Fächerübergreifender Unterricht mit dem TI-92

<table>
<tr><th colspan="2">Themenbereich</th></tr>
<tr><td colspan="2">Skriptum zur Lehrerfortbildung im Umgang mit dem TI92
und seinem Einsatz im Unterricht</td></tr>
<tr><th>Inhalte</th><th>Ziele</th></tr>
<tr><td>• Anwendungsaufgaben – mit Schwerpunkt 5. und 6. Klasse M und Ph
• Beispiele aus der Vektorrechnung, der Trigonometrie, der Differential – und Integralrechnung
• Modellbilden mit Hilfe des TI92
• Beispiele zur Verkehrserziehung
• Arbeitsblätter
• Übungsaufgaben</td><td>• Kennenlernen der Einsatzmöglichkeiten des TI92 im Unterricht zum Begreifen von funktionalen Zusammenhängen und zum Verstehen von Grafen
• Einblicke bekommen, wie sich die Unterrichtssituation durch den TI92-Einsatz verändert hat</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die ausgearbeiteten Aufgaben - fächerübergreifend vor allem mit Physik und Informatik - enthalten Vorschläge für die methodisch-didaktische Umsetzung im Unterricht und zeigen auf, in welcher Weise sich die Unterrichtssituation verändert hat. Sie könnten Ausgangspunkt für eigene Reflexionen und Planungen sein.</td></tr>
</table>

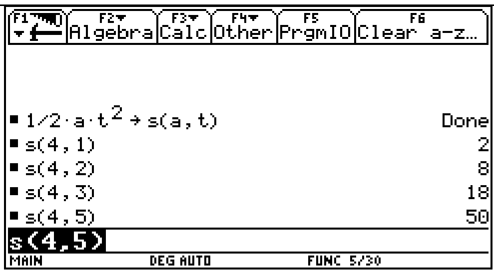
INHALTSVERZEICHNIS

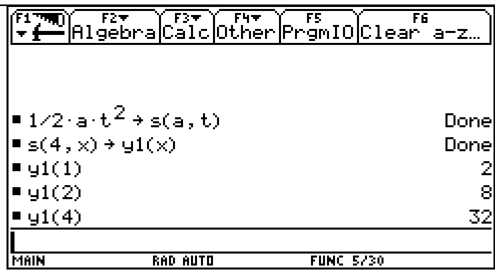
1. Zum Begreifen funktionaler Zusammenhänge

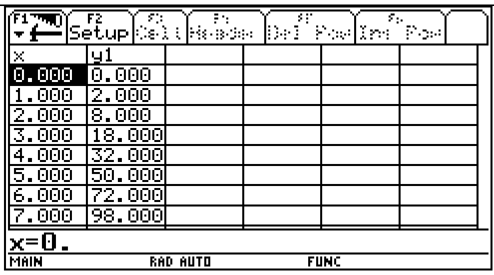
1.1. Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

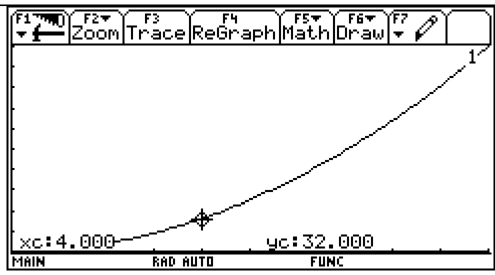
Aufgabenstellung:
Stelle die einzelnen Formeln für die gleichmässig beschleunigte Bewegung durch entsprechende Funktionen dar, die du in der tabellarischen sowie grafischen Darstellung am TI92 betrachtest, und interpretiere die funktionalen Zusammenhänge , wie z.B.:

s(a , t) = 1/2 · a · t² ergibt für eine gleichbleibende Beschleunigung $a = 4 m/s^2$ $s_{a=4}(t) = 2 \cdot t^2$,d.h. der zurückgelegte Weg steigt mit dem Quadrat der verstrichenen Zeit – das kann mit Hilfe der Tabelle oder mit dem Grafen oder einfach mit der Funktionsgleichung im HOME-SCREEN überprüft werden.

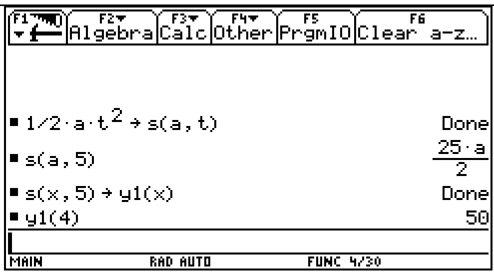


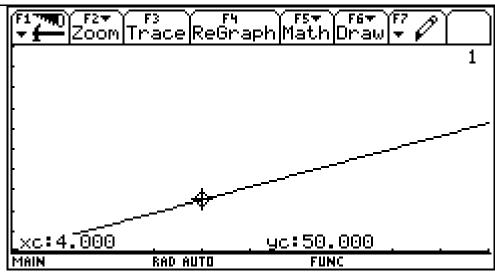






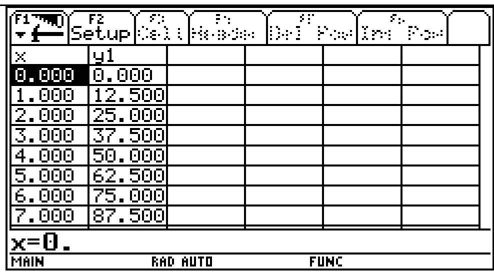
Ebenso ergibt sich für ein konstantes t (z.B. t = 5 s) eine Funktion ***s(a , 5) = 12,5 · a***.
Jedem a wird damit ein s zugeordnet, mit der physikalischen Bedeutung, dass dadurch der Weg angegeben wird, der von einem mit a gleichmässig beschleunigten Körper in 5 Sekunden zurückgelegt wird.





Schon aus dem Grafen erkennen wir einen eine direkte Proportionalität (vgl. $y = k \cdot x$) zwischen a und s, d.h. bei doppelter Beschleunigung ist der in der gleichen Zeit zurückgelegte Weg doppelt so gross, in der dreifachen Zeit dreimal so gross, usw.

Auch der Umgang mit tabellarischen Darstellungen kann an diesem Beispiel weiter geübt werden.Damit soll ein tieferes Verständnis für die funktionalen Zusammenhänge und Beziehungen dieser physikalischen Größen erreicht werden.



x	y1
0.000	0.000
1.000	12.500
2.000	25.000
3.000	37.500
4.000	50.000
5.000	62.500
6.000	75.000
7.000	87.500

x=0.

Übungsaufgabe:

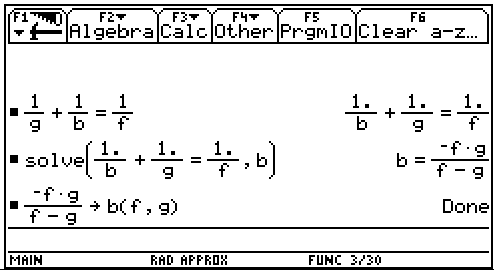
Übertrage die Funktionsgrafen ***s(a, t = 5s)*** und ***s(a = 4 m/s² , t)*** in dein Heft. Achte auf den charakteristischen Funktionsverlauf und gib die funktionalen Abhängigkeiten und ihre physikalische Relevanz in kurzer schriftlicher Darstellung wieder.

1.2. Die Linsengleichung

Für eine sehr dünne Sammellinse gilt zwischen Brennweite f, Gegenstandsweite g und Bildweite b der folgende Zusammenhang, der als Linsengleichung bekannt ist:

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

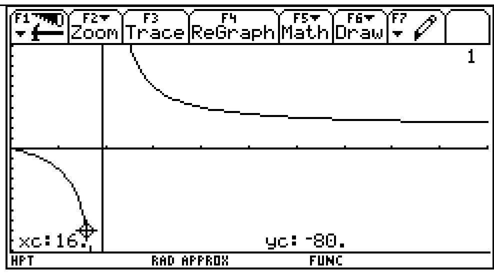
Die Bildweite kann als Funktion der Gegenstandsweite g bei vorgegebener Brennweite f definiert werden.



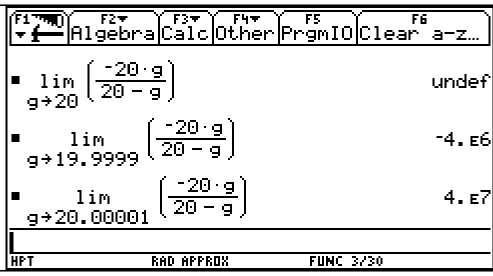
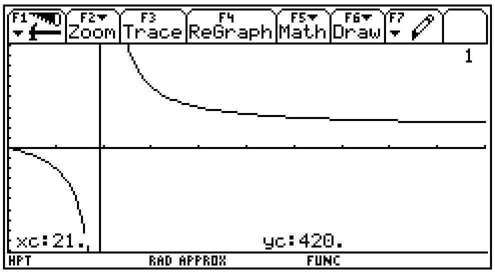
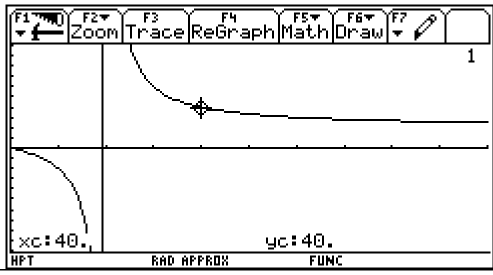
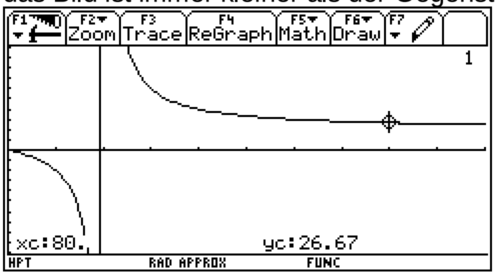
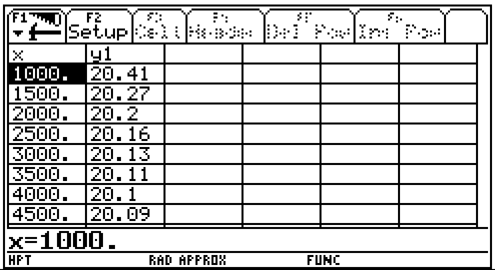
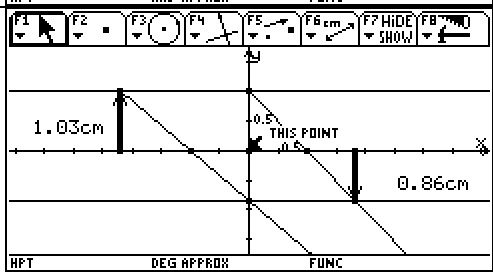
Eigenschaften dieser Funktion b(f, g):

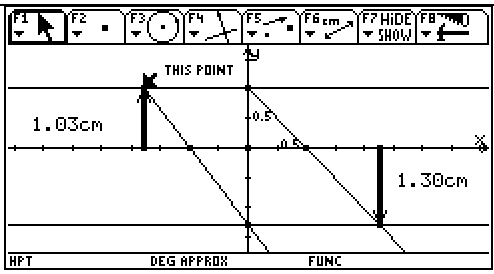
- Die gebrochen rationale Funktion Funktion **b(f , g)** ist für f = g nicht definiert; d.h. in diesem Fall gibt es kein Bild.
- Wenn f kleiner als g ist, so wird b negativ.
- Wenn g sehr groß wird, so strebt b gegen die Brennweite f .

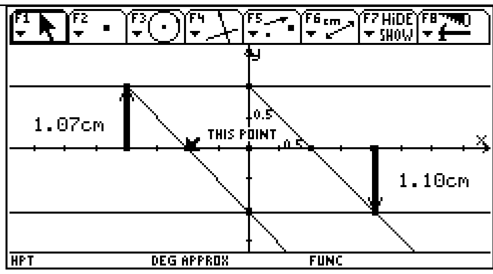
Für eine bestimmte Linse (z.B. f = 20 mm) kann die Bildweite in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite definiert und graphisch dargestellt werden.



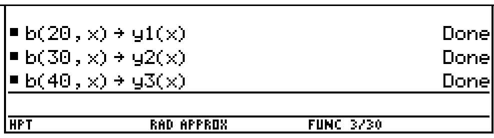
Für g = 16 mm ergibt sich eine Bildweite von b = - 80 mm, d.h. ein vergößertes und virtuelles Bild.

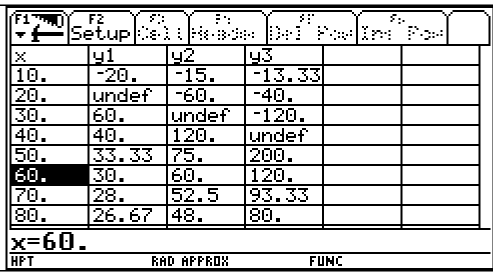
<table>
<tr>
<td>Was erhalten wir für g sehr nahe beim Brennpunkt, d.h. g ≅ f ?
Für g = 20 ist die Funktion nicht definiert. Nähern wir uns vom Linsenmittelpunkt aus dem Brennpunkt, so wird das Bild immer größer und entfernt sich immer mehr.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Sobald g>f wird, wird auch die Bildweite positiv und - solange g nicht viel größer ist als f – sehr groß.

</td>
<td>Wenn g = 2 f (doppelte Brennweite) so erhalten wir für b = 2f; das Bild ist gleich groß wie der Gegenstand und von der Linse gleich weit entfernt.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Für g > 2f erhalten wir für b immer weniger als g; d.h. das Bild ist immer kleiner als der Gegenstand

</td>
<td>und für ein sehr großes g nähert sich die Bildweite immer mehr dem Betrag der Brennweite f

</td>
</tr>
<tr>
<td>Auch im Geometry – Editor kann die Bildkonstruktion bei der Sammellinse veranschaulicht werden. Das Bild wird mit Hilfe von Brennpunkt- und Parallelstrahl konstruiert. Gegenstand und Bild werden als „Vektor“ definiert und ihre Länge mit F6/1 (Distance und Length) bestimmt.</td>
<td>

Für g > 2f erhalten wir ein verkehrtes verkleinertes Bild</td>
</tr>
<tr>
<td>

Für f < g < 2f liegt das Bild weiter als 2f von der Linse entfernt und ist vergrößert.</td>
<td>

Für g = 2f ergibt sich im Rahmen der Zeichengenauigkeit b = 2f und Bild und Gegenstand sind gleich groß</td>
</tr>
<tr>
<td>Welchen Einfluss hat die Brennweite auf die Lage und Größe des Bildes?</td>
<td></td>
</tr>
</table>

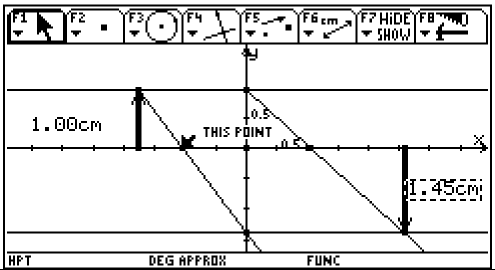


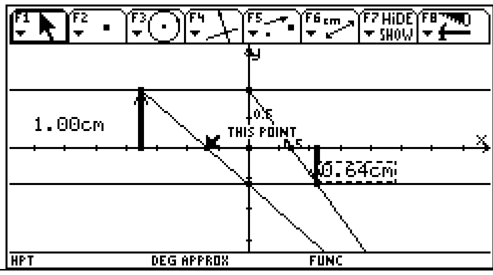


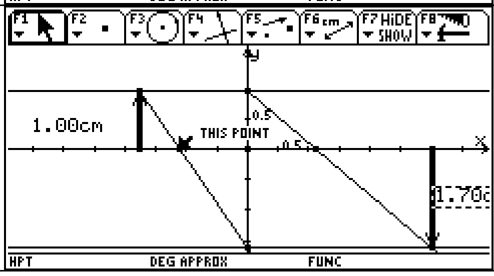
x	y1	y2	y3
10.	-20.	-15.	-13.33
20.	undef	-60.	-40.
30.	60.	undef	-120.
40.	40.	120.	undef
50.	33.33	75.	200.
60.	30.	60.	120.
70.	28.	52.5	93.33
80.	26.67	48.	80.

x=60.

Wir untersuchen die Frage zuerst im Geometrie-Fenster, indem wir bei festbleibender Gegenstandsweite und Gegenstandsgröße durch Verändern der Brennweite drei verschiedene Linsen simulieren und beobachten, wie sich die Bildweite und die Bildgröße verändert.

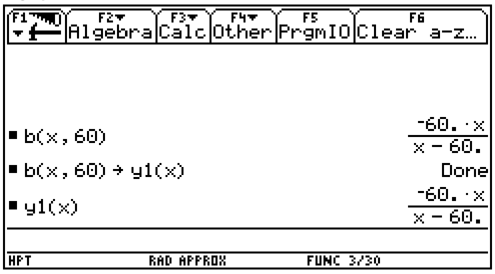




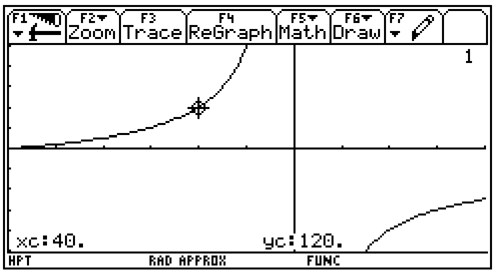


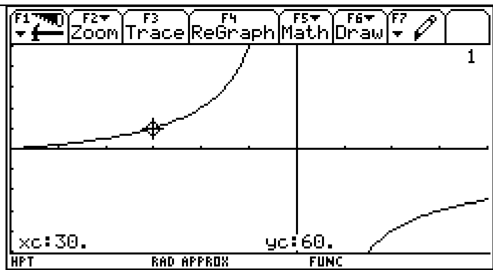
Von ein und demselben Gegenstand, der in einer bestimmten Entfernung g vor einer Linse steht, erhalten wir ein kleineres Bild, wenn die Brennweite der Linse kleiner ist und ein größeres Bild, wenn die Brennweite der Linse vergrößert wird.

