

Die Formel von Sherlock Holmes

Der Zusammenhang zwischen Schrittlänge und Körpergröße



WAS GESCHAH ...

Die Nacht war warm und sehr feucht. Knapp vor Geschäftsschluss wurde ein kleines Kaufhaus überfallen, ausgeraubt und der Eigentümer getötet. Die Polizei war rasch am Tatort, weil die Alarmsirene des Kaufhauses ertönte. Der mutmaßliche Täter war zu Fuß durch die Hintertür geflohen. Vor dem Hintereingang war eine Rasenfläche und ein Fußweg. Die Polizei fand auf dem Fußweg deutlich erkennbare nasse Fußspuren. Diese Spuren wurden sofort fotografiert und ihre Größe und der Schrittabstand gemessen. Aus diesen Tatspuren war die Polizei im Stande, die ungefähre Körpergröße, Schuhgröße, Schrittweite zu bestimmen. Außerdem bestand die Möglichkeit später das Profil der Schuhsohle eines Verdächtigen mit dem auf dem Fußweg gefundenen Muster zu vergleichen.

Hintergrundinformationen

Es ist eine weit verbreitete Ansicht, dass das erste Auftreten einer echten forensischen (kriminaltechnischen) Untersuchung in der Literatur in den 60 Abenteuern von Sherlock Holmes, geschrieben von Sir Arthur Conan Doyle, erfolgte. Holmes mit seinem Begleiter Dr. Watson, das alter Ego von Doyle, war im Stande einen Tatort eines Verbrechens zu betrachten und daraus bemerkenswerte Schlussfolgerungen auf die Art des Verbrechens und auf den Täter zu ziehen. In keinen Abenteuern von Holmes, außer in den beiden letzten, kam Holmes' „Erzrivale“, der manisch kriminelle Mathematikprofessor Moriarty vor. Diese Charakterisierung eines Mathematikprofessors ist unfair und hat den Ruf der Mathematiklehrer für Jahre beschädigt. So ungerecht das auch ist, so müssen wir doch wieder zurück zu unserem Tatort.

In einem seiner frühen Abenteuer – A Study in Scarlet – („Studie in Scharlachrot“) - macht Holmes im Kapitel 15 die folgende Bemerkung: “Why the height of a man, in nine cases out of ten, can be told from the length of his stride.” („Nun, in neunzig von hundert Fällen lässt sich aus der Schrittlänge eines Menschen auf seine Körpergröße schließen. Es ist eine ganz simple Rechnung. Mit den Zahlen will ich sie nicht langweilen. Ich sah die Schritts Spuren des Burschen draußen im Lehm so gut wie auf dem staubigen Boden im Zimmer.“¹ Holmes ist es nicht eingefallen, weder Watson, noch den anwesenden Polizeibeamten oder uns einzuweihen, welche Rechnung er angestellt hat.

¹ Übersetzung: Beatrice Schott, erschienen im Ullstein Verlag 1977.

Welche Formel hatte Holmes im Sinn, wenn er seine „ganz simple Rechnung“ anstellte? Wie fest können wir uns auf diese Rechnung verlassen? Holmes erklärt in Kapitel 15 weiter: „Zudem gab es noch eine Probe auf mein Rechenexempel. Wenn ein Mann etwas an die Wand schreibt, wird er den Text unwillkürlich in seiner Augenhöhe anbringen. Die Inschrift befindet sich genau einen Meter achtzig über dem Boden. Also war die Bestimmung der Körpergröße ein Kinderspiel.“ Man beachte den sarkastischen Ton am Ende des Zitats. Wir wollen nun versuchen, die „simple Formel“ des Meisterdetektivs zu entdecken. Dazu werden wir Informationen benötigen, die wir mit einem Maßband sammeln können. Weiter hilft uns dann der FIT-Befehl von DERIVE (oder die Bestimmung einer Regressionslinie mit einem anderen geeigneten Werkzeug).

