

# **Lehrsätze aus der ebenen Geometrie**

**am Voyage 200**

**entstanden anlässlich eines Vortrags beim  
Bundesseminar „Elektronische Lernmedien im Mathematikunterricht“  
im März 2003 in Amstetten**

**Dr. Thomas Himmelbauer**

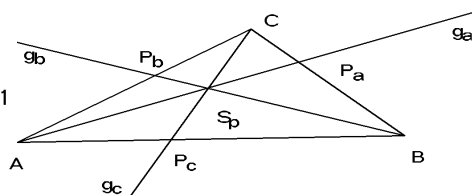
# 1) Der Lehrsatz von Ceva

## a) Mathematische Grundlagen:

Dieser Lehrsatz wurde im Jahre 1678 vom italienischen Mathematiker Giovanni Ceva entdeckt.

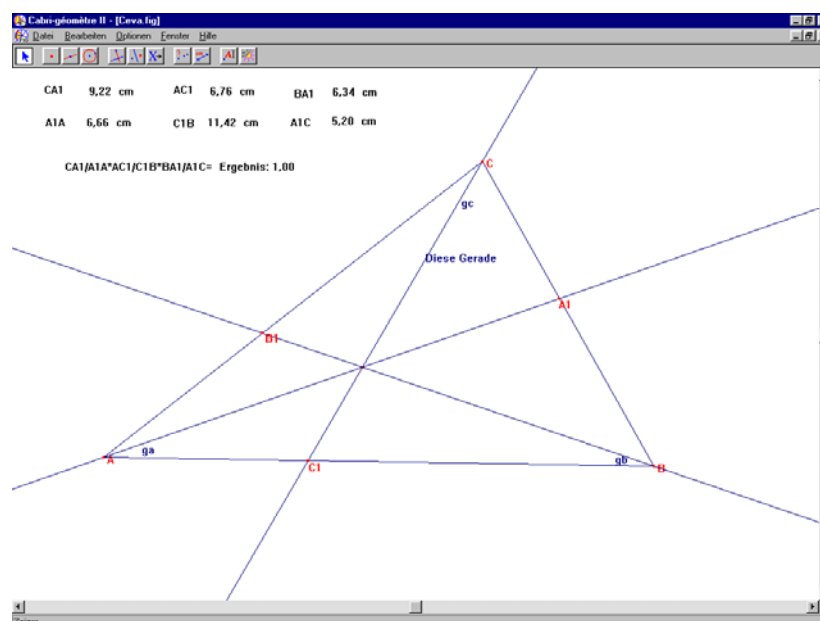
Lehrsatz: Die drei Geraden  $g_a$ ,  $g_b$  und  $g_c$ , welche durch die Eckpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  eines Dreiecks verlaufen und die gegenüberliegende Seiten in den Punkten  $P_a$ ,  $P_b$  und  $P_c$  schneiden, besitzen genau dann einen gemeinsamen Schnittpunkt  $S_p$ , wenn gilt:

$$\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} \cdot \frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} \cdot \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = 1$$



## b) Cabri Geometrie:

In einem beliebigen Dreieck wurden zwei Geraden  $g_a$  und  $g_b$  durch die Eckpunkte  $A$  und  $B$  gelegt. Eine Gerade  $g_c$  wurde durch den Eckpunkt  $C$  und den Schnittpunkt von  $g_a$  und  $g_b$  gelegt. Die Geraden  $g_b$  und  $g_a$  lassen sich im Zugmodus bewegen. Die Gerade  $g_c$  wird mitbewegt. Ferner wurden der Schnittpunkt  $A1$  von  $g_a$  mit der Seite  $a$ , Schnittpunkt  $B1$  von  $g_b$  mit der Seite  $b$  und Schnittpunkt  $C1$  von  $g_c$  mit der Seite  $c$  bestimmt. Dann wurden die Längen der entsprechenden Teilstücke der Seiten bestimmt und das Produkt der Teilverhältnisse berechnet.