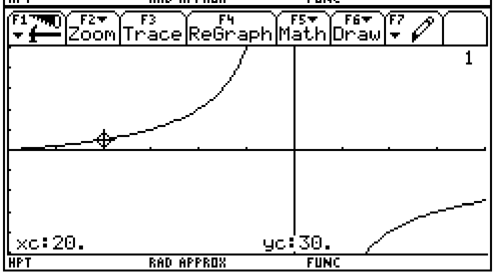
Die Bildweite wird dann als Funktion der Brennweite f einer Linse bei gegebener Gegenstandsweite (hier g = 60 mm) als y1(x) definiert



und graphisch dargestellt







Für f < 60 (d.h. g > f) ist die Funktion b(f,60) streng monoton steigend; eine Linse mit größerer Brennweite erzeugt von einem Gegenstand in gleicher Gegenstandsweite ein größeres Bild, da gilt

$$\frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}} = \frac{\text{Bildweite}}{\text{Gegenstandsweite}}$$

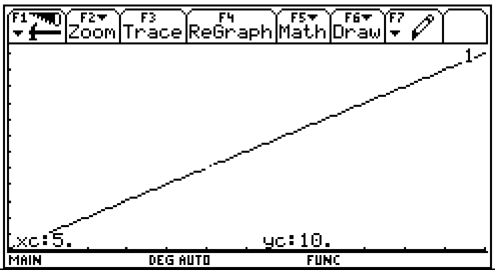
2. Der TI92 als Schlüssel zum Verstehen von Grafen

Beisp.1:
Ein gleichmässig beschleunigtes Fahrzeug erreicht aus der Ruhe heraus nach 10s seine Endgeschwindigkeit von 20m/s. Welchen Weg hat das Fahrzeug in dieser Zeit zurückgelegt?
Nach welcher Zeit hätte es bei doppelter Beschleunigung die angegebene Geschwindigkeit erreicht?

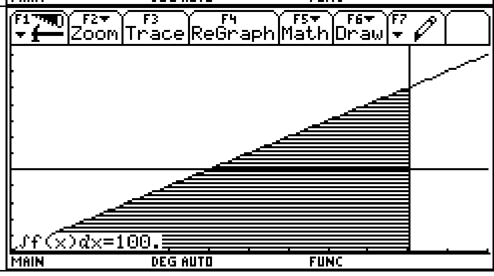
- *Der Zusammenhang zwischen der Fahrzeugbeschleunigung und der in 10s erreichten Geschwindigkeit soll zeichnerisch dargestellt werden.*
- *Es soll ein Diagramm skizziert werden, das bei gleichmässig beschleunigter Bewegung den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg und der erreichten Geschwindigkeit wiedergibt.*
- *Die Lösungen und Lösungswege sind zu begründen !*

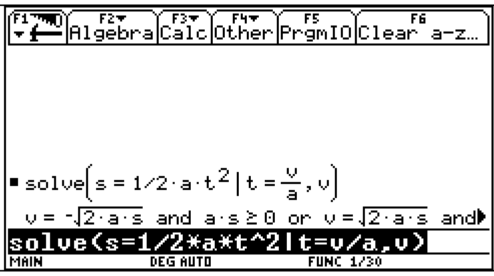
Aus $\boldsymbol{a = \Delta v / \Delta t}$ = 20 m/s / 10s = 2 m/s² und
v(0s) = 0 m/s erhalten wir mit
y1(x) = 2x das v – t – Diagramm.

Daraus erkennen wir, dass die Geschwindigkeit nach 5s 10m/s beträgt, also halb so gross ist, wie am Ende unseres betrachteten Zeinintervalls.



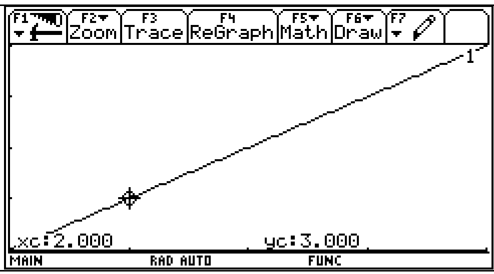
Das Fahrzeug hat also in den ersten 10s den gleichen Weg zurückgelegt als hätte es sich mit der halben Endgeschwindigkeit die vollen 10s gleichförmig bewegt; dieser Zusammenhang wird aus der Deutung der Fläche unterhalb des v – t – Grafen deutlich.



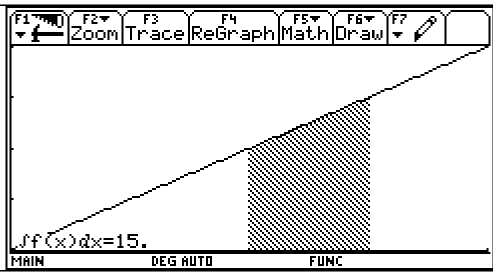


Aus der Formel, die wir im HOME-Fenster erzeugen, wird deutlich, wie der algebraische Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg s und der erreichten Geschwindigkeit v gewonnen wird und dass v prop. zur Quadratwurzel aus s ist.

Beisp.2:
Gegeben ist das folgende v – t – Diagramm
Welche physikalische Bedeutung hat im Diagramm die Geradensteigung und wie groß ist sie?

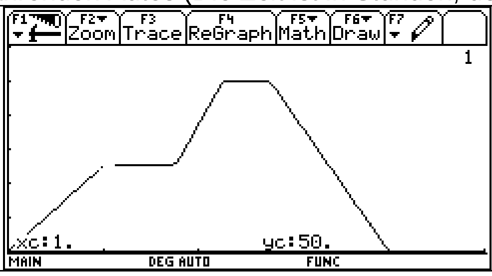
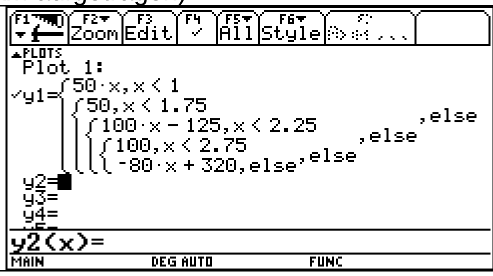


Es handelt sich um das v – t - Diagramm eines gleichmässig beschleunigten Massenpunktes. Die Steigung der Geraden ist konstant und läßt sich aus der Grafik ermitteln. Physikalisch gibt die Steigung der Geraden die Beschleunigung des Massenpunktes an.

Welche physikalische Bedeutung hat der *schraffierte* Flächeninhalt?	

Allgemein ist bekannt, dass die Fläche unter der Kurve im v – t - Diagramm einer Bewegung zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 den in der Zeit t_2-t_1 zurückgelegten Weg repräsentiert.

Beisp.3:
Gegeben ist das nachfolgende idealisierte Ort-Zeit-Diagramm der Bewegung eines im Ursprung abfahrenden Autos (Die Zeit ist in Stunden, der Weg in km aufgetragen)

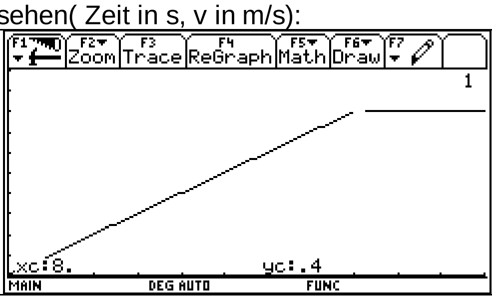
	

- *Beschreibe möglichst genau die Bewegung des Autos!*
- *Zeichne auf einem Blatt Papier das zugehörige Geschwindigkeits – Zeit – Diagramm!*
- *Was versteht man unter der Durchschnittsgeschwindigkeit eines Körpers?*
- *Ermittle die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs während der ersten 2 1/4 Stunden. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während der gesamten Fahrt?*

Zum Zeitpunkt t = 1,5 h startet 150 km vom Ursprung entfernt ein zweites Fahrzeug und bewegt sich mit 80 km/h nach 0.

- *Ergänze des obige Ort – Zeit - Diagramm im TI92 durch die Kurve für dieses Fahrzeug und lies ab, wann und wo sich beide Fahrzeuge begegnen!*
- *Kannst du den Zeitpunkt und den Ort der Begegnung auch berechnen?*

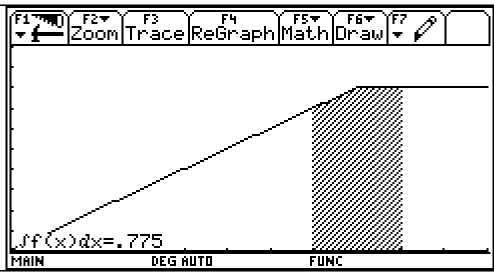
Beisp.4:
Das idealisierte Geschwindigkeits – Zeit - Diagramm eines geradlinig bewegten Körpers hat folgendes Aussehen(Zeit in s, v in m/s):

	➢ *Welchen Weg hat dieser Körper in den ersten 6 bzw. 10 Sekunden zurückgelegt?* ➢ *Wie weit kommt der Körper in der 6. bzw. in der 10. Sekunde?*

- *Zeichne das zur Bewegung gehörende Weg – Zeit - Diagramm und erläutere, wie man aus diesem Diagramm die Momentangeschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt zeichnerisch ermitteln kann.*
- Wie läßt sich aus der s(t) - Funktion die *Momentangeschwindigkeit* rechnerisch ermitteln?

Welche physikalische Bedeutung hat die im nebenstehenden

v – t - Diagramm
schraffierte Fläche?



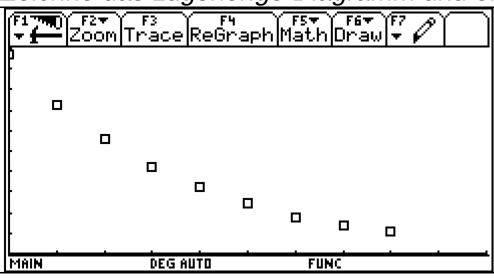
- *Veranschauliche dies auch im s – t – Diagramm und überprüfe den angegebenen Zahlenwert!*
- *Untersuche die Richtigkeit der folgenden Behauptung:*

Bei einer gleichmässig beschleunigten Bewegung eines Körpers aus der Ruhe heraus besteht zwischen der Geschwindigkeit v und der zurückgelegten Wegstrecke s zum Zeitpunkt t die Beziehung $v = 2s/t$.

Beisp.5:
Die Aktivität A eines radioaktiven Präparates Bi(210,83) wird über eine längere Zeit gemessen. Man erhält nach Abzug des Nulleffekts die folgende Tabelle:

t in d	0	2	4	6	8	10	12	14	16
A in Bq	600	452	345	261	199	152	111	85	64

- *Zeichne das zugehörige Diagramm und entnimm daraus die Halbwertszeit des Präparates.*



- *Kennst du eine Funktion, die den Aktivitätsverlauf beschreibt?*

Experimentiere mit deinem TI92 und beantworte die folgenden Fragen!

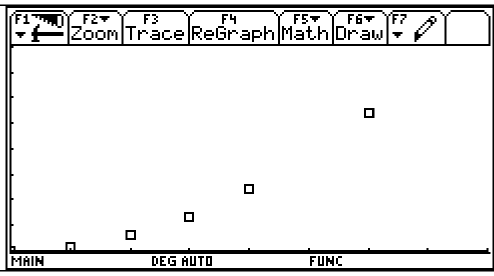
- *Welcher Prozentsatz der Bi-Kerne ist nach 15 Tagen noch unzerfallen?*
- *Welcher Prozentsatz ist nach 30 Tagen zerfallen?*
- *Zu welchem Zeitpunkt war die Aktivität des Präparates viermal so groß als nach 30 Tagen ?*
- *Wann werden weniger als 0,1% der Bi-Kerne vorhanden sein?*

.

Beisp.6: Ein Massenpunkt kann reibungsfrei und aus der Ruhe heraus eine hinreichend lange schiefe Ebene hinuntergleiten. Ein Beobachter registriert den zur Zeit t jeweils zurückgelegten Weg s und erhält:

t in s	0	1	2	3	4	5	6
s in m	0	0,08	0,3	0,68	1,2		2,7

- *Zeige, dass der Massenpunkt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ausführt.*

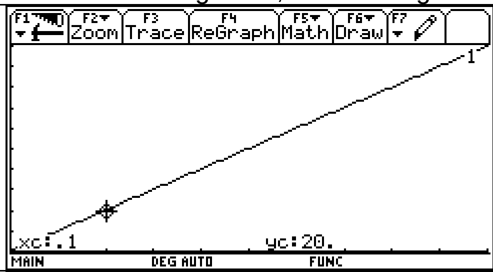


- *Wie weit ist der Körper nach 5s gekommen?*
- *Zu welchem Zeitpunkt hat er den Weg 4m zurückgelegt?*
- *Welche Geschwindigkeit hat der Körper nach 4s?*
- *Zu welchem Zeitpunkt hat er die Geschwindigkeit 1,2m/s?*

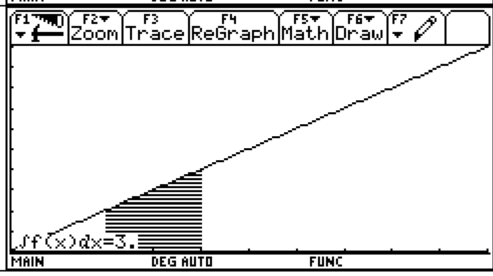
Es gibt ein Zeitintervall $\Delta t = 1$ s, in dem der Körper die Wegstrecke $\Delta s = 75$ cm zurücklegt.
- *Bestimme dieses Zeitintervall!*

Beisp.7:
Eine lotrecht aufgehängte Schraubenfeder wird durch die Masse m = 2 kg um 0,10m verlängert.

- *Welche Arbeit wird dabei verrichtet?*
- *Welcher Prozentsatz dieser Arbeit ist erforderlich, um die Feder nur halb so weit zu verlängern?*



- *Welche Arbeit muss an der Feder verrichtet werden, um diese von 0,10 m auf 0,20 m zu verlängern?*



3. Entdecken von Gesetzen – Kurvenanpassung an Messdaten

(aus Schmidt; Mathematik erleben)

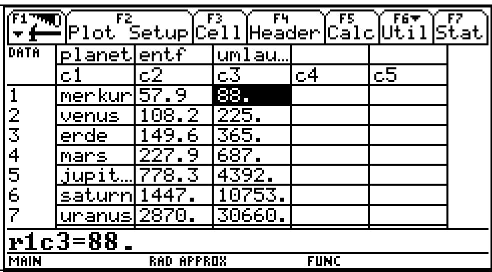
Die Darstellung zweidimensionaler Daten im Streudiagramm führt in vielen Fällen zu Vermutungen über funktionale Abhängigkeiten. Aus dieser Darstellung und dem Sachzusammenhang gewinnt man Hypothesen, die mit Hilfe von geeigneten Datentransformationen und Kurvenanpassung untersucht werden. Dies führt zum Entdecken von Gesetzmäßigkeiten, die im günstigen Fall auch durch theoretische Modelle bestätigt werden. An drei für den Mathematikunterricht geeigneten fächerübergreifenden Beispielen wird die Behandlung eines solch forschend-entwickelnden Verfahrens mit Hilfe empirisch gewonnener Daten aufgezeigt:

Das dritte Keplersche Gesetz (Umlaufzeit von Planeten in Abhängigkeit von der mittleren Entfernung zur Sonne)

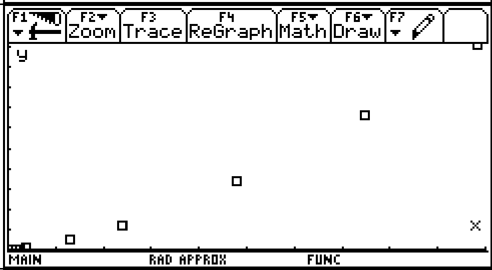
Wir wollen versuchen, die Entdeckung Johannes Keplers (1618) mit den heute verfügbaren Daten der neun Planeten unseres Sonnensystems nachzuvollziehen und damit das dritte Keplersche Gesetz zu formulieren.

Planet	***Entfernung in Mill. km***	***Umlaufdauer in Tagen***
Merkur	57,9	88
Venus	108,2	225
Erde	149,6	365
Mars	227,9	687
Jupiter	778,3	4392
Saturn	1447	10753
Uranus	2870	30660
Neptun	4497	60150
Pluto	5907	90670

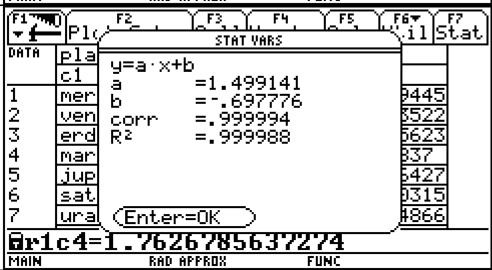
Entwicklung eines empirischen Modells



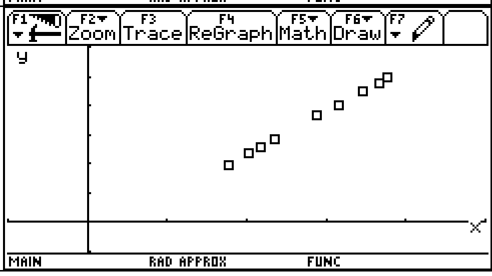
Wir vermuten einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Daten. Dazu tragen wir die Punkte (x/y)=(Entfernung von der Sonne in Mill. km/Umlaufzeit in Tagen) im Koordiantensystem ein.



