist in unbelastetem Zustand 8,2 cm lang und bei einer Belastung mit 5 N genau 11,7 cm lang.
Nach dem HOOKEschen Gesetz ist die Zuordnungsvorschrift Belastung x $\rightarrow$ Länge y eine lineare Funktion der Form $y = m \cdot x + b$.

- *Bestimme m und b und stelle das Schaubild der Funktion im Grafik-Fenster dar.*
- *Interpretiere die Bedeutung der beiden Parameter m und b physikalisch.*
- *Beantworte im Grafik-Fenster und mit Hilfe der Tabelle, wie sich die Länge der Feder ändert, wenn die Belastung um 1,8 N vermehrt bzw. um 2,4 N vermindert wird.*
- *Ermittle ebenfalls mit ausschließlich grafischen Methoden, welche Belastung eine Verlängerung der Feder um 5 cm ergibt!*

2.) Bei verschiedenen Belastungen einer Schraubenfeder werden folgende Zahlenpaare (Kraft in N/ Länge in cm) gemessen:
[(0/10,0), (0,5/10,9), (1,0/11,6), (2,0/12,9), (3,0/14,6), (4,0/15,8)].

- *Stelle die Abhängigkeit der Länge s von der Kraft F grafisch (mit Hilfe des DATA-MATRIX-Editors) und rechnerisch dar und ergänze die folgenden Zahlenpaare (1,5/.....), (....../13,5), (....../20).*
- *Wo liegt hier physikalisch die Gültigkeitsgrenze des zugehörigen mathematischen Modells? Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der y-Achse?*
- *Was wird durch den Zahlenwert der Steigung der Ausgleichsgeraden ausgedrückt?*

3.2 Lotrechter Wurf

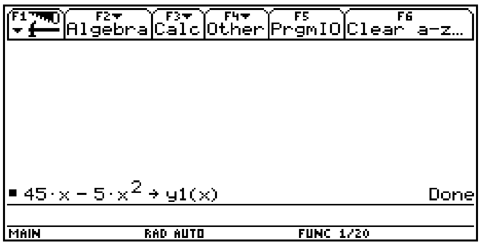
Ein Pfeil wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 45 m/s senkrecht nach oben abgeschossen.

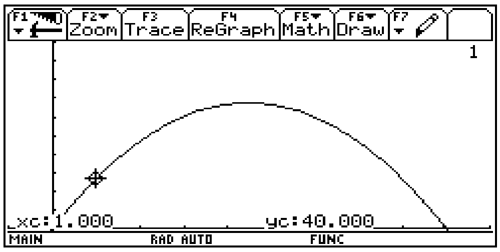
- *Stelle die Bewegung in einem Zeit-Weg- Diagramm sowie in einem Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm im Grafik-Fenster dar!*
- *Diskutiere die Zeit – Weg – Funktion und zeige auf, was man alleine aus ihrem Schaubild über die Geschwindigkeit des Pfeiles herausfinden kann.*
- *Wie interpretierst du die Form des Zeit-Weg-Diagramms in Bezug auf ihre Symmetrie?*
- *Welche Geschwindigkeit hat der Pfeil 4 s nach dem Abschuss?*
- *Wie hoch steigt er?*
- *Wann trifft er wieder auf dem Boden auf?*
- *Wie hängt die maximal erreichte Höhe von der Anfangsgeschwindigkeit ab?*
- *Zu welchen Zeitpunkten befindet sich der Pfeil in einer Höhe von 10 m über dem Abschusspunkt und welche Geschwindigkeiten hat er dann? Überrascht dich das Ergebnis?*
- *Wie lange ist der Pfeil mehr als 5 m vom Abschusspunkt entfernt?*
- *In welchen Zeitintervallen beträgt die Geschwindigkeit des Pfeiles weniger als 10 m/s?*

4. Anhang

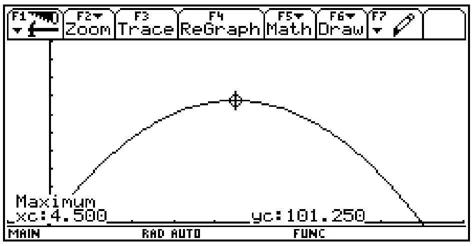
Folie zum Durcharbeiten der Arbeitsaufgabe LOTRECHTER WURF

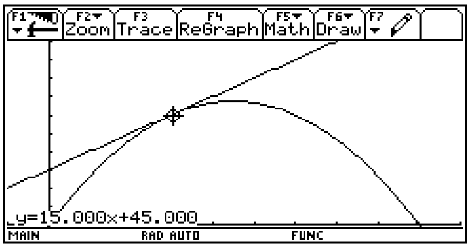
→ Stelle die Bewegung in einem Zeit-Weg-Diagramm im GRAFIK-Fenster deines TI92 dar!





→ Beschreibe diese Zeit-Weg-Funktion und gib an, was man alleine aus ihrem Schaubild über die Geschwindigkeit des Pfeiles herausfinden kann!





→ Wie interpretierst du die Symmetrie des Zeit-Weg-Diagrammes?

→ Welche Geschwindigkeit hat der Pfeil 4 s nach seinem Abschuss?

→ Wie hoch steigt er und wann erreicht er seine größte Höhe?

→ Wann trifft er wieder auf dem Boden auf?

→ Zu welchen Zeiten befindet sich der Pfeil in einer Höhe von 10 m über dem Abschusspunkt und welche Geschwindigkeiten hat er dann? - Überrascht dich das Ergebnis? - Gib eine Erklärung!

→ Wie lange ist der Pfeil mehr als 5 m vom Abschusspunkt entfernt?

→ Wann beträgt die Geschwindigkeit des Pfeiles weniger als 10 m/s ?

→ Berechne im HOME-SCREEN die mittlere Geschwindigkeit des Pfeiles mit Hilfe des Differenzenquotienten!

→ Überlege, wie du mit der Formel für die mittlere Geschwindigkeit möglichst genau die Momentangeschwindigkeit des Pfeiles zum Zeitpunkt t = 3 s ermitteln kannst?

→ Überprüfe im GRAFIK-Fenster!