### c) Nachweis mit dem Voyage 200:

Angabe:

Eckpunkte des Dreiecks:  $EA = (0|0)$   $EB = (bx|0)$   $EC = (cx|cy)$

Teilverhältnis der Seite  $c$ :  $a:b$

Teilverhältnis der Seite  $a$ :  $c:d$

Teilverhältnis der Seite  $b$ :  $e:f$

Zunächst definieren wir über den Programm-Editor folgende Funktion, die die allgemeine Geradengleichung durch die beiden Punkte  $P1$  und  $P2$  aufstellt. Dann geben wir die Eckpunkte ein.

```

F1 Control F2 I/O Var F3 Find... F4 Mode
:ge2p(p1,p2)
:Func
:Local rv,n
:p2-p1→rv
:[rv[2,1]]*[rv[1,1]]→n
:dotP(n,[[x][y]])=dotP(n,p1)
:EndFunc
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ [0] → ea [0]
▪ [bx] → eb [bx]
▪ [0] → eb [0]
▪ [cx] → ec [cx]
▪ [cy] → ec [cy]
[[cx][cy]]→ec
    
```

Dann berechnen wir die Teilungspunkte der Dreiecksseiten.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ [bx] → eb [bx]
▪ [0] → eb [0]
▪ [cx] → ec [cx]
▪ [cy] → ec [cy]
▪ ea + a/(a+b)·(eb-ea) → tec [a·bx/a+b]
ea+a/(a+b)·(eb-ea)→tec
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ ea + a/(a+b)·(eb-ea) → tec [a·bx/a+b]
▪ eb + c/(c+d)·(ec-eb) → tea [d·(bx-cx)/c+d + cx]
eb+c/(c+d)·(ec-eb)→tea
    
```

Danach werden die Geraden durch die Eckpunkte und die Teilungspunkte bestimmt.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ ec + e/(e+f)·(ea-ec) → teb [f·cx/e+f]
ec+e/(e+f)·(ea-ec)→teb
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ ge2p(tec, ec) → gc [f·cy/e+f]
▪ ge2p(tea, ea) → ga
ge2p(tea,ea)→ga
    
```

Der Schnittpunkt der Geraden  $ga$  und  $gb$  wird berechnet und abgespeichert. Danach wird die Gerade  $gc$  aufgerufen, der Schnittpunkt in ihr eingesetzt und die entstehende Gleichung unter  $g$  abgespeichert.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ solve(ga and gb, {x y})
x = (c·cx+d·bx)·f / (c·(e+f)+d·f) and y = c·f·cy / (c·(e+f)+d·f)
solve(ga and gb, {x,y})
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ gc cy·x + (-b·bx/a+b + bx - cx)·y = a·bx·cy/a+b
gc
    