Leider liegen wegen des ungünstigen Maßstabs die Punkte für die ersten drei Planeten sehr dicht, so dass man hier nicht viel erkennen kann.
Die Punkte liegen auf einer Kurve, die Graph einer Potenzfunktion der Form $y=ax^c$ sein könnte.

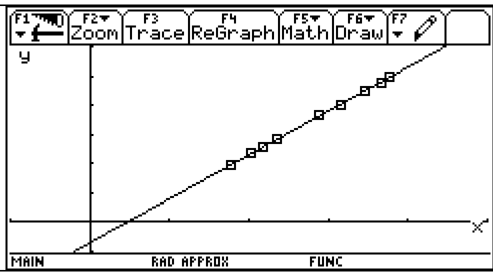


Behandelt man dieses Beispiel in der sechsten Klasse so kann man hier auch Logarithmen verwenden.
Mit einem „log-log-Plot“, d.h. x- und y-Achse werden in logarithmischer Unterteilung dargestellt, werden die Maßstabsprobleme umgangen.



Gleichzeitig lässt sich die Vermutung der Potenzfunktion gut überprüfen: wenn sie zutrifft, so müssen die Logarithmen (log(x)/log(y)) auf einer Geraden liegen.

Wir erstellen zwei weitere Listen c3=log(c1) und c4=log(c2) und stellen die so transformierten Datenpunkte wiederum im Streudiagramm dar. Die Darstellung entspricht dann einer solchen auf doppelt-logarithmischem Papier.



Im „log-log-Plot“ liegen die Punkte offensichtlich auf einer Geraden. Steigung und y-Achsenabschnitt dieser Geraden können wir grob aus der Zeichnung ablesen oder mit Hilfe der gegebenen Punkte berechnen.
Wir bestimmen die Gerade als lineare Regressionsgerade, der Korrelationskoeffizient von nahezu 1 bestätigt den linearen Zusammenhang.

Damit ist klar, dass die Ausgangsdatenpaare unserer Planeten auf dem Graph einer Potenzfunktion mit der Gleichung $y=ax^c$ liegen. Der Parameter c entspricht genau der Steigung 1,5 der Geraden im log-log-Plot. Den Parameter a erhalten wir mit Hilfe des y-Achsenabschnitts der Geraden, es gilt
$a=10^b=10^{-0{,}698}=0{,}2$. Wir geben die Potenzfunktion $y2(x)=0{,}2 \cdot x^{1{,}5}$ ein und plotten den Graph zusammen mit dem Streudiagramm für c1 und c2.

Damit haben wir durch Auswertung der Daten ein empirisches Gesetz über den Zusammenhang von Umlaufdauer T und Bahnradius R der Planeten unseres Sonnensystems gefunden:

$$T = 0{,}2 \cdot \sqrt{R^3}$$

Dies entspricht der Formulierung des dritten Keplerschen Gesetzes: Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhalbachsen.	$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{R_1^{\,3}}{R_2^{\,3}} \; oder \; \frac{T^2}{R^3} = konst.$

4. Beispiele aus der Vektorrechnung

4.1. Abstandsberechnungen

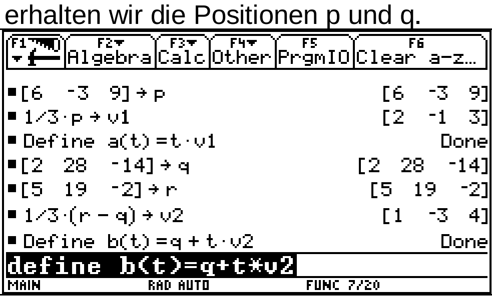
Analytische Geometrie im R^3, Verbindungen zu reellen Funktionen/Analysis
(aus Schmidt; Mathematik erleben)
Beispiel:

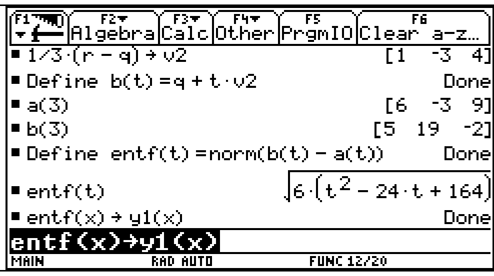
Zwei Flugzeuge fliegen mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf geradem Kurs. Das erste befindet sich zur Zeit t=0 im Nullpunkt eines geeignet gewählten Koordinatensystems. Zur Zeit t=3 ist es in P(6/-3/9). Zu den entsprechenden Zeiten befindet sich das zweite in Q(2/28/-14) bzw. R(5/19/-2). (Koordinatenangaben in 10^{-2} km , Zeiteinheiten in Sekunden)

- *Zu welcher Zeit sind sich die Flugzeuge am nächsten (wie nahe), und in welchen Positionen befinden sie sich dann gerade?*
- *Zu welcher Zeit im Intervall [0;60] ist der Abstand der Flugzeuge am größten?*

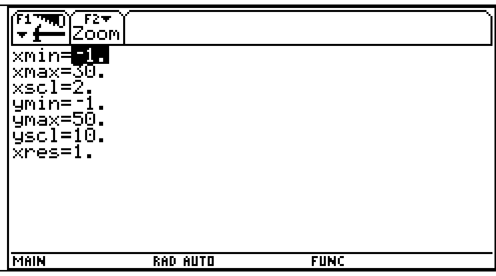
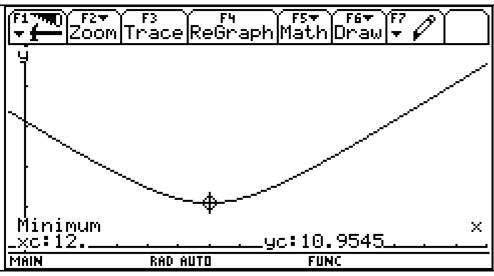
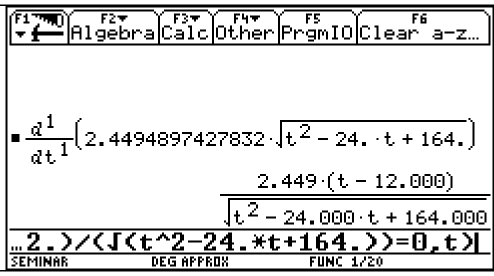
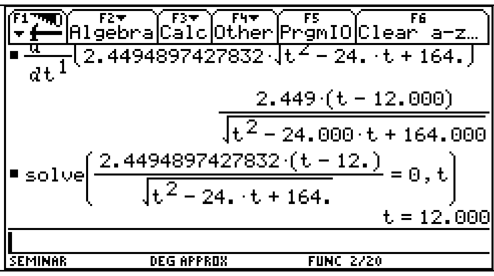
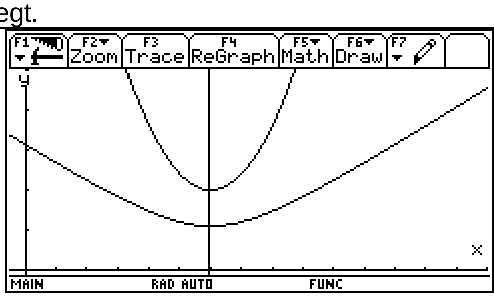
Vorüberlegungen:
Die Geradengleichungen a(t) = p + t · v_1 und b(t) = q + t · v_2 für die Flugrouten der beiden Flugzeuge A und B müssen bestimmt werden. p und q beschreiben die jeweiligen Positionen zum Zeitpunkt t=0. Die Geschwindigkeitsvektoren v_1 und v_2 (Richtungsvektoren der Geraden) werden so gewählt, dass mit dem Parameter t jeweils die Position des Flugzeugs zum Zeitpunkt t (in Sekunden) bestimmt ist. Die Entfernung entf(t) lässt sich nun als Entfernung der jeweiligen Positionen zum Zeitpunkt t bestimmen.

Lösungsskizze:
Die Vektoren p, q und r werden unter den entsprechenden Namen gespeichert. (Taste STO>). Mit Hilfe der üblichen Vektoroperationen (S-Multiplikation, Addition und Subtraktion) können wir die Geradengleichungen a(t) für Flugzeug A und b(t) für Flugzeug B so definieren, dass die jeweilige Position zum Zeitpunkt t angegeben wird. DEFINE im Menu F4. Probe: durch Eingabe von a(3) und b(3) erhalten wir die Positionen p und q.





Die Formel für die gesuchte Entfernung zwischen den Flugzeugen zum Zeitpunkt t können wir nun direkt mit Hilfe des Befehls NORM(im Menu MATH/MATRIX/NORMS bestimmen. Wir erkennen, dass die Entfernung eine Funktion der Zeit ist, hier speziell die Verkettung einer Wurzelfunktion mit einer quadratischen Funktion. Anschließend wird das Minimum von entf(t) gesucht, ebenso das Maximum im angegebenen Zeitintervall.

<table>
<tr><td>Wir definieren diese Funktion im [Y=]-Editor, bestimmen über [♦][WINDOW] einen passenden Bereich und schauen uns mit [♦][GRAPH] den Graph der passenden Funktion an.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Die Funktion hat offensichtlich ein Minimum, dies liegt ungefähr bei t=12. Mit Hilfe der TRACE-Funktion F3 können wir dies präzisieren, gleichzeitig erkennen wir, dass der minimale Abstand ungefähr 110m beträgt.</td></tr>
<tr><td>Sind schon Kenntnisse aus der Analysis vorhanden, so kann dieses Minimum auch noch rechnerisch über die Nullstelle der 1.Ableitung berechnet werden.
Mit dem Befehl d(DIFFERENTIATE im Menu CALC können wir unsere Funktion entf(t) nach t ableiten.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Die Nullstelle der Ableitungsfunktion liegt bei t=12, die Entfernung beträgt zu diesem Zeitpunkt 10,9545 (etwa 110m).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aus dem Verlauf der Funktion erkennen wir außerdem, dass das Maximum der Entfernung mit etwa 1180m am rechten Rand des vorgegebenen Intervalls liegt.</td></tr>
<tr><td>Wir können uns an dieser Stelle noch einen anderen Zusammenhang anschaulich bestätigen. Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion wissen wir, dass wir nur die Minimumstelle der Funktion $y2(x)=x^2-24x+164$ suchen müssen, diese stimmt dann mit der für die verkettete Funktion überein. Wir geben die Funktion im Funktioneneditor ein und finden die graphische Veranschaulichung des Zusammenhangs.</td><td>

(Die Vertikale bei x=12 wird unter dem Menu F7 mit der Option 6:VERTICAL gezeichnet).</td></tr>
</table>

4.2. Normalprojektion eines Vektors – Skalares Produkt

Beispiel 1:

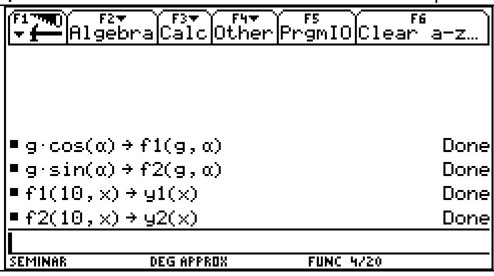
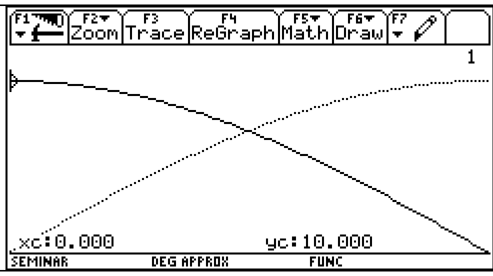
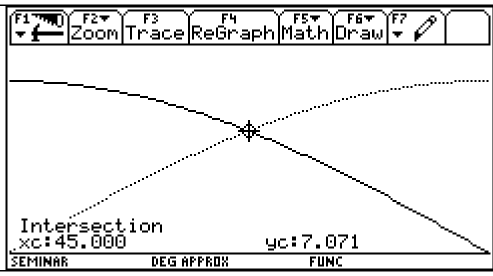
Eine Kugel vom Gewicht G hängt an einem Faden. Gib eine Formel an für den Betrag der Kraft F_1, mit der der Faden gespannt wird, wenn die Kugel aus der Ruhelage gebracht wird und für den Betrag der Kraft F_2, die die Kugel wieder in die ursprüngliche Lage zurücktreibt.

Lösungsweg:

Wir denken die Gewichtskraft $\vec{G}$ durch zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ ersetzt ($\vec{G}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$), wobei $\vec{F_1}$ in Richtung des Fadens und $\vec{F_2}$ normal dazu wirkt; $\vec{F_1}$ spannt den Faden und $\vec{F_2}$ treibt die Kugel wieder in die ursprüngliche Lage zurück.

Die jeweilige Lage der Kugel beschreiben wir durch das Maß φ des Winkels zwischen der Lotrechten und dem Faden. Dann gilt: $\cos\varphi = \frac{\vec{F}_1}{\vec{G}}$

Der Betrag der den Faden spannenden Kraft ist somit $F_1 = G \cdot \cos\varphi$; für die rücktreibende Komponente F_2 erhalten wir $F_2 = G \cdot \sin\varphi$.

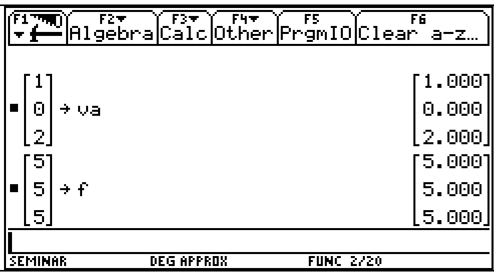
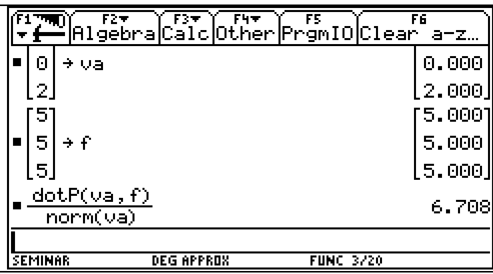
	
Mit wachsender Auslenkung wird die fadenspannende Komponente kleiner und die rücktreibende Komponente größer; d.h. es liegt eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung vor wenn der Pendelkörper losgelassen wird.	
Für eine Auslenkung von x = 0° beträgt die fadenspanndende Komponente die gesamte Gewichtskraft; die rücktreibende Komponente ist daher Null. Für x = 45° sind beide Komponenten gleich groß.	

Beispiel 2:

Ein Körper wird entlang der Geraden g: X = t $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ durch eine Kraft, die durch den Vektor

F = $\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$ bestimmt ist, bewegt.

- ➢ *Berechne den Betrag der Kraftkomponente in Richtung des Weges!*
- ➢ *In welcher Koordinatenebene liegt die Bahn des Körpers?*

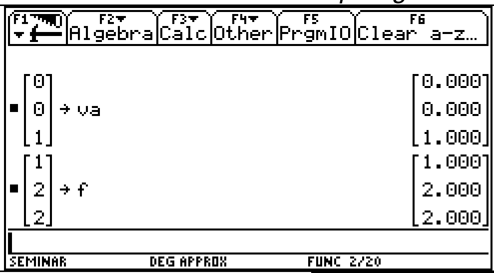
	

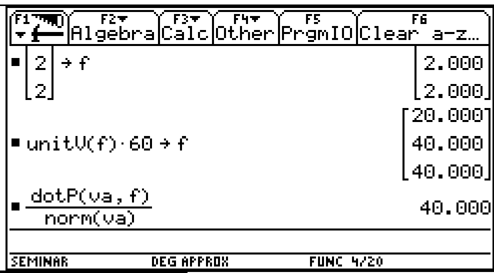
Beispiel 3:

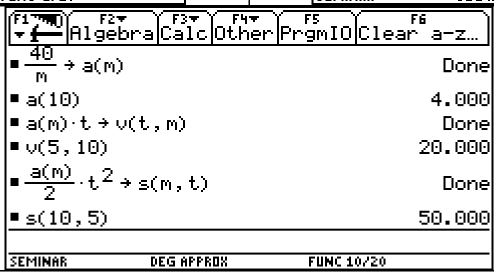
Ein Körper (m = 10 kg) wird entlang der z-Achse bewegt. Auf ihn wirkt eine Kraft vom Betrag 60 N.

Die Richtung dieser Kraft ist durch den Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ gegeben.

- *Bestimme einen dieser Kraft entsprechenden Vektor F und den Betrag der Normalprojektion von F auf die Bahn des Körpers!*
- *Welche Geschwindigkeit hat der Körper nach 5 Sekunden?*
- *Wie weit ist er dann vom Ursprung entfernt?*



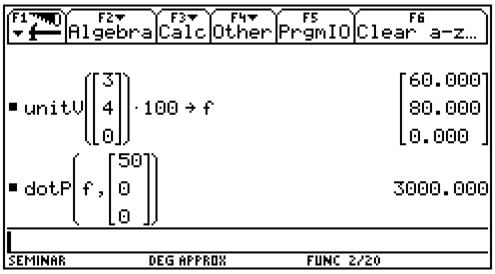




Beispiel 4:

Ein Körper wird von A = 0 nach B (50 / 0 / 0) bewegt, wobei eine Kraft wirkt, deren Betrag 100 N ist und deren Richtung durch den Vektor (3 / 4 / 0) bestimmt ist.