Deine experimentelle Methode lässt Dich und Deine Klassenkameraden zehn Schritte machen und die dabei zurückgelegte Entfernung messen. Notiere jeweils Namen, Körpergröße, Länge eines Schritts (Entfernung / 10) und für eine spätere Untersuchung auch die Länge eines Schuhs. Wenn die Daten erhoben worden sind, kannst Du mit den zusammengestellten Listen und dem Regressionswerkzeug überprüfen, ob die Behauptung von Sherlock Holmes stimmt. Wenn dem so ist, kannst Du diese Formel dazu verwenden, um die Größe einer beliebigen Person aus ihrer Schrittlänge zu schätzen.

Forensische Aufgaben

- Untersuchung, ob zwischen der Körpergröße einer Person und ihrer Schrittlänge eine Beziehung besteht.
- Überprüfung der Hypothese, dass ein Zusammenhang zwischen der Schuhgröße (Schuhlänge) einer Person und ihrer Körpergröße besteht.

Naturwissenschaftlich – Mathematische Aufgaben

- Erstellung zweier Hypothesen über die Bestimmung der Körpergröße einer Person.
- Sinnvolle und effektive Erhebung von Daten, um diese Hypothesen zu stützen.
- Einsatz der linearen Regression zur Bildung von geeigneten mathematischen Modellen.
- Beurteilung der Eignung und Grenzen der Modelle.

Materialien

- Derive®, CAS-Rechner, Graphischer TR oder Excel
- Einen freien Raum von mindestens 10m Länge
- Kreide oder Klebeband, um eine Startmarkierung von ca 50cm Länge am Boden anzubringen. Von hier weg werden die Schritte gemacht.
- Datenblätter, um die Namen, Größen, Schrittlängen und Fuß (Schuh-) längen der Personen zu notieren
- Maßband

Durchführung

1. Legt ein Datenblatt mit vier Spalten nach folgendem Muster an:

Name	Körpergröße (cm)	Schrittlänge (cm)	Schuhlänge (cm)

2. Richtet drei Stationen mit jeweils einem „Datensammler“ und einem „Datenschreiber“ ein. (Sammler und Schreiber können auch in einer Person vereinigt sein.)

Station 1 – Miss die Größe jeder Person und notiere sie gemeinsam mit deren Namen.

Station 2 – Ermittle die Schuhgröße (Schuhlänge oder Fußlänge) jeder Person und notiere sie gemeinsam mit deren Namen.

Station 3 – Suche eine freie Fläche mit einer Mindestlänge von 10m und bringe die Startmarkierung an. Miss die von jeder Person mit 10 - normalen - Schritten zurückgelegte Strecke, teile sie durch 10 und notiere die durchschnittliche Schrittgröße gemeinsam mit dem Namen.

3. Auf Station 3 soll jede Person die Fersen an die Startlinie setzen und 10 normale Schritte in gerader Richtung machen. Nach dem 10. Schritt sollen die Fersen wieder aneinander gesetzt werden. Die Position der Fersen wird markiert und der Abstand zur Startlinie gemessen.
4. Wenn alle Daten erhoben sind, werden sie in eine gemeinsame Tabelle übertragen.
5. Übertrage die Daten in Form einer Matrix mit drei Spalten für *Größe*, *Schrittweite* und *Schuhgröße(-länge)*. Du kannst auch eine Spalte mit den Namen führen, aber diese werden in den folgenden Berechnungen nicht mehr gebraucht. Beachte, dass in jeder Zeile der Matrix die zu jeweils einer Person gehörigen Daten stehen.
6. Jetzt kann die Analyse der Daten beginnen. Fangen wir mit einem Diagramm Schrittweite – Körpergröße an!
7. Richte geeignete Bereiche für die Achsen ein (lasse horizontal und vertikal etwas Spielraum nach beiden Seiten. Achte auf passende Skalierungen.
8. Erzeuge ein Streudiagramm der Daten. Glaubst Du, aus den Daten einen Zusammenhang erkennen zu können?
9. Wir wollen annehmen, dass ein lineares Modell den Zusammenhang zwischen Schrittlänge und Körpergröße beschreibt und stelle die Größe g als lineare Funktion der Schrittweite s dar: $g(s) = a*s + b$. In DERIVE verwendet man dazu die FIT-Funktion, auf den Taschenrechnern wird die lineare Regression direkt angeboten und in Excel setzt man die Funktionen STEIGUNG und ACHSENABSCHNITT ein, bzw. lässt sich zum vorliegenden Streudiagramm die lineare Trendgerade zeichnen. (Einen Punkt anklicken ...)
10. Im taunassen Gras werden Schrittpuren entdeckt. Ihr Abstand beträgt durchschnittlich 72,4cm? Welchen Schätzwert für die Körpergröße ergibt das?