```

Durch zweimalige Multiplikation wird die Gleichung nennerfrei gemacht.

Calculator screen showing the equation  $\frac{c \cdot (e+f) + d \cdot f}{a+b} \cdot \frac{a \cdot bx \cdot cy}{a+b} = \frac{a \cdot bx \cdot cy}{a+b}$ . The user enters  $\text{gc } cy \cdot x + \left(\frac{-b \cdot bx}{a+b} + bx - cx\right) \cdot y = \frac{a \cdot bx \cdot cy}{a+b}$ . Then  $\text{cy} \cdot \text{sp}[1, 1] + \left(\frac{-b \cdot bx}{a+b} + bx - cx\right) \cdot \text{sp}[2, 1] \rightarrow$ . The result is  $\frac{-b \cdot c \cdot f \cdot bx \cdot cy}{(a+b) \cdot (c \cdot (e+f) + d \cdot f)} + \frac{d \cdot e \cdot f \cdot bx \cdot c}{(c \cdot (e+f) + d \cdot f)}$ . The final command is  $\text{cx} \cdot \text{sp}[2, 1] = a \cdot bx \cdot cy / (a+b) \rightarrow \text{g1}$ .

Calculator screen showing the equation  $\frac{(a+b) \cdot (c \cdot (e+f) + d \cdot f) + (c \cdot (e+f) + d \cdot f)}{(a+b) \cdot (c \cdot (e+f) + d \cdot f)} \cdot \text{g1} \rightarrow \text{g1}$ . Then  $\frac{(a \cdot (c+d) + b \cdot d) \cdot f \cdot bx \cdot cy}{c \cdot (e+f) + d \cdot f} = a \cdot bx \cdot cy$ . Then  $\text{g1} \cdot (c \cdot (e+f) + d \cdot f) \rightarrow \text{g1}$ . The result is  $(a \cdot (c+d) + b \cdot d) \cdot f \cdot bx \cdot cy = a \cdot (c \cdot (e+f) + d \cdot f) \cdot \text{g1}$ . The final command is  $\text{g1} \cdot (c \cdot (e+f) + d \cdot f) \rightarrow \text{g1}$ .

Durch Umformung der Gleichung, so dass die rechte Gleichungsseite Null wird und durch Division durch  $b \cdot d \cdot f$  wird der Lehrsatz von Ceva ersichtlich. Die Gleichung ist genau dann richtig, wenn

der Ausdruck  $\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = 1$  ist.

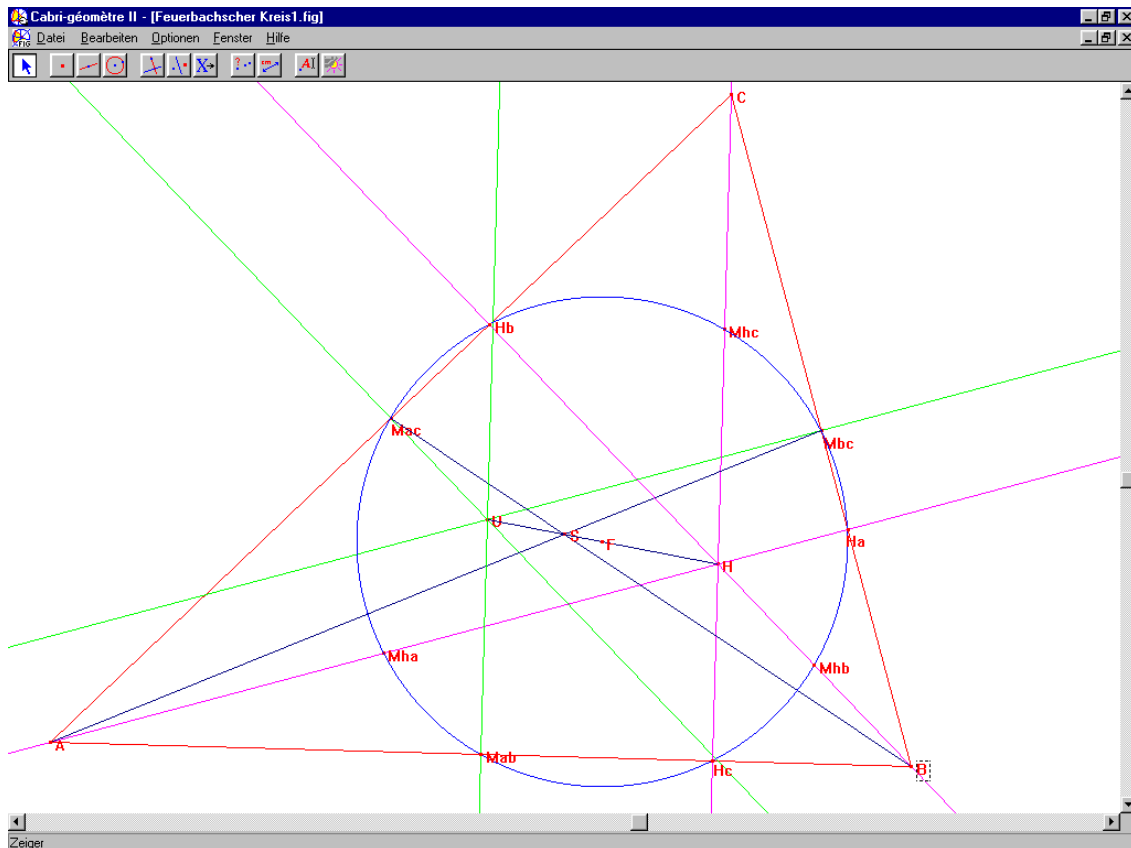
Calculator screen showing the equation  $\text{left}(\text{g1}) - \text{right}(\text{g1}) = 0 \rightarrow \text{g1}$ . The result is  $-(a \cdot c \cdot e - b \cdot d \cdot f) \cdot bx \cdot cy = 0$ . Then  $\frac{\text{g1}}{b \cdot d \cdot f} \cdot -(a \cdot c \cdot e - b \cdot d \cdot f) \cdot bx \cdot cy = 0$ . Then  $\text{propFrac}\left(\frac{\text{g1}}{b \cdot d \cdot f}\right)$ . The result is  $bx \cdot cy - \frac{a \cdot c \cdot e - b \cdot d \cdot f}{b \cdot d \cdot f} = 0$ . The final command is  $\text{propFrac}(\text{g1} / (b \cdot d \cdot f))$ .

## 2) Der Feuerbach'sche Kreis (Neunpunktekreis)

### a) Mathematische Grundlagen:

Der Halbierungspunkt der Strecke zwischen Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt ist der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises. Der Kreis verläuft durch die drei Seitenmitten, durch die drei Höhenfußpunkte und halbiert jeweils die Strecke zwischen Höhenschnittpunkt und Eckpunkt.

### b) Cabri Geometrie:



### c) Nachweis mit dem Voyage 200:

Angabe:

Eckpunkte des Dreiecks:  $A = (0|0)$   $B = (bx|0)$   $C = (cx|cy)$

Zunächst definieren wir über den Programm-Editor folgende Funktion, die die allgemeine Geradengleichung durch die beiden Punkte  $P1$  und  $P2$  aufstellt. Dann geben wir die Eckpunkte des Dreiecks ein.