- *Berechne den Betrag der dabei verrichteten Arbeit!*

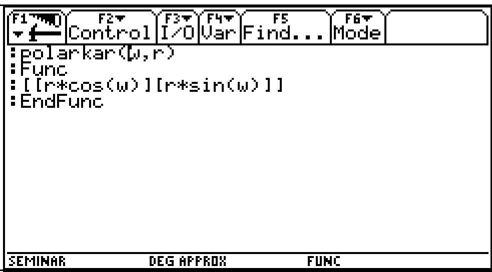


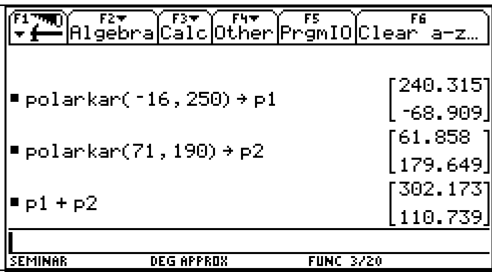
5. Beispiele aus der Trigonometrie

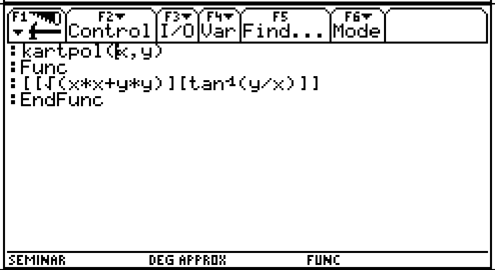
5.1. Addition zweier Kräfte – Polarkoordinaten – kartesische Koordinaten

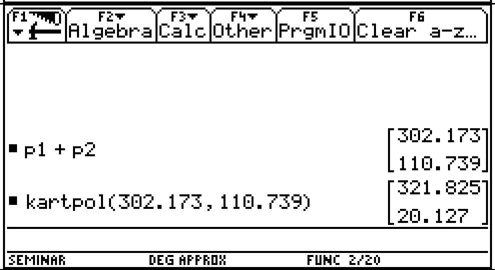
Gegeben sind zwei Kräfte $\vec{OP_1}$ und $\vec{OP_2}$ wobei $\vec{OP_1}$ einen Betrag von 250 N hat und mit der positiven x-Achse einen Winkel von – 16° einschließt, während der Betrag von $\vec{OP_2}$ 190 N beträgt und der Kraftvektor mit der positiven x-Achse einen Winkel von 71° bildet.

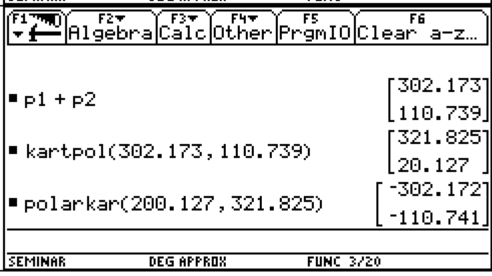
- *Wie groß ist die Resultierende der beiden Kräfte und welchen Winkel schließt sie mit der positiven x-Achse ein?*
- *Welche Kraft hält den beiden Kräften $\vec{OP_1}$ und $\vec{OP_2}$ das Gleichgewicht?*

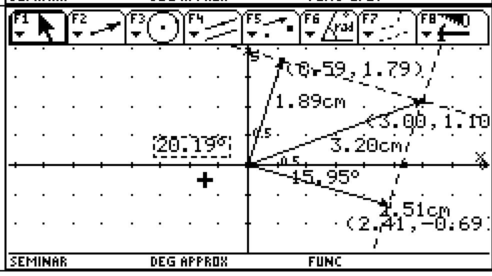






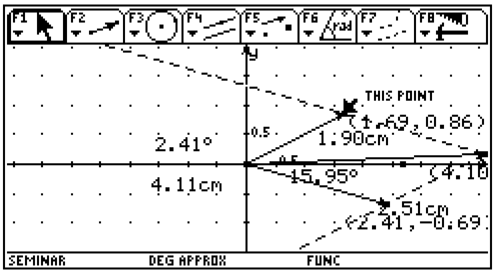




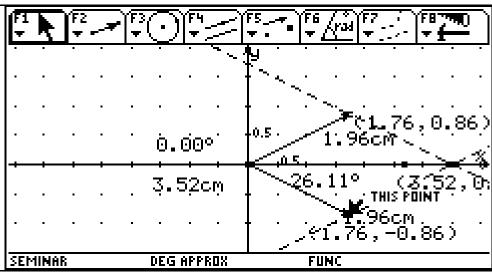


Im Geometrie-Fenster lässt sich nun zum Beispiel untersuchen, wie der Betrag der Resultierenden vom Winkel zwischen den beiden Teilkräften F_1 und F_2 abhängt.

Je kleiner der eingeschlossene Winkel, desto größer wird die resultierende Kraft. Gibt es ein Extremum?



Welche Richtung hat die Resultierende, wenn die Beträge der beiden Kräfte gleich groß sind?
Welche Form nimmt das Kräfteparallelogramm für diesen Fall an?
Erkläre die Lösung geometrisch?



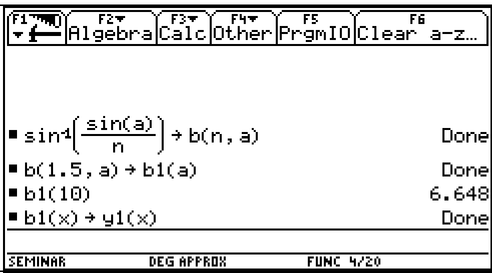
5.2. Brechung und Beugung des Lichts

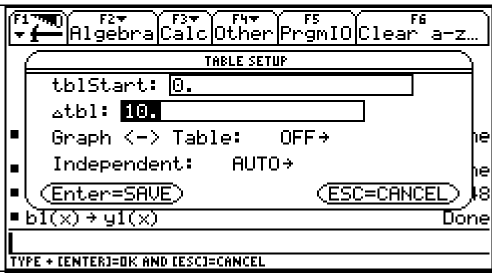
Beispiel 1:
Geht ein Lichtstrahl von einem Medium 1 in ein Medium 2 über, so ändert er seine Richtung. Ist α das Maß des Einfallswinkels und β das Maß des Brechungswinkels , so gilt nach dem Brechungsgesetz

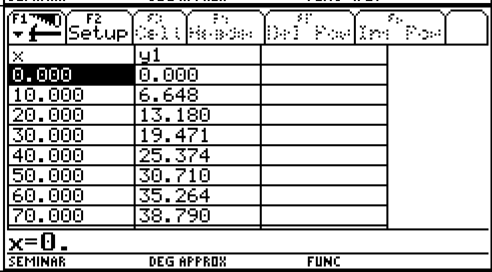
$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, wobei die Konstante n Brechungsindex heißt.

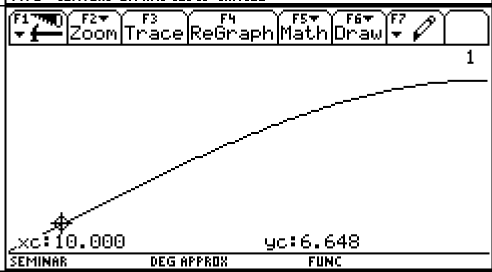
Für den Übergang von Luft in Glas gilt n = 1,5.

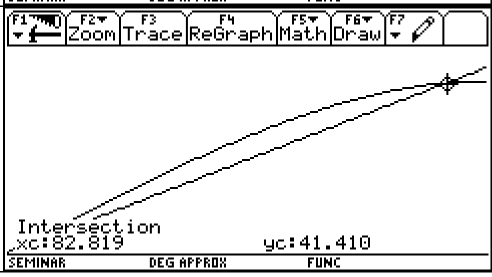
- *Berechne β für α = 0°,10°, 20°,..., 90°!*
- *Für welchen Einfallswinkel ist der Brechungswinkel halb so groß?*
- *Wie groß kann der Brechungswinkel werden?*
- *Gehört zu einem doppelt so großen Einfallswinkel auch ein doppelt so großer Brechungswinkel?*

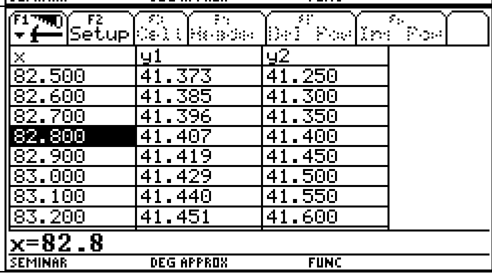












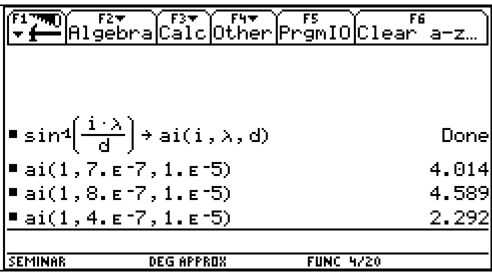
Beispiel 2:

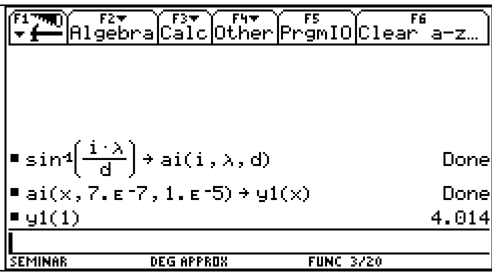
Tritt einfärbiges Licht der Wellenlänge λ durch einen dünnen Spalt mit der Breite d, so wird es gebeugt, und man beobachtet auf einem dahinterliegenden Schirm abwechselnd helle und dunkle Streifen.

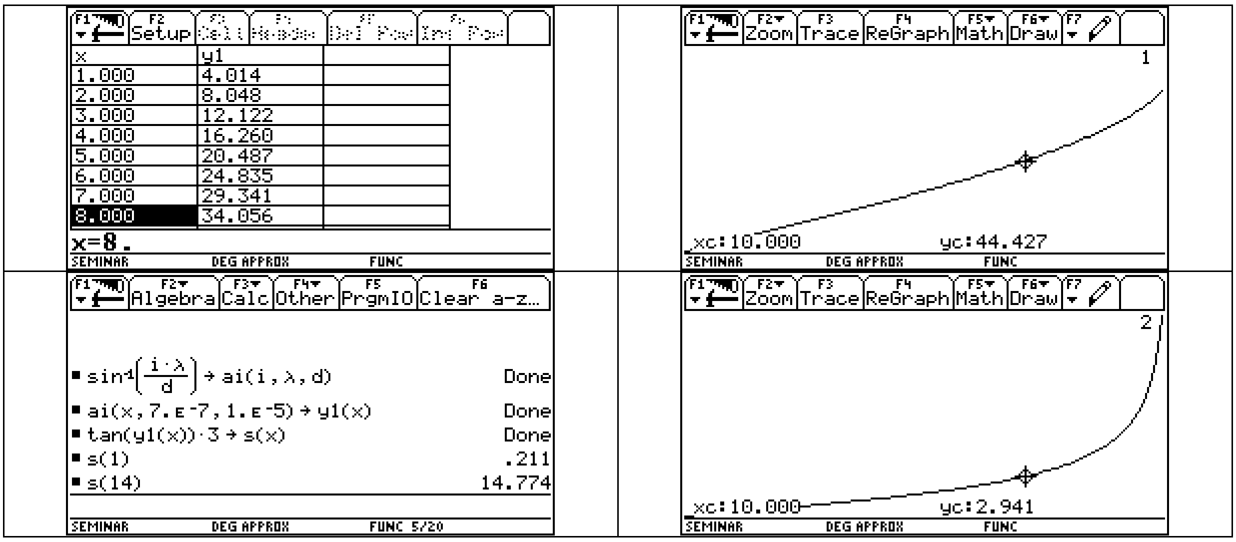
Die Maße α1, α2, α3, ... der Winkel zu den dunklen Streifen können nach der Formel

$\sin\alpha_i = \frac{i \cdot \lambda}{d} (i = 1,2,3....)$ berechnet werden. Der Schirm ist 3 m vom Spalt entfernt.

- *Berechne die ersten drei Winkelmaße und die Abstände zwischen den hellen Streifen auf dem Schirm, wenn d = 10 µm und λ = 700 nm beträgt.*
- *Wie ändern sich die Winkel für gleiche Wellenlänge aber verkleinerte Spaltbreite? Was heißt das für die Abstände der hellen und dunklen Streifen auf dem Schirm?*
- *Wie hängt der Abstand der Streifen von der Wellenlänge des verwendeten Lichts ab?*
- *Was erhalten wir bei der Verwendung von weißem Licht?*





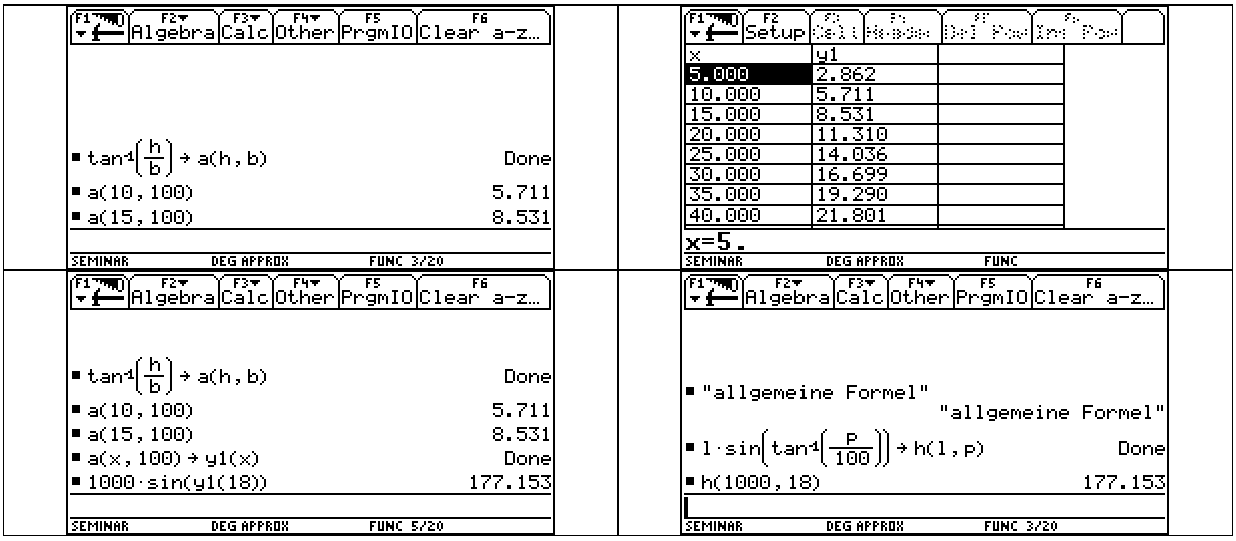


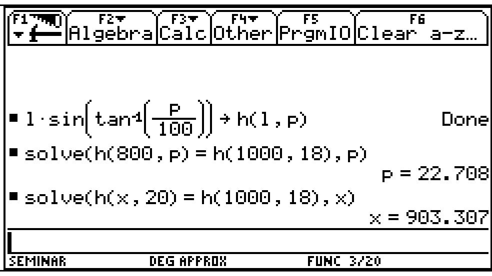
5.3. *Anwendungen aus der Geografie*

Beispiel 1:

Unter der Steigung einer Straße versteht man den Tangens des Winkels, den die Straße mit der Horizontalen einschließt, also $\tan\alpha = \frac{h}{b}$. Dabei ist h der Höhenunterschied, b die Länge der Projektion des Straßenstückes auf die Horizontale.

- *Berechne für folgende Straßensteigungen den dazugehörigen Winkel: 10%, 15%, 20%, 25%.*
- *Jemand legt auf einer unter 18% ansteigenden Straße einen Kilometer zurück. Welchen Höhenunterschied hat er dabei überwunden? Welche Steigung müßte eine Straße haben, damit der berechnete Höhenunterschied schon nach 800 m Weg erreicht ist? Nach wieviel m Weg hat man auf einer 20% ansteigenden Straße den berechneten Höhenunterschied überwunden?*
- *Versuche allgemeine Funktionen aufzustellen!*



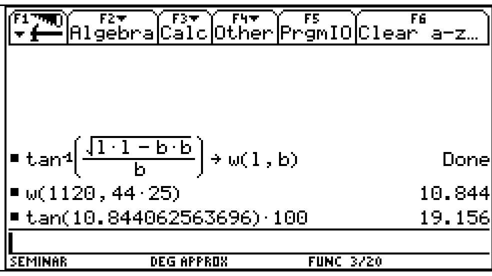


Beispiel 2:
Eine geradlinige Straße ist 1120 m lang und auf einer Karte 1:25000 mit der Länge 44 mm eingezeichnet.

- *Unter welchem Winkel steigt die Straße an?*
- *Wieviel Prozent Steigung hat sie?*

Die Funktion **w(l,b)** gibt den Steigungswinkel in Abhängigkeit von der Länge l der Straße und der Länge der Projektion b der Straße auf der Karte an.

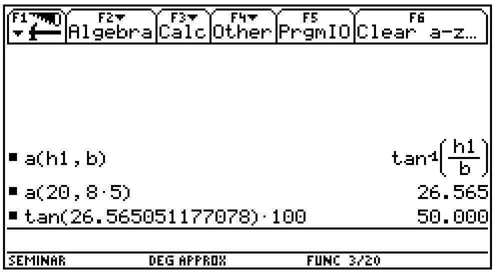
Die Steigung in Prozent errechnet man mit Hilfe des Tanges.