11. In einer Mülltonne werden blutverschmierte Herenschuhe der Größe 7 (US-Maß) und der Größe 37 (EU-Maß) gefunden. Welche Mutmassungen auf die Besitzer der Schuhe lässt das zu?

Mögliche Ausführungen für die unterschiedlichen Plattformen werden nun mit Musterdaten vorgestellt. Die Daten wurden mit US-Schülern erhoben, daher stimmen die Schuhgrößen nicht mit unseren überein. (Informiere Dich in einem Schuhgeschäft über die entsprechenden Größen bei uns.)

Beispieldaten

(erhoben in einer Klassen von 12jährigen Schülern - Sixgraders)

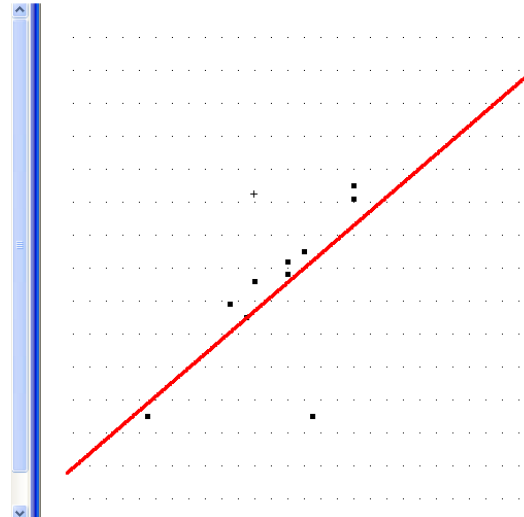
Name	Größe g (cm)	Schritt w. s (cm)	Schuhgröße f
Josephine	150.8	62.6	4
Carl	149.5	62.1	5.5
Stanley	151.2	62.6	6.5
Terence	153.1	63.4	7.5
Larry	150.6	62.2	7.5
Walter	149.9	61.9	5
Patricia	146.5	60.9	4.5
Eleonor	146.5	62.9	6
George	151.5	62.8	8.5
William	153.5	63.4	6.5

Durchführung mit DERIVE

```
#1: daten :=


|           |       |      |     |
|-----------|-------|------|-----|
| Josephine | 150.8 | 62.6 | 4   |
| Car1      | 149.5 | 62.1 | 5.5 |
| Stanley   | 151.2 | 62.6 | 6.5 |
| Terence   | 153.1 | 63.4 | 7.5 |
| Larry     | 150.6 | 62.2 | 7.5 |
| Walter    | 149.9 | 61.9 | 5   |
| Patricia  | 146.5 | 60.9 | 4.5 |
| Eleonor   | 146.5 | 62.9 | 6   |
| George    | 151.5 | 62.8 | 8.5 |
| William   | 153.5 | 63.4 | 6.5 |


#2: APPROX(FIT([s, a*s + b], daten[[3, 2]))
#3: 2.162183544*s + 15.21677215
#4: TABLE(2.162183544*s + 15.21677215, s, 55,
70, 0.01)
```



Durchführung mit dem Voyage 200

DATA	Name	Grösse	Schritt	Schuh
	c1	c2	c3	c4
1	"Josephine"	150.8000	62.60000	4.000000
2	"Car1"	149.5000	62.10000	5.500000
3	"Stan"	151.2000	62.60000	6.500000
4	"Terry"	153.1000	63.40000	7.500000
5	"Larry"	150.6000	62.20000	7.500000
6	"Walter"	149.9000	61.90000	5.000000
7	"Pat"	146.5000	60.90000	4.500000

c1.Title="Name"

mainShoImes Plot 1

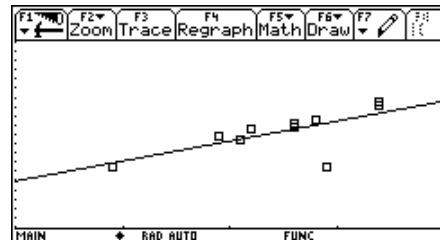
Plot Type..... Scatter→
 Mark..... Box→
 X..... c3
 Y..... c2
 Hist. Bucket Width: 1
 Use Freq and Categories? NO→
 Freq.....
 Category.....
 (include Categories) C