```

F1 Control F2 F3 F4 F5 F6
:ge2p(p1,p2)
:Func
:Local rv,n
:p2-p1→rv
: [[rv[2,1]][-rv[1,1]]]→n
:dotP(n,[[x][y]])=dotP(n,p1)
:EndFunc
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ [0] → a [0]
▪ [bx] → b [bx]
▪ [0] → b [0]
▪ [cx] → c [cx]
▪ [cy] → c [cy]
[[cx][cy]]→c
    
```

Zunächst berechnen wir die Vektoren der Dreiecksseiten  $c$  und  $b$  und die Halbierungspunkte dieser Seiten.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ [0] → c [0]
▪ [cx] → c [cx]
▪ [cy] → c [cy]
▪ b - a → vab [bx]
▪ c - a → vac [0]
c-a→vac [cx]
c-a→vac [cy]
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ a + b → mab [0]
▪ a + c → mac [bx/2]
(a+c)/2→mac [0]
(a+c)/2→mac [cx/2]
(a+c)/2→mac [cy/2]
    
```

Dann stellen wir die Streckensymmetralen dieser Dreiecksseiten auf und berechnen ihren Schnittpunkt den Umkreismittelpunkt.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ dotP(vab, [x][y]) = dotP(vab, mab) → stab [cy/2]
bx·x = bx2/2
stab/bx → stab x = bx/2
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ dotP(vac, [x][y]) = dotP(vac, mac) → stac
cx·x + cy·y = cx2/2 + cy2/2
▪ solve(stab and stac, {x y})
x = bx/2 and y = -(bx·cx - cx2 - cy2)/2·cy
solve(stab and stac, {x,y})
    
```

Wir speichern den Umkreismittelpunkt unter  $um$  ab. Dann werden die Höhen auf diese beiden Seiten berechnet.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ [bx/2] → um [bx/2]
-[(bx·cx - cx2 - cy2)/2·cy]
[[bx/2][-(bx·cx - cx2 - cy2)/2·cy]]
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ dotP(vab, [x][y]) = dotP(vab, c) → hc bx·x = bx·cx
hc/bx → hc x = cx
▪ dotP(vac, [x][y]) = dotP(vac, b) → hb
cx·x + cy·y = bx·cx
vac, [[x][y]] = dotP(vac, b) → hb
    
```

Der Schnittpunkt der Höhen wir berechnet und unter  $hp$  abgespeichert. Danach wird der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises  $fp$  und sein Radius  $rf$  bestimmt.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ solve(hc and hb, {x y})
x = cx and y = (bx - cx)·cx/cy
▪ [cx] → hp [cx]
[(bx - cx)·cx/cy] → hp [(bx - cx)·cx/cy]
[[cx][[(bx - cx)·cx/cy]]] → hp
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
▪ hp + um → fp [4]
norm(mab - fp) → rf [bx·cx - cx2 + cy2]
norm(mab - fp) → rf [4·cy]
norm(mab - fp) → rf
    
```

Nun folgt die Berechnung der Höhenfußpunkte. Dazu berechnen wir die Trägergeraden der Dreiecksseiten und die noch nicht berechnete Höhe  $h_a$ .

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $\frac{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2}{4} \cdot (cx^2 + cy^2)$  │
├────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┤
│  $\text{ge2p}(a, b) \rightarrow \text{gab} \quad -bx \cdot y = 0$  │
│  $\frac{\text{gab}}{-bx} \rightarrow \text{gab} \quad y = 0$  │
│  $\text{ge2p}(a, c) \rightarrow \text{gac} \quad cy \cdot x - cx \cdot y = 0$  │
│  $\text{ge2p}(b, c) \rightarrow \text{gbc} \quad cy \cdot x + (bx - cx) \cdot y = bx \cdot cy$  │
│  $\text{ge2p}(b, c) \rightarrow \text{gbc}$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 23/50
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $\frac{\text{gab}}{-bx} \rightarrow \text{gab} \quad y = 0$  │
│  $\text{ge2p}(a, c) \rightarrow \text{gac} \quad cy \cdot x - cx \cdot y = 0$  │
│  $\text{ge2p}(b, c) \rightarrow \text{gbc} \quad cy \cdot x + (bx - cx) \cdot y = bx \cdot cy$  │
│  $\text{dotP}(c - b, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \text{dotP}(c - b, a) \rightarrow h_a$  │
│  $(cx - bx) \cdot x + cy \cdot y = 0$