Beispiel 3:

Auf einer Karte (Maßstab 1:5000) sind 20 m – Höhenlinien eingetragen.

- *Unter welchem Winkel steigt das Gelände an einer Stelle an, an der der Abstand zweier benachbarter Höhenlinien mit 8mm gemessen wird?*
- *Wie groß ist die Steigung in Prozent?*

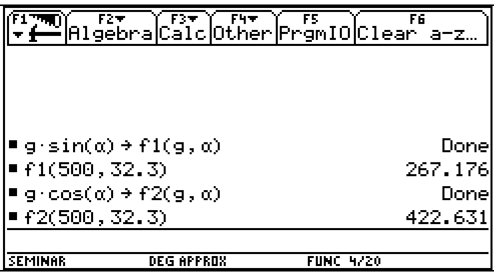


5.4. Weitere physikalische Anwendungen

Beispiel 1:

- *Welche Kraft ist nötig, um einer Walze von 500N Gewicht auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α = 32,3° das Gleichgewicht zu halten?*

Lösungsweg:
Es sei G = 500N der Betrag des Gewichts; F der Betrag der Zugkraft und F_1 der Betrag der treibenden Komponente.
Bei Gleichgewicht muß $F = F_1$ sein. Das Gewicht G und die drückende Komponente F_2 schließen ebenfalls den Winkel α ein (Normalwinkel!). Daraus folgt mit $\sin\alpha = \frac{F_1}{G}$



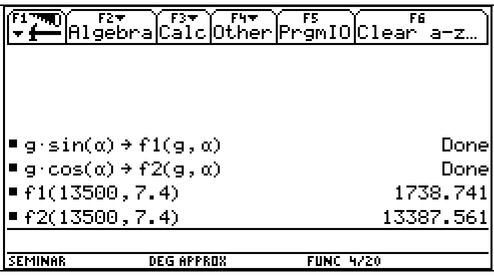
Um der Walze das Gleichgewicht zu halten, ist eine Kraft von 267 N notwendig.

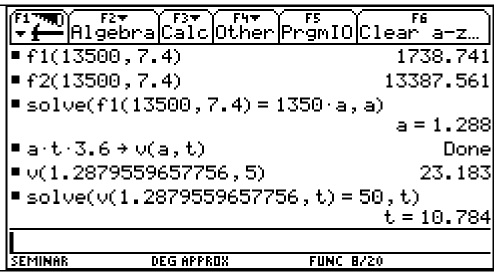
Die Walze drückt mit einer Kraft von etwa 423N gegen die Auflagefläche.

Beispiel 2:

Ein 13500 N schweres Auto parkt auf einer schrägen Straße, die mit der Horizontalebene einen Winkel von 7,4° einschließt. Wie groß ist die Kraft, die

- *das Auto auf der Straße hinunterzieht*
- *das Auto gegen die Straße presst?*
- *Welche Geschwindigkeit erreicht das Auto – bei Vernachlässigung der Reibung – 5 Sekunden nach dem Lösen der Bremsen?*
- *Wann würde das Auto eine Geschwindigkeit von 50 km/h erreichen?*

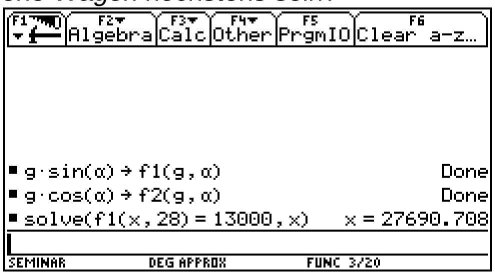




Beispiel 3:

Der Wagen eines unter 28° ansteigenden Schrägaufzugs hängt an einem Seil, das eine maximale Zugkraft von 13000 N aushält.

- *Wie schwer darf der beladene Wagen höchstens sein?*

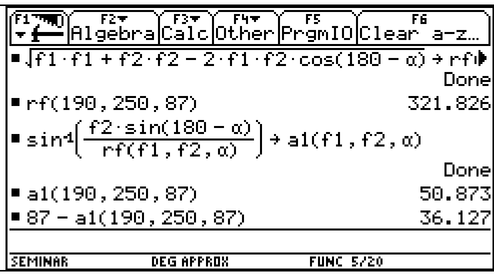


Beispiel 4:

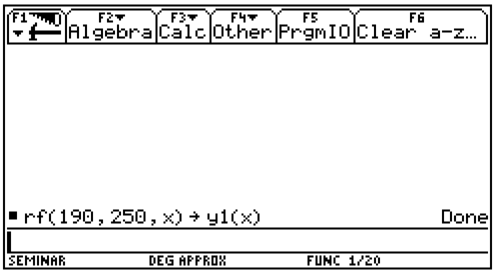
Zwei Kräfte F_1 = 190 N und F_2 = 250 N schließen miteinander einen Winkel von 87° ein.

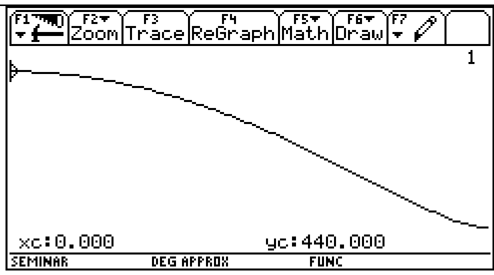
- *Wie groß ist die Resultierende und welche Winkel schließt sie mit den beiden Kräften ein?*

Mit Hilfe des Kosinussatzes lässt sich der Betrag der Resultierenden **rf(f1, f2, α)** berechnen und mit Hilfe des Sinussatzes der Winkel **a1(f1, f2, α)** zwischen F_1 und der Resultierenden.

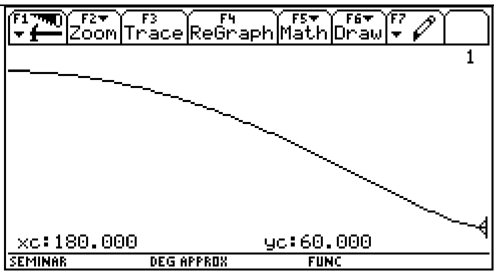


y1(x) gibt für die beiden gegebenen Kräfte in Abhängigkeit vom eingeschlossenen Winkel x den Betrag der Resultierenden an.



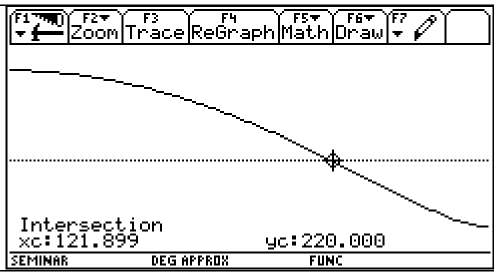


Für x = 0° erhalten wir für den Betrag der Resultierenden die Summe der Beträge der einzelnen Teilkräfte.



Für x = 180° erhalten wir für den Betrag der Resultierenden die Differenz der Beträge der einzelnen Teilkräfte.

Für x ist etwa 122° erhalten wir für die Resultierende 220 N, das ist das arithmetische Mittel von F_1 und F_2.

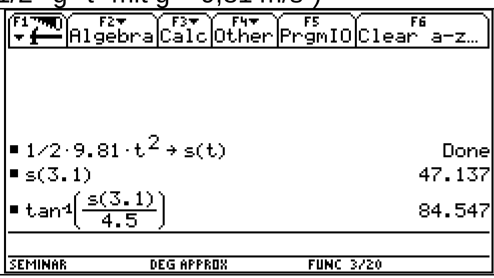


Beispiel 5:

Ein von der Kante des schiefen Turms von PISA losgelassener Stein schlägt nach 3,1 Sekunden am Boden 4,5 m vom Turm entfernt auf. Um welchen Winkel ist der Turm ungefähr geneigt?

(Für den freien Fall gilt für den nach einer Zeit t Sekunden zurückgelegten Weg s in Metern:

$s = 1/2 \cdot g \cdot t^2$ mit $g = 9{,}81\ m/s^2$)

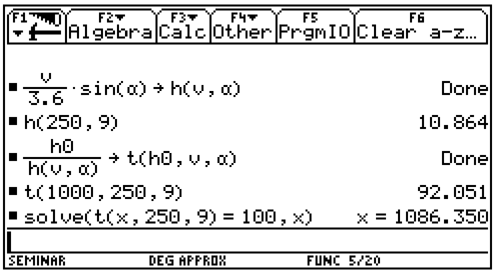


Die Neigung des schiefen Turms zu PISA beträgt etwa 84,6°.

Beispiel 6:

Ein mit v = 250 km/h fliegendes Flugzeug fliegt einen Landeplatz an. Seine Flugrichtung bildet dabei mit der Horizontalen einen Winkel von $\alpha = 9°$.

- *Um wieviel senkt es sich pro Sekunde?*
- *Wie müßte die Flugrichtung sein, damit sich das Flugzeug um die doppelte Distanz senkt?*
- *Wie lange dauert der Landeanflug, wenn er in einer Höhe von 1000 m beginnt?*
- *Aus welcher Höhe beginnt der Landeanflug, wenn er 100 s dauert?*



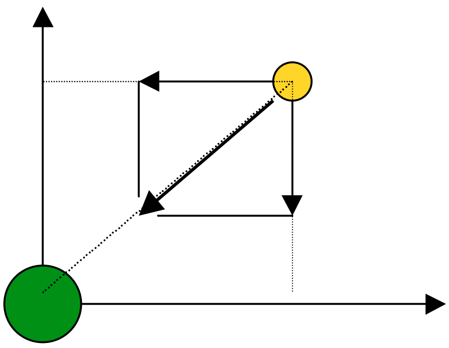
6. Modellbilden mit Hilfe des TI92

6.1. Numerische Berechnung von Satellitenbahnen

(aus „The Feynman Lectures on Physics“)

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \text{ mit } \vec{F} = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



Die Gravitationskraft zwischen Erde und Satellit in einem zweidimensionalen Koordinatensystem (Bahnebene)

Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, die durch die beiden Vektoren $\vec{r}$ (Radiusvektor von der Erde zum Satellit) und $\vec{v}$ (Geschwindigkeitsvektor) definiert ist. Die Erde befindet sich im Ursprung unseres zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems.

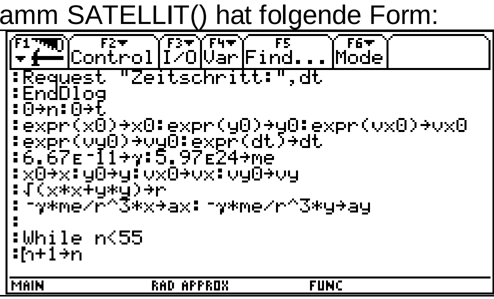
Für die beiden Kraftkomponenten F_x und F_y erhalten wir

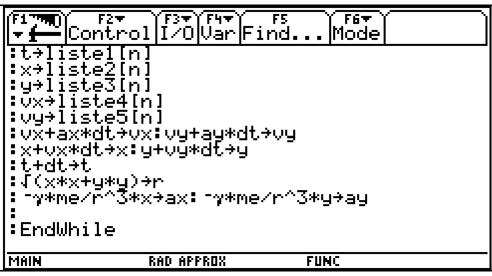
$$F_x = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{x}{r^3}$$

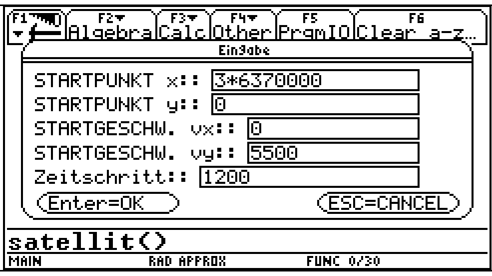
$$F_y = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{y}{r^3}$$

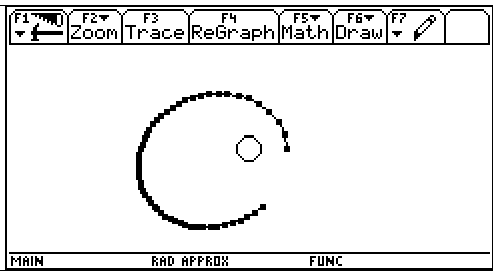
mit $x^2 + y^2 = r^2$.

Mit der Methode „kleiner Schritte“ , der sogenannten numerischen Methode können wir die beiden Differentialgleichungen lösen. Das entsprechende Programm SATELLIT() hat folgende Form:









Mit Hilfe des Programmes SATELLIT() können wir den Satelliten in kleinen Schritten um die Erde jagen. Wie man aus den berechneten Punkten sieht, scheint er sich wirklich auf einer Ellipse zu bewegen, wie von Kepler beschrieben: rasch in Erdnähe und langsamer in großer Entfernung von ihr, analog zur Bewegung der Planeten um die Sonne. Mit diesem Programm können wir also wirklich Planeten – und Satellitenbahnen berechnen.

7. Weitere Anwendungsaufgaben

7.1. Arbeit im Gravitationsfeld der Erde – Elementare Integration (Grundintegral)

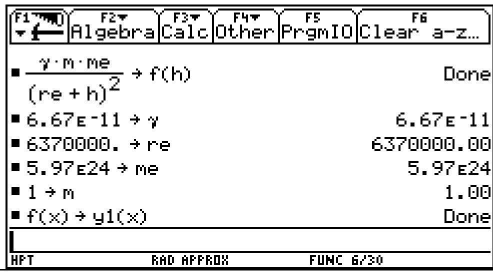
Welche Arbeit W ist aufzuwenden, um eine an der Erdoberfläche befindliche Masse m aus dem Einflussbereich der Erde heraus zu bringen?
Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss daher dieser Körper von der Erdoberfläche abgeschossen werden?
(Erdradius: r_E = 6370 km; Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²; Erdmasse $m_E = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg)

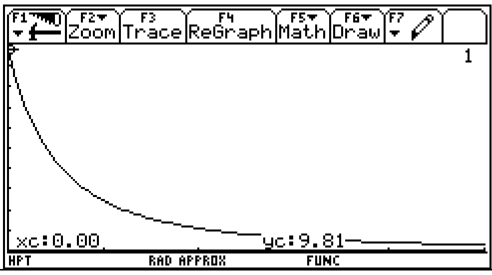
Wir benützen zur Berechnung das Gravitationsgesetz

$$F_G(r) = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

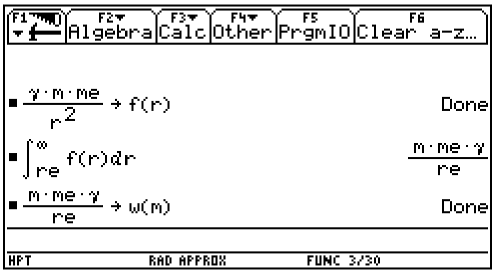
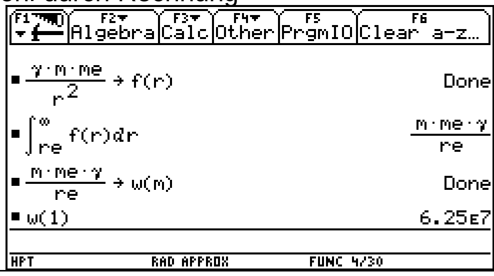
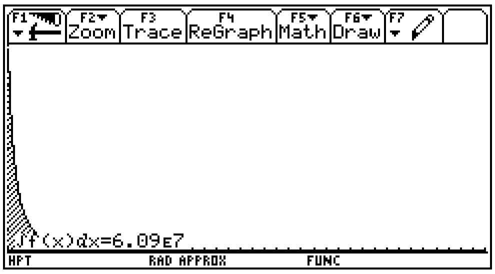
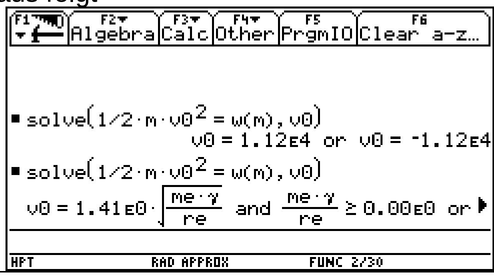
Damit ist die Kraft festgelegt mit der der Körper der Masse m von der Erde angezogen wird und gegen diese Arbeit verrichtet werden muss.

Diese Kraft ist nicht konstant, sondern ist umgekehrt proportional zu h² (h .... Höhe über der Erdoberfläche)





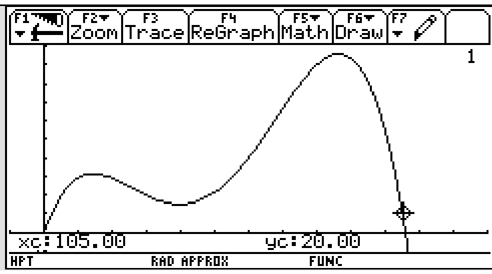
Aus der Definition der Arbeit gleich „Kraft mal Weg“ ergibt sich die Notwendigkeit der Flächenberechnung, die der Graph für die Gravitationskraft im 1. Quadranten mit der x-Achse einschließt.
Die Anziehungskraft durch die Erdkugel verschwindet erst in großer Entfernung von der Erdoberfläche ($r \to \infty$). Daher ist die Integration von $r = r_E$ bis hin zu $r = \infty$ zu erstrecken.