(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)

mainShoImes Calculate

Calculation Type.. LinReg →
 X..... c3
 Y..... c2
 Store RegEQ to... y1(x)→
 Use Freq and Categories? NO→
 Freq.....
 Category.....
 (include Categories) C

(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)



Durchführung mit dem TI83/84

L1	L2	L3	1
150.80	62.600	4.0000	
149.50	62.100	5.5000	
151.20	62.600	6.5000	
153.10	63.400	7.5000	
150.60	62.200	7.5000	
149.90	61.900	5.0000	
146.50	60.900	4.5000	

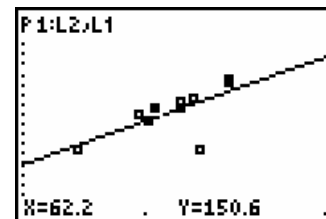
L1()=150.8

Plot1 Plot2 Plot3

Off

Type: [] [] []

Xlist: L2
 Ylist: L1
 Mark: [] +

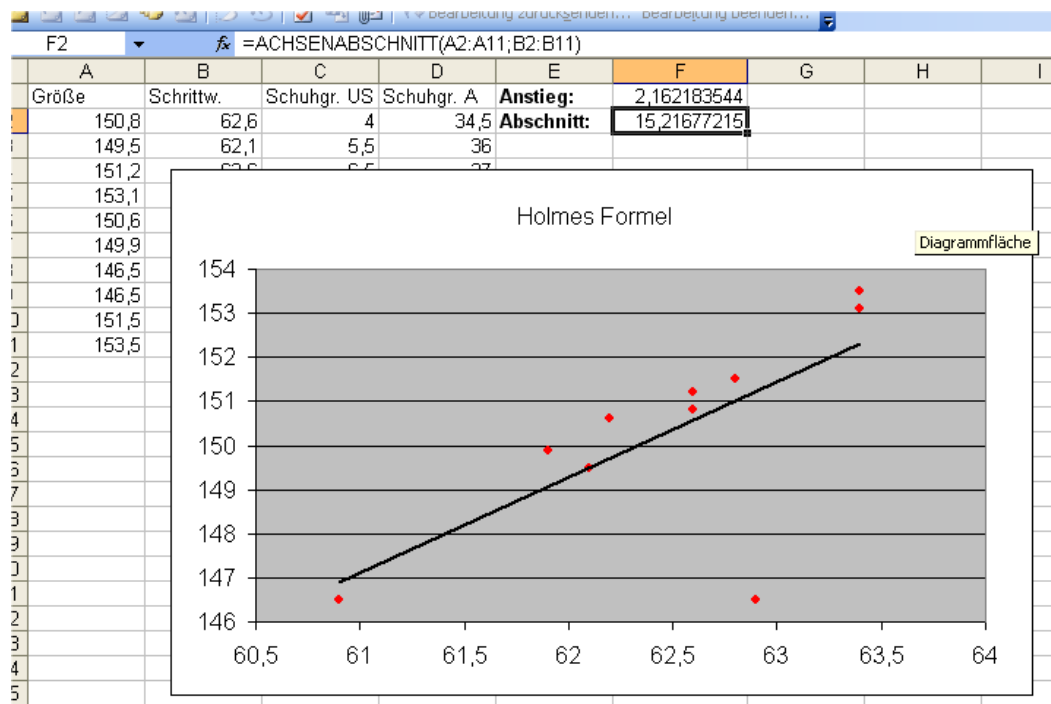


LinReg

y=ax+b
 a=2.1622
 b=15.2168

2.1622X+15.2168

Ausschnitt aus dem Excel-Arbeitsblatt



Nach diesen Daten lautet die geheimnisvolle Formel von Sherlock Holmes also:

$$y = 2.16x + 15.22$$

Wie lautet die Formel in Worten?

Mit der Formel lässt sich nun die Aufgabe 10 sofort lösen. (etwa 171 / 172 cm)

Für Frage 11 musst Du entweder die Regressionen zwischen den unterschiedlichen Schuhgrößen und den Körpergrößen bestimmen, oder Du findest die Lösung über den Zusammenhang zwischen Schuhgrößen und Schrittweiten als Funktion oder Du beschaffst Dir Umrechnungstabellen (Schuhfachhandel, Internet, ...)

Unter den Datenpunkten fällt ein „Ausreißer“ deutlich auf. Wer ist dies? Könnte es Erklärungen für diesen Ausreißer geben?

Ändert sich Holmes' Formel wesentlich, wenn man den Ausreißer unberücksichtigt lässt?

Führe die Untersuchungen aber auf jeden Fall mit Deinen erhobenen Daten durch. Decken sich die Ergebnisse ungefähr (oder gelten für US-Jugendliche andere Werte?). Wie lautet Deine Formel? Was könnte die Ursache für eventuell deutlich andere Ergebnisse sein?

Beantworte auch mit Deiner Formel die Fragen 10 und 11.

Weiterführende Aufgaben und deren Durchführung

Erweiterung #1

Erinnere Dich an den Anfang. Holmes hat behauptet, die Rechnung sei „simple enough“. Die aus Deinen Daten gewonnene Formel ist sicherlich recht gut, um Deine Daten zu modellieren, aber sie enthält doch Koeffizienten, mit denen man nicht so einfach im Kopf rechnen kann. Man könnte annehmen, dass Holmes einen Zusammenhang im Sinn hatte, der ganze Zahlen oder einfache Brüche für den Koeffizienten der Schrittlänge und die additive Konstante enthält. In dieser ersten Erweiterung wollen wir versuchen, eine lineare Funktion (Gerade) mit möglichst einfachen Koeffizienten zu finden, die möglicherweise nicht so genau zu Deinen Daten passt, aber einfacher und dennoch ausreichend genau ist.

1. Versuche ganze Zahlen, die nahe beim Koeffizienten der Schrittlänge (Anstieg der Regressionsgeraden) liegen und trage sie in die Tabelle ein.

Name	$x = \text{Schrittw}$	$y = \text{Größe}$	$(a_1 = \quad) y - a_1x$	$(a_2 = \quad) y - a_2x$

usw.

2. Nimm den ersten Näherungswert a_1 und erzeuge ein Streudiagramm für die Punkte $(y | y - a_1)$. Kannst Du eine Gerade $y = b$ so finden, dass die meisten Punkte innerhalb eines Abstands von wenigen Zentimetern von dieser Geraden liegen, dann nimm diesen Wert als Abschnitt b_1 . Zeichne nun die Gerade $y = a_1x + b_1$ ins bestehende Streudiagramm zur Regressionsgeraden von vorhin. Vergleiche ...
3. Wiederhole Schritt 2 und beginne mit einem anderen „bequemen“ Wert a_2 .

Erweiterung #2

Diese Erweiterung ist ziemlich genau eine Wiederholung der Prozedur 1 – 9 von oben, allerdings mit dem Unterschied, dass Du anstelle der Körpergröße die Länge der Schuhe nehmen sollst. Zeigt das Streudiagramm auch hier einen auffälligen Zusammenhang?

KOMMENTAR des CORONERS

Die Polizei verfügte damit sofort über ein sehr gutes Beweismittel. Im Geschäft wurden Hinweise auf die Waffe, sowie Fingerabdrücke gefunden. In der Hand des Opfers fanden sich fremde Haare. Außerdem gab es noch Zeugenaussagen. Nachdem alle Beweismittel gesichert waren, hatte die Polizei bereits ein klares Profil des Tatverdächtigen, der wenig später nach diesem Profil festgenommen werden konnte.

Pat und Carl Leinbach, Gardner, Pennsylvania
(übersetzt und bearbeitet von Josef Böhm, ACDCA)