<table>
<tr>
<td>Wir berechnen mit dieser ortsabhängigen Kraft das Arbeitsintegral und erhalten

</td>
<td>Diese Arbeit muss der Masse m beim Verlassen der Erdoberfläche in Form von kinetischer Energie zugeführt werden. Für m = 1kg erhalten wir sowohl durch Rechnung

</td>
</tr>
<tr>
<td>als auch aus der Grafik näherungsweise (weil wir hier nur innerhalb des Fensters integrieren können)

</td>
<td>Soll der Körper nun den Anziehungsbereich der Erde verlassen, so muss seine anfängliche kinetische Energie dazu ausreichen, die Gravitationsarbeit zu verrichten, d.h. $E_{Kin} = W$. Daraus folgt

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Die auch als Fluchtgeschwindigkeit bezeichnete Abschussgeschwindigkeit der Masse m beträgt 11,2 km/s und ist (unabhängig von der Masse) für alle Körper gleich.
Sie hängt von der Masse und dem Radius des Zentralkörpers ab; direkt proportional zur Wurzel aus der Masse des Zentralkörpers und umgekehrt proportional zur Wurzel aus seinem Radius. Hat ein Körper bei gleichem Radius wie die Erde die vierfache Erdmasse, so ist seine Fluchtgeschwindigkeit doppelt so groß, wie die der Erde.</td>
</tr>
</table>

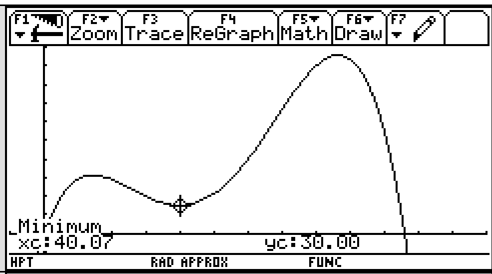
7.2. Ein Ballonflug – Funktionsuntersuchungen

<table>
<tr>
<td colspan="2">Bei einem Flug im Heißluftballon liegt der Start in der Höhe 0, die Landung erfolgt (nach 1 Stunde 45 Minuten) auf einer 20 m höher gelegenen Plattform. Nach sehr genauen Messungen und Berechnungen ergibt sich folgende Funktion

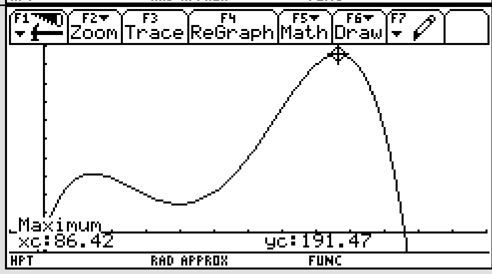
$h(t) = -2461/49140000 \cdot t^4 + 7127/756000 \cdot t^3 - 19399/36400 \cdot t^2 + 55633/5460 \cdot t$

welche die Flughöhe in Meter in Abhängigkeit von der Flugzeit in Minuten angibt.
Es gilt 0 min ≤ t ≤ 105 min.</td>
</tr>
<tr>
<td>Diese Funktion soll durch eine qualitative Beschreibung untersucht werden.
Dazu definieren wir im Y-Editor eine entsprechende Funktion und stellen ihr Schaubild im Grafik-Fenster dar.
Die Flugkurve kann dann durch Verwenden u.a. der Wörter „steigen“, „sinken“, „Hochpunkt“, „Tiefpunkt“ beschrieben werden.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

- *In welchen Zeitintervallen befindet sich der Ballon im Steigflug?*
- *In welchen Zeitintervallen befindet sich der Ballon im Sinkflug?*
- *Zu welchem Zeitpunkt ist die Flughöhe maximal bzw. minimal?*

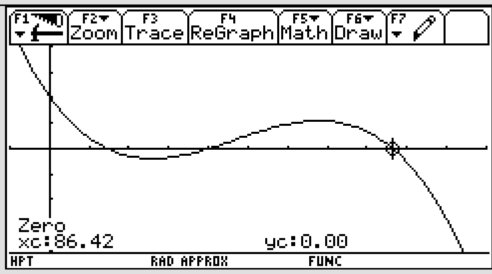


Zum Zeitpunkt t_0 = 40 min ist die Flughöhe minimal, wenn eine hinreichend kleine Zeitspanne betrachtet wird. Lokal, das heißt in der Umgebung von t_0 ist $h(t_0)$ = 30 m der kleinste Funktionswert; außerhalb dieser Umgebung treten auch kleinere Funktionswerte auf; wir sprechen daher von einem *lokalen* Minimum.
Nach etwa 86,4 min erreicht der Ballon seine größte Höhe, hier liegt ein *globales* Maximum vor.

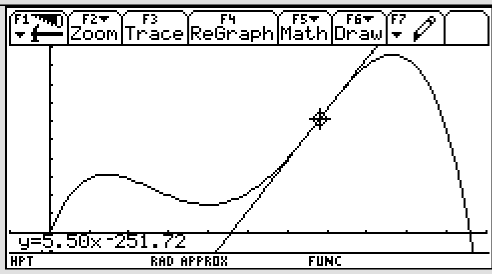


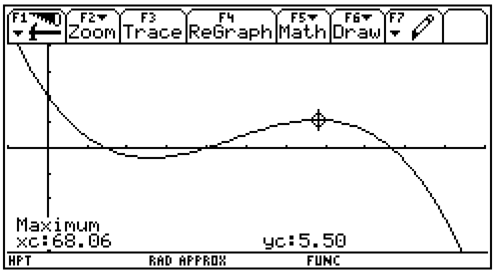
Die nebenstehende Abbildung stellt die Geschwindigkeit des Ballons dar.

- *Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem Hochpunkt bzw. Tiefpunkt und der Geschwindigkeit?*
- *Welches Vorzeichen hat die Geschwindigkeit während des Steig- bzw. Sinkfluges?*
- *Wie drückt sich der Betrag der Geschwindigkeit in der Flugkurve aus?*

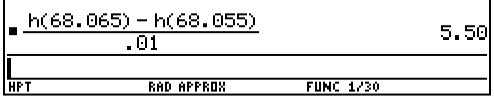


- *Wo sind die Stellen im Schaubild der Flugkurve, wo die Geschwindigkeit minimal bzw. maximal ist und was kann man dort über den Kurvenverlauf aussagen?*

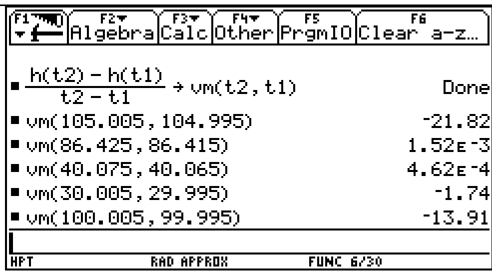




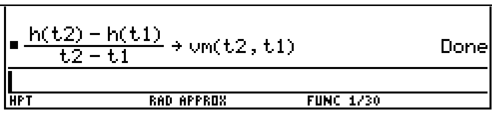
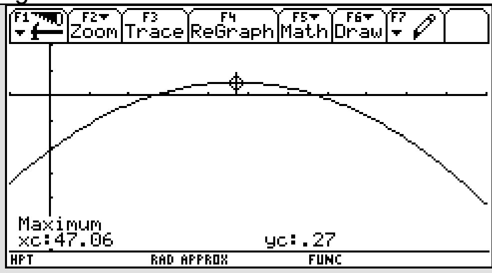
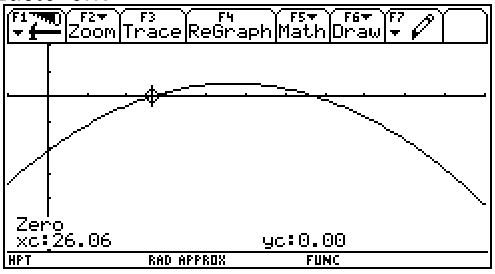
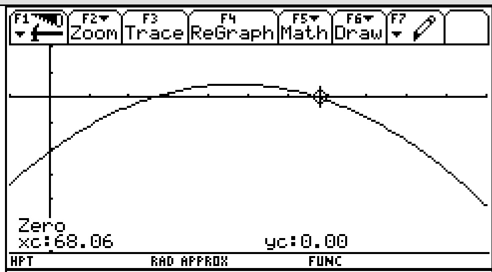
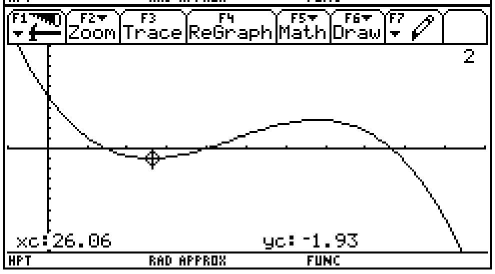
Wir sehen, dass die maximale Geschwindigkeit mit der Steigung der Tangente an der betreffenden Stelle im Zeit-Weg-Diagramm übereinstimmt. An dieser Stelle gibt es einen sogenannten Wendepunkt.
Diese Geschwindigkeit können wir näherungsweise auch berechnen, wenn wir das Zeitintervall sehr klein wählen; für Δt = 0,01 min ergibt sich für v(68,06) = 5,5 m/min



Wir können nach der Definition der mittleren Geschwindigkeit v gleich zurückgelegter Weg durch dafür benötigte Zeit eine allgemeine Funktion vm(t_2, t_1) für unseren Ballonflug festlegen und uns dann durch geeignete Wahl des Zeitintervalls zu jedem beliebigen Zeitpunkt hinreichend genau der Momentangeschwindigkeit nähern.



Die berechneten Werte können im Zeit-Weg-Diagramm mit Hilfe der Tangente überprüft

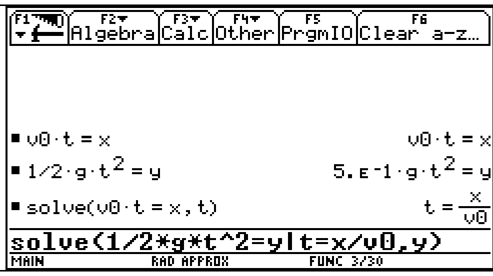
	werden, denn wir wissen schon, dass die Momentangeschwindigkeit an der Steigung der Tangente an die Zeit-Weg-Kurve abgelesen werden.
Was können wir über die Geschwindigkeitsänderung aussagen? Diese wird analog zu den bisherigen Erkenntnissen durch die Steigung der Zeit-Geschwingigkeitskurve definiert. Die Änderung der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitintervall wird als Beschleunigung bezeichnet und ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.	
Was bedeuten positive Beschleunigungswerte, was negative Werte? Welche Bedeutung haben die Nullstellen der Zeit-Beschleunigungsfunktion? Gibt es an diesen Stellen im Zeit-Weg- bzw. im Zeitgeschwindigkeits-Diagramm Besonderheiten festzustellen? 	 
An den Nullstellen der Beschleunigungsfunktion hat die Geschwindigkeitsfunktion ihre lokalen Extremwerte (Minimum und Maximum); d.h. in einer sehr kleinen Umgebung um diese Stellen ändert sich die Geschwindigkeit nicht bzw. kaum. Im Zeit-Weg-Diagramm sind an diesen Stellen die sogenannten Wendepunkte zu finden.	

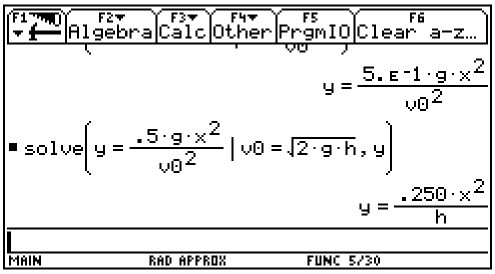
7.3. Wurfparabel eines Wasserstrahls

Ein Zylinder ist bis zu einer Höhe h mit Wasser gefüllt. In der Tiefe h (von der als unveränderlich angenommenen Wasseroberfläche aus gerechnet) befindet sich eine seitliche Öffnung, aus der das Wasser in waagrechter Richtung mit der nach der Formel $v_0 = \sqrt{2gh}$ berechneten Geschwindigkeit austritt. An welcher Stelle (in welcher Tiefe h) des Gefäßes muss man diese Öffnung anbringen, damit der seitlich austretende Wasserstrahl den Boden an einer möglichst weit entfernten Stelle B (in horizontaler Richtung gemessen) trifft?

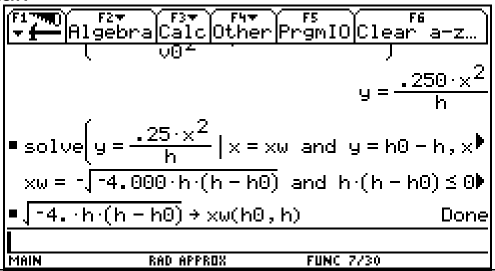
Die Bewegung des Wasserstrahls kann in guter Näherung als ein waagrechter Wurf im luftleeren Raum betrachtet werden; die Bewegung in der x-Richtung erfolgt mit der konstanten Geschwindigkeit v_0, in der y-Richtung gelten die Gesetze des freien Falls.	Die Koordinaten eines Wasserteilchens zur Zeit t lauten: $x = v_0 \cdot t$ und $y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

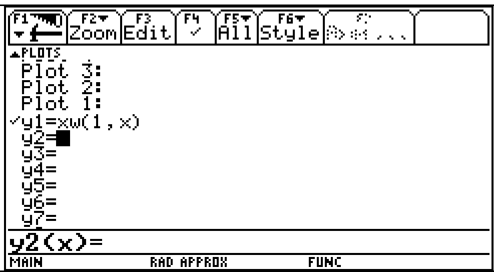
Durch Elimination des Zeitparameters t und Einsetzen der Formel für die Austrittsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$ erhalten wir als Gleichung des Wasserstrahls die Wurfparabel

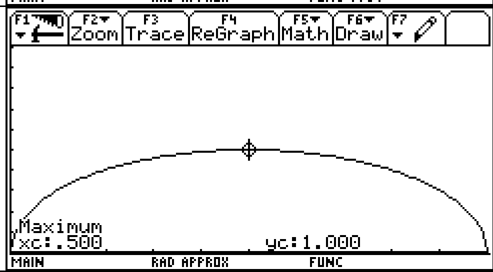


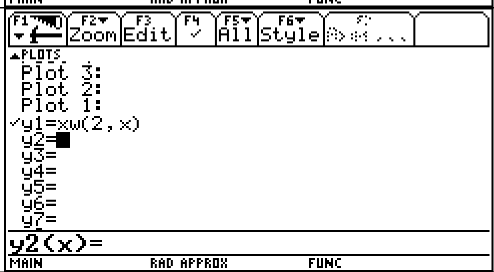


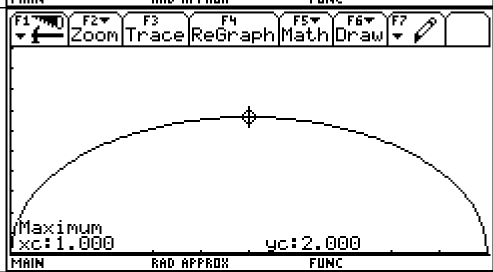
In diese Gleichung setzen wir die Koordinaten des Auftreffpunktes B(x_W / h_0-h) ein und lösen nach x_W auf:

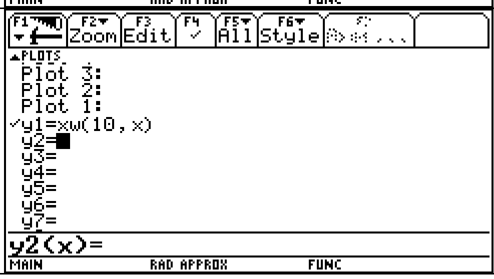


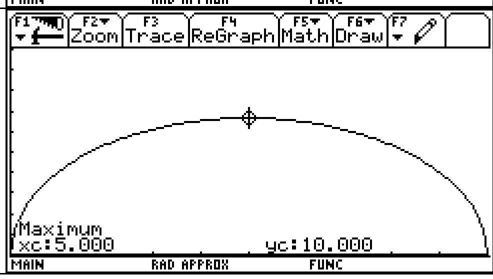






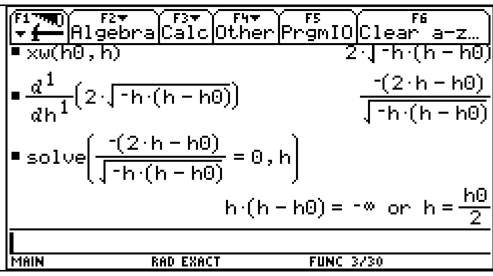




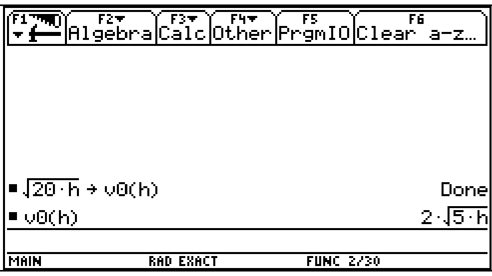
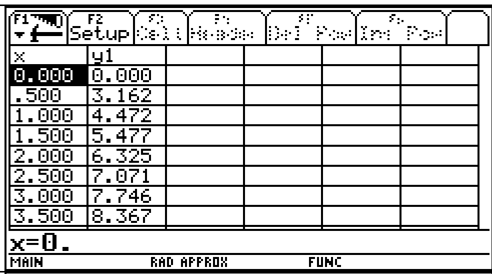
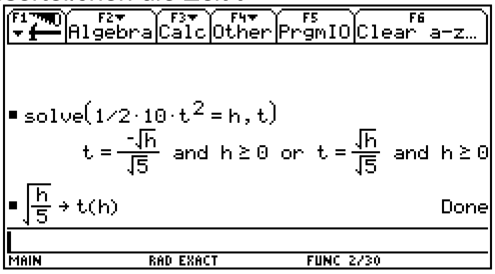
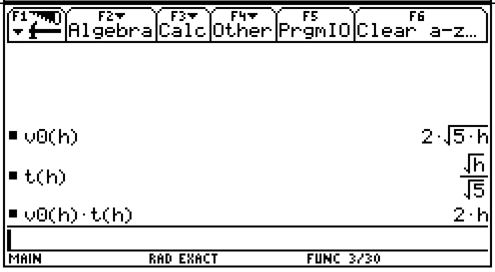


Es liegt die Vermutung nahe, dass die „Wurfweite“ dann ihren maximalen Wert annimmt, wenn die Austrittsöffnung genau in der Mitte des Gefäßes liegt!

Wenn zu dem betreffenden Zeitpunkt, wo das Beispiel bearbeitet wird, schon Kenntnisse der Differentialrechnung bei den Schülerinnen und Schülern zu erwarten sind, kann die Aufgabe auch allgemein gelöst werden; es ergibt sich h = ½ h_0.



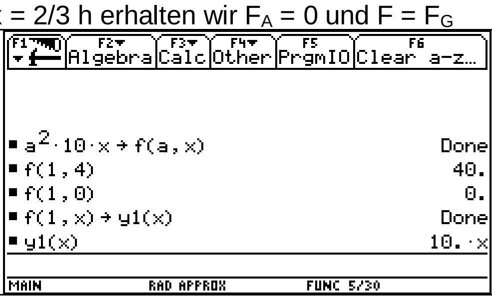
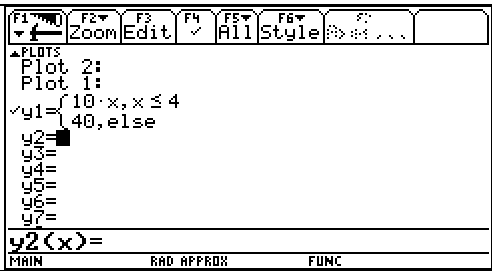
Die Austrittsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$ beträgt in Abhängigkeit von h

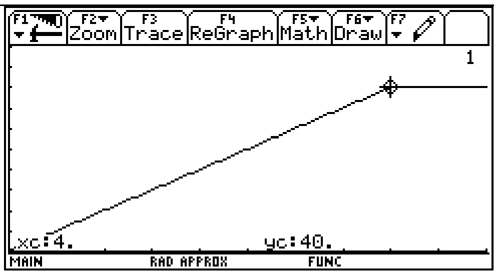
	
Zum Durchfallen der Höhe h braucht ein Wasserteilchen die Zeit t 	 Für die maximale Weite ergibt sich unabhängig von h_0 immer 2h!

7.4. *Welche Arbeit muss verrichtet werden?*

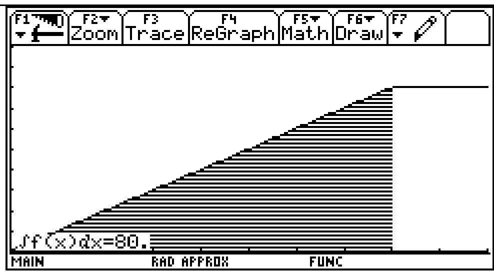
Ein Holzquader mit quadratischer Grundfläche schwimmt im Wasser, sodass nur sein oberstes Drittel sichtbar ist.

- *Welche Dichte ρ_{Holz} hat der Zylinder?*
- *Welche Arbeit muss beim Herausziehen des Körpers aus dem Wasser verrichtet werden? (a = 10 cm, h = 6 dm)*

Ein Körper taucht soweit in eine Flüssigkeit ein, bis der Auftrieb (= Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge) gleich dem Gewicht des Körpers ist. Es gilt: Auftrieb $F_A = V_E \,.\, \rho_{Fl} \,.\, g$ = *Gewicht* F_G	Das eingetauchte Volumen V_E beträgt 2/3 von $V_{Körper}$; $F_G = \rho_{Holz} \cdot V_{Körper} \,.\, g$ Im Gleichgewichtszustand gilt: $V_E \,.\, \rho_{Fl} \,.\, g = \rho_{Holz} \cdot V_{Körper} \,.\, g$ und mit $V_E = 2/3\, V_{Körper}$ erhalten wir $\rho_{Holz} = 2/3 \cdot \rho_{Fl}$
Der Auftrieb F_A hängt nun von dem beim Herausziehen zurückgelegten Weg x bzw. von der sich ändernden Eintauchtiefe 2/3 h - x des Körpers ab; für x = 0 ergibt sich $F_A = F_G$ und damit die resultierende „Gewichtskraft" F = 0 und für x = 2/3 h erhalten wir $F_A = 0$ und $F = F_G$	$F(x) = F_G - F_A(x)$ $F(x) = 2/3 \cdot a^2 h \cdot g - a^2(2/3\,h - x) \cdot g$ $F(x) = a^2 \cdot g \cdot (2/3\,h - 2/3\,h + x)$ $F(x) = a^2 \cdot g \cdot x$
	



Die erforderliche Kraft zum Herausziehen des Körpers steigt von 0 auf 40N an; sobald der Körper nicht mehr eintaucht muss beim weiteren Heben gegen die Gewichtskraft (= 40 N) Arbeit verrichtet werden.



Beim Herausziehen des Holzquaders aus dem Wasser muss eine Arbeit von 8 Joule verrichtet werden.

Im Anschluss an diese einfache Aufgabe könnte die Arbeit zum Herausziehen weiterer Körper, z.B. Kegel, Kugel, Pyramide,... untersucht und berechnet werden.

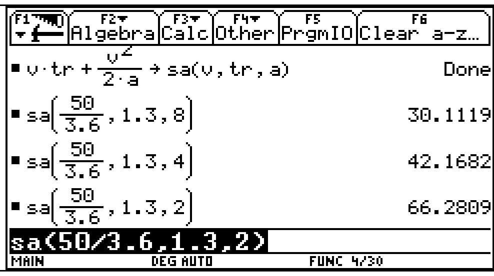
8. Beispiele zur Verkehrserziehung

Der Bremsvorgang (Reaktionsweg – Bremsweg – Anhalteweg)

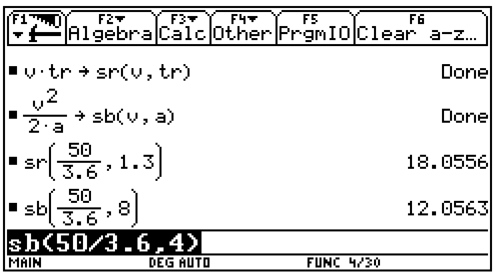
Den gesamten zurückgelegten Weg vom Erkennen der Bremsnotwendigkeit bis zum Stillstand des Fahrzeuges nennt man die Anhaltestrecke s_A. Diese setzt sich aus der Vorbremsstrecke s_V und der Bremsstrecke s_B zusammen. Wenn wir in erster Näherung die Bremsverzögerung a als konstant ansehen, können wir zur rechnerischen Behandlung des Bremsvorganges die Gesetze der gleichmässig beschleunigten Bewegung heranziehen. Wir erhalten dann $s_A = v \cdot t_R + \frac{v^2}{2a}$, d.h. die Anhaltestrecke hängt ab von

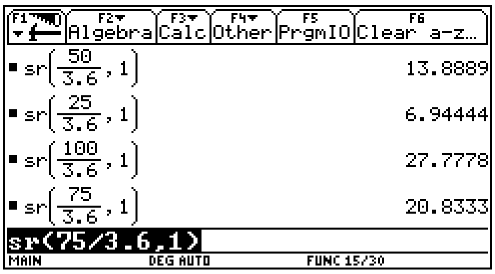
- der Fahrzeuggeschwindigkeit v
- der Reaktionszeit des Fahrers t_R
- der Bremsverzögerung a

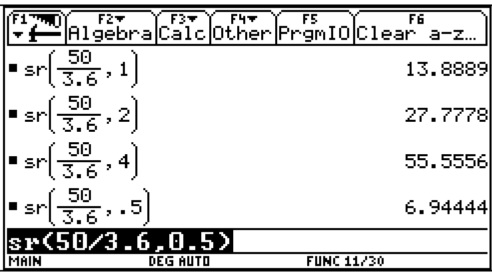
Wir definieren die Funktion $s_A(v, t_R, a)$ im HOME-Screen des TI92 und ermitteln durch Parameterstudien, wie sich eine Änderung der einzelnen Parameter auf den Anhalteweg auswirkt.

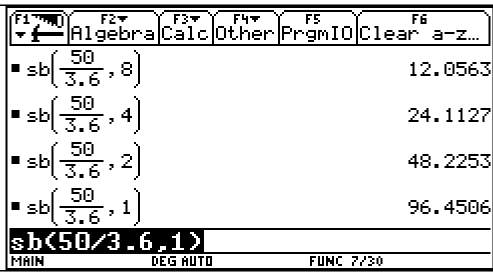


So stellen wir z.B. fest, dass eine Verringerung der Bremsverzögerung eine Vergrößerung des Anhalteweges hervorruft; wir erkennen aber auch dass die beiden Größen keineswegs direkt oder indirekt proportional zueinander sind.
Das wollen wir genauer untersuchen, indem wir Reaktionsweg und Bremsweg extra berechnen





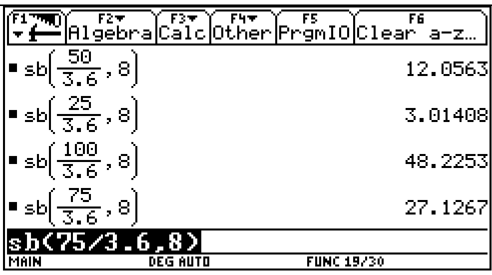




Der *Reaktionsweg* ist bei gleichbleibender Geschwindigkeit direkt proportional zur Reaktionszeit und bei gleicher Reaktionszeit direkt proportional zur Geschwindigkeit.

Der *Bremsweg* ist bei gleicher Geschwindigkeit indirekt proportional zur Bremsverzögerung, d.h. soll der Bremsweg möglichst klein sein, so muss darauf geachtet werden, dass a möglichst gross wird.

Wie aber hängt nun der Bremsweg von der Geschwindigkeit ab?

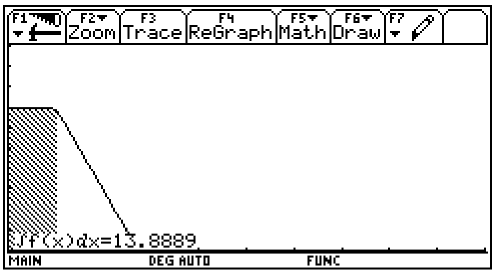


Halbieren wir die Geschwindigkeit, so können wir den Bremsweg auf ein Viertel des ursprünglichen Wertes reduzieren;

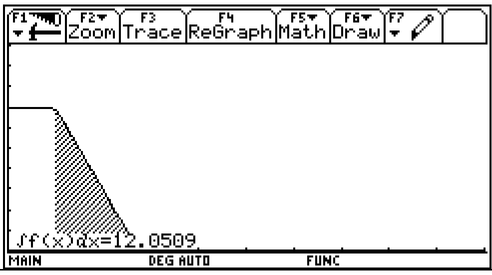
fahren wir hingegen mit doppelter Geschwindigkeit, so erhöht sich der Bremsweg auf das Vierfache, bei dreifacher Geschwindigkeit auf das Neunfache, ..., bei n-facher Geschwindigkeit auf das n^2-fache; d.h.

der Bremsweg nimmt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zu.

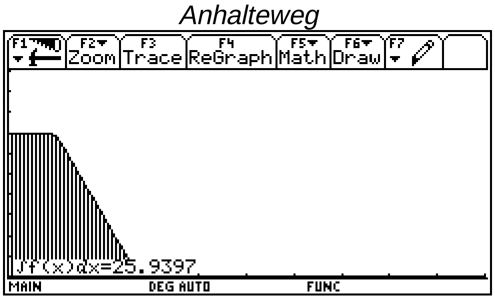
Reaktionsweg



Bremsweg



Anhalteweg

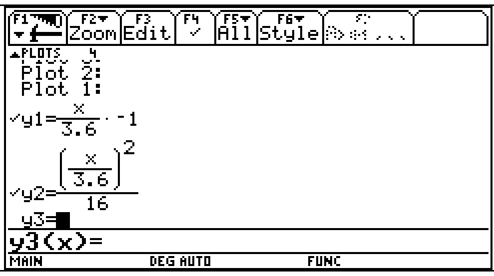


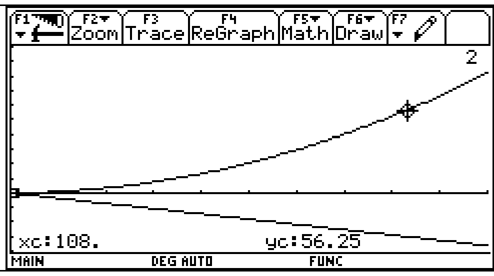
Sowohl die Bilder als auch die zugehörigen Zahlenwerte zeigen auf, dass sich der Anhalteweg aus Reaktions – und Bremsweg zusammensetzt.

Der Schüler kann nun diese graphischen Aussagen auf die weiteren oben definierten Funktionen y2 bis y4 transferieren und sehr rasch Ergebnisse erhalten.

Wollen wir den Anhalteweg als Funktion der Geschwindigkeit (wobei die Reaktionszeit und die Bremsverzögerung konstant angenommen werden) grafisch bzw. tabellarisch darstellen, so müssen wir die Funktion wieder stückweise definieren:

Den Reaktionsweg (multipliziert mit (-1), damit der Reaktionsweg in m als Funktion der Geschwindigkeit in km/h unterhalb der v-Achse abgetragen wird) speichern wir unter y1(x) ab, den Bremsweg unter y2(x); im Y-Editor bzw. im Grafik-Fenster erhalten wir dann:

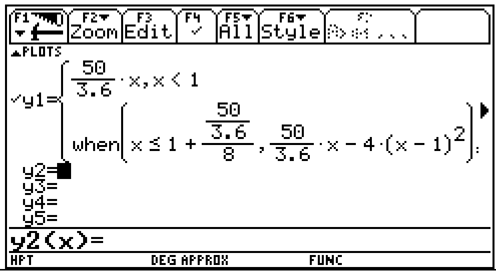




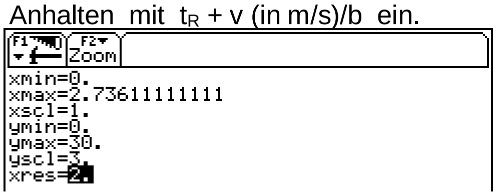
Damit zeigt das Diagramm oberhalb der v-Achse die Bremsstrecke als Funktion der Geschwindigkeit v für die Bremsverzögerung a = 8 m/s² und unterhalb der v-Achse ist der Reaktionsweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für eine Reaktionszeit von einer Sekunde aufgetragen. Die Addition der beiden Wegstrecken liefert die Anhaltestrecke bei der entsprechenden Geschwindigkeit.

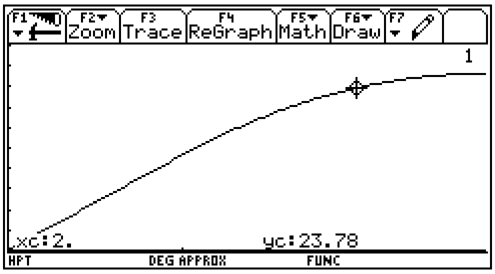
Funktion für den bei einem Bremsvorgang zurückgelegten Weg

- für eine Fahrzeuggeschwindigkeit v = 50 km/h
- eine Reaktionszeit des Fahrers t_R = 1s und
- eine Bremsverzögerung b = 8 m/s²

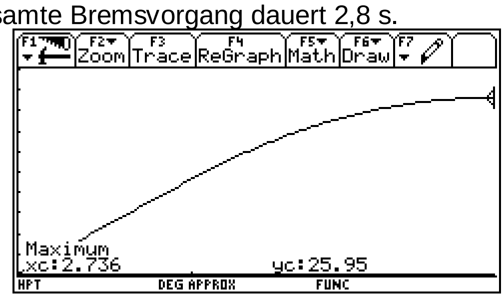


Im Window-Fenster gibt man für xmax die Zeit bis zum Anhalten mit t_R + v (in m/s)/b ein.

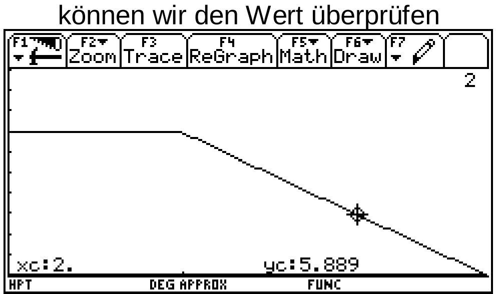


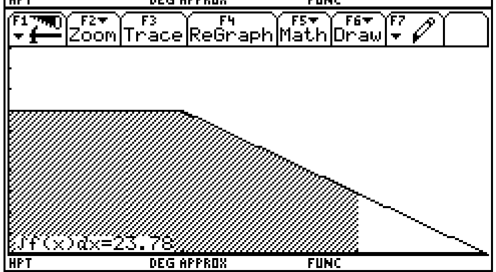


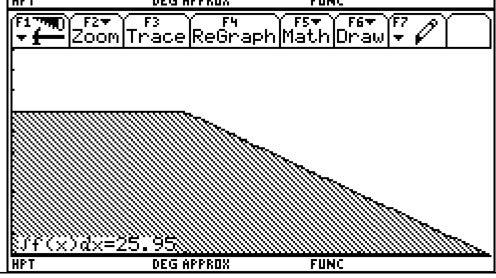
Nach 2 Sekunden hat das Fahrzeug ca. 24 m zurückgelegt; es hat noch eine Restgeschwindigkeit von etwa 21,2 km/h (= 5,9 m/s).
Der gesamte Anhalteweg beträgt etwa 26 m; der gesamte Bremsvorgang dauert 2,8 s.



Im zugehörigen Zeit - Geschwindigkeitsdiagramm können wir den Wert überprüfen







*Eine gute Näherung erhalten wir aber auch mit den **Faustformeln**, die in der **Fahrschule** verwendet werden:*

Reaktionsweg in m gleich (Geschwindigkeit in km/h dividiert durch 10) multipliziert mit der Zahl 3 **Bremsweg** in m gleich (Geschwindigkeit in km/h dividiert durch 10) hoch 2

Wenn wir diese Formeln mit den exakten physikalischen Formeln für den Reaktionsweg s_R und den Bremsweg s_B vergleichen, nämlich

- $s_R = v \cdot t_R$ (v in m/s, Reaktionszeit t_R in s), und
- $s_B = v^2/(2 \cdot a)$ (v in m/s, Bremsverzögerung a in m/s²),

so fällt auf, dass den Faustformeln folgende Annahmen zugrunde liegen:

➢ *eine **Reaktionszeit** von etwa einer Sekunde und eine **Bremsverzögerung** von etwa 4 m/s².*

Bezogen auf die Zahlen im Beispiel 2 (Zeitersparnis durch erhöhte Geschwindigkeit ?) könnten wir die Frage stellen, wie sich die „notwendigen“ Geschwindigkeitserhöhungen jeweils auf den Anhalteweg auswirken.
Der Schüler sollte erkennen, daß eine Verdopplung der Fahrgeschwindigkeit eine Verdopplung des Reaktionsweges und eine Vervierfachung des Bremsweges mit sich bringt - bei sonst konstanten Voraussetzungen und er sollte sich bewußt machen, wieviel mehr Gefahren ein paar Minuten Geschwindigkeitsgewinn schon bei relativ kleinen Geschwindigkeiten bedeuten.

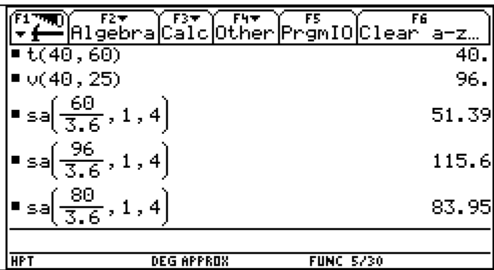
Noch drastischer wird die Situation, wenn wir dieses Beispiel für einen **Autolenker** modifizieren:

Vorgaben: Eine Strecke von 40 km wird normalerweise mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h zurückgelegt.

Fragestellungen:

➢ *Reichen 20 km/h Geschwindigkeitserhöhung , um 15 min einzusparen?*
(nein)

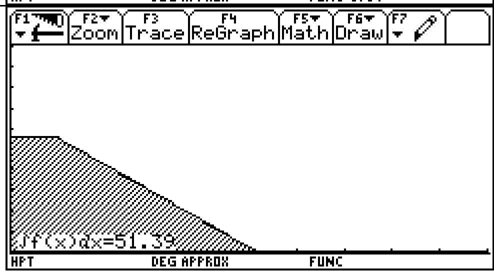
➢ *Wie schnell muß man fahren, um 15 min einzusparen?*
(96 km/h)

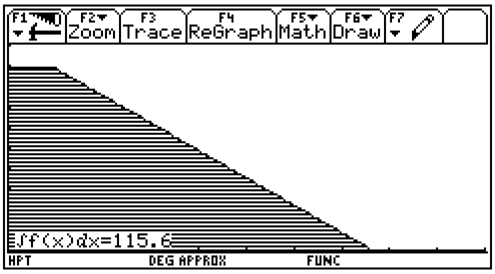


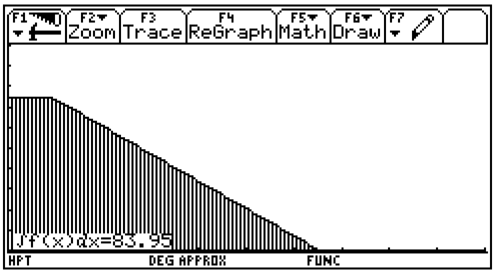
➢ *Wie sieht die Situation bei den verschiedenen Geschwindigkeiten aus ,falls sich eine Gefahrensituation ergibt, die den Autolenker zum Anhalten zwingt?*

➢ Der Anhalteweg erhöht sich um etwa 33m bei 20 km/h Geschwindigkeitserhöhung und um fast 65 m, wenn der Lenker 15 min einsparen will!

(Diesen Berechnungen liegen die Annahmen t_R = 1s und Bremsverzögerung b = 4 m/s² zu Grunde.)







9. Ein Arbeitsblatt (Schwingungen und allgemeine Sinusfunktion)

Ein punktförmiger Körper bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius r. Zum Zeitpunkt t = 0 befindet er sich in P_0 (r/0), zum Zeitpunkt t in P_t (r · cos(φ(t)) / r · sin(φ(t))), wobei φ(t) das Bogenmaß der bis zum Zeitpunkt t durchgeführten Drehbewegung ist. Es gilt φ(t) = ω · t ; die Konstante ω heißt Winkelgeschwindigkeit.

Wird der Körper beleuchtet, so beschreibt der Schattenpunkt S_t auf einem normal zu den Lichtstrahlen aufgestelltem Schirm eine Schwingung um die „Ruhelage“, wie bei einer schwingenden Schraubenfeder.

- **y(t) = r · sin(φ(t))** heißt ***Elongation*** und gibt den Abstand von der Ruhelage an;
- die maximale Elongation heißt ***Amplitude*** der Schwingung.
- ***T*** ist die ***Umlaufszeit*** der Kreisbewegung bzw. die ***Schwingungsdauer*** der Schwingung.
- Die Zahl der Umläufe pro Sekunde heißt ***Drehzahl***; die Zahl der vollen Schwingungen pro Sekunde heißt ***Frequenz*** der Schwingung.

Es gilt: $f = \frac{1}{T}$ und ω = 2πf ; die Winkelgeschwindigkeit ist also das 2π-fache der Frequenz und heißt auch Kreisfrequenz der Schwingung.

<table>
<tr><td rowspan="4">Eine Schwingung habe die Amplitude r = 2 m und die Frequenz f = 10 s^{-1}.

➢ Stelle eine Formel für die Elongation auf und berechne die angegebenen Elongationen sowie die Schwingungsdauer!</td><td colspan="6">y(t) =</td></tr>
<tr><td colspan="6">T = s</td></tr>
<tr><td>y(1)</td><td>y(0,1)</td><td>y(0,05)</td><td>y(1,2)</td><td>y(1,4)</td><td>y(2)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bestimme mit Hilfe des TI92 die Momentangeschwindigkeiten der oben definierten Schwingung näherungsweise mit Hilfe des Differenzenquotienten!</td><td>v(1)</td><td>v(0,1)</td><td>v(0,05)</td><td>v(1,2)</td><td>v(1,4)</td><td>v(2)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Eine Schwingung habe die Elongation

y(t) = 5 · sin(2t).

➢ Gib die Amplitude r, die Kreisfrequenz ω, die Frequenz f und die Schwingungsdauer T an!</td><td colspan="6">r =

ω =

f =

T =</td></tr>
<tr><td>Für eine Schwingung gilt : y(t) = ½ sin(½ · t).

➢ Zu welchen Zeiten ist die Elongation Null, zu welchen Zeiten maximal, wann minimal?</td><td colspan="6">$t_{y=0}$ =

$t_{y=max}$ =

$t_{y=min}$ =</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Ein „punktförmig kleiner“ Körper bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt O. Er befindet sich zum Zeitpunkt t in $P_t(x_1/x_2)$.
(1) Stelle Formeln für x_1 und x_2 auf, wenn der Körper im Punkt (0/2) startet!
(2) Stelle Formeln für x_1 und x_2 auf, wenn sich der Körper zum Zeitpunkt t = 3 im Punkt (0/2) befindet!</td><td colspan="4">(1)
$x_1(t) =$
$x_2(t) =$</td></tr>
<tr><td colspan="4">(2)
$x_1(t) =$
$x_2(t) =$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Stelle eine Formel für die Elongation y(t) einer allgemeinen Sinusschwingung mit der Amplitude r, der Schwingungsdauer T und der Phasenverschiebung α/ω gegenüber der Grundschwingung auf!
(1) r = 7; T = 4; α/ω = 0
(2) r = 1; T = 10; α/ω = π
(3) r = 10; T = 2; α/ω = - 5/4
(4) r = 2; T = 8; α/ω = 7/2</td><td colspan="4">(1)
y(t) =</td></tr>
<tr><td colspan="4">(2)
y(t) =</td></tr>
<tr><td colspan="4">(3)
y(t) =</td></tr>
<tr><td colspan="4">(4)
y(t) =</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Eine Schwingung hat die Elongation
(1) $y(t) = 1/5 \cdot \sin(8t + \pi/6)$
(2) $y(t) = 3 \cdot \sin(60\pi \cdot t - \pi)$
Berechne
➢ die Amplitude,
➢ die Schwingungsdauer und
➢ die Phasenverschiebung α
gegenüber der Grundschwingung!</td><td>r_1</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>T_1</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>α_1</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>r_2</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>T_2</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>α_2</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">➢ Zu welchen Zeiten ist der Körper in der Ruhelage, zu welchen Zeiten ist er von der Ruhelage am weitesten entfernt?</td><td>(1)</td><td>$t_{y=0}=$</td><td>$t_{y=max}=$</td><td>$t_{y=min}=$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$t_{y=0}=$</td><td>$t_{y=max}=$</td><td>$t_{y=min}=$</td></tr>
</table>

10. Physikalische Beispiele im Mathematikunterricht – Mathematik im Physikunterricht

1.) Eine Schraubenfeder ist in unbelastetem Zustand 8,2 cm lang und bei einer Belastung mit 5 N genau 11,7 cm lang. Nach dem HOOKEschen Gesetz ist die Zuordnungsvorschrift Belastung $x \rightarrow$ Länge y eine lineare Funktion der Form $y = m \cdot x + b$.

- Bestimme m und b und stelle das Schaubild der Funktion im Grafik-Fenster dar.
- Interpretiere die Bedeutung der beiden Parameter m und b physikalisch.
- Beantworte im Grafik-Fenster und mit Hilfe der Tabelle, wie sich die Länge der Feder ändert, wenn die Belastung um 1,8 N vermehrt bzw. um 2,4 N vermindert wird.
- Ermittle ebenfalls mit ausschließlich grafischen Methoden, welche Belastung eine Verlängerung der Feder um 5 cm ergibt!

2.) Franz geht gerne Bergwandern und versucht dabei eine konstante Geschwindigkeit einzuhalten. Angenommen – ein idealer Hang – hat eine Neigung von 17% und Franz legt pro Sekunde 0,6 m zurück. Seinen Aufstieg beginnt er in 1150 Meter.

- Bestimme die Höhe h als Funktion der Wanderzeit t, stelle das Schaubild dieser Funktion dar und beantworte mit Hilfe der Grafik bzw. einer entsprechenden Tabelle die folgenden Fragen:
- Nach welcher Zeit ist Franz am Ziel, das auf 2320 m liegt?
- In welcher Höhe befindet sich Franz nach 40 Minuten Wanderzeit?
- Wie lange braucht Franz bis er sein Ziel erreicht, wenn er mit 0,7 m/s unterwegs ist?
- Braucht er für seine Wanderung länger, wenn er nur mit 0,55 m/s marschiert, dafür aber einen steileren Hang (20%) wählt?
- Braucht er für seine Wanderung weniger lang, wenn er mit 0,65m/s marschiert, dafür aber einen flacheren Hang (15%) wählt?

3.) Bei verschiedenen Belastungen einer Schraubenfeder werden folgende Zahlenpaare (Kraft in N/ Länge in cm) gemessen: [(0/10,0), (0,5/10,9), (1,0/11,6), (2,0/12,9), (3,0/14,6), (4,0/15,8)].

- Stelle die Abhängigkeit der Länge s von der Kraft F grafisch (mit Hilfe des DATA-MATRIX-Editors) und rechnerisch dar und ergänze die folgenden Zahlenpaare (1,5/.....), (....../13,5), (....../20).
- Wo liegt hier physikalisch die Gültigkeitsgrenze des zugehörigen mathematischen Modells? Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der y-Achse?
- Was wird durch den Zahlenwert der Steigung der Ausgleichsgeraden ausgedrückt?

4.) Zwischen 0°C und 24°C besteht zwischen dem Volumen V und der Temperatur x des Wassers der Zusammenhang $V(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Gegeben seien folgende Messwertepaare (x/V): (0/1,00013), (6/1,00030), (12/1,00047), (18/1,00137), (24/1,00267).

- Bestimme die Koeffizienten a,b,c und d und stelle die Funktion V(x) im Grafik-Fenster des TI92 dar!
- Führe eine elementare Funktionsdiskussion durch!
- Gibt es ein Minimum und wo liegt es? Welche physikalische Eigenschaft des Wassers wird damit zum Ausdruck gebracht?
- Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 3°C auf 4°C? Welches Vorzeichen hat diese Änderung und welche physikalische Interpretation kannst du geben?
- Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 4°C auf 5°C? Welches Vorzeichen hat diese Änderung und welche physikalische Interpretation kannst du geben?
- Um wieviel VE (Volumseinheiten) ändert sich das Volumen bei einer Erwärmung von 4°C auf 4,05°C und von 80°C auf 80,05°C? Wie erklärst du die verschiedenen Werte? Wie drücken sich die Resultate in der Grafik aus?

5.) Zwei Autos fahren mit einer Geschwindigkeit von je 90 km/h hintereinander her. Nach drei Sekunden bremst Auto 1 mit der Bremsverzögerung von 6 m/s², nach einer weiteren Sekunde bremst auch Auto 2, und zwar mit der Bremsverzögerung von 8 m/s².

- Stelle die Geschwindigkeit beider Autos grafisch dar!
- Ermittle aus dieser Grafik, welchen Weg beide Fahrzeuge während der angegebenen Zeitdauer bis zu ihrem Stillstand zurücklegen.
- Kommt es zu einem Auffahrunfall? (Nimm an, dass der Abstand der beiden Fahrzeuge ursprünglich 10 m betragen hat)
- Welche Geschwindigkeit haben beide Fahrzeuge 2 Sekunden nachdem Auto 1 zu bremsen begonnen hat?
- Gibt es einen Zeitpunkt während der Bremsphase, wo die Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge gleich sind?
- Wie weit sind die beiden Autos beim Bremsbeginn des Autos 2 voneinander entfernt?

6.) Auf gerader Strecke fährt ein Zug mit 90 km/h; er kann mit 0,5 m/s² Verzögerung abgebremst werden.

- Erstelle eine Zeit-Geschwindigkeits-Funktion und ermittle aus ihrem Schaubild im Grafik-Fenster, wieviele Sekunden der Bremsvorgang dauert.
- Wie weit vor dem Bahnhof müssen die Bremsen betätigt werden?
- Wann hat der Zug die halbe Bremsstrecke zurückgelegt?
- Wie groß müsste die Bremsverzögerung sein, wenn der Bremsvorgang um 10 s kürzer dauern soll?
- Wie groß müsste die Bremsverzögerung sein, wenn der Bremsweg um 50 m kürzer sein soll?
- Vergleiche damit die Bremsverzögerung eines IC bzw. eines ICE: Ein IC benötigt 2000 m, um aus einem Tempo von 200 km/h zum Stehen zu kommen; dieselbe Strecke reicht für einen ICE, um von 250 km/h auf Null zu kommen. Wie groß sind jeweils die durchschnittlichen Bremsverzögerungen? Wie lange dauert es, bis ein IC bzw. ICE zum Stehen kommt?

7.) In einem Gefäß befindet sich heißes Wasser mit der Temperatur $T_2 = 85°C$; die Umgebung hat die Temperatur $T_1 = 18°C$. Die Abkühlung auf die Temperatur T erfolgt nach den Newtonschen Abkühlungsgesetz $T = T_1 + (T_2 - T_1) \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$ (Zeit t in Minuten).

- Ermittle das Schaubild der T(t) – Funktion im Grafikfenster!
- Welche Temperatur hat das Wasser nach 10 min, nach 20 min, nach 40 min, nach 1 h?
- Stelle eine Vermutung auf, wovon die Abkühlungsgeschwindigkeit abhängt?
- Du bekommst eine Tasse mit besonders heißem Tee (93°C) serviert. Dazu da ihn gezuckert trinkst, möchtest du zwei Stück Würfelzucker hineingeben. Dadurch wird der Tee – vor allem durch den Lösungsvorgang – um 15°C abgekühlt. Du bevorzugst 38°C als Trinktemperatur. Ist es nun klüger, den Zucker sofort hineinzuwerfen – oder abzuwarten, bis der Tee auf 53°C abgekühlt ist und erst dann zu zuckern? Verwende das Newtonsche Abkühlunsgesetz und stelle beide Vorgänge im Grafik-Fenster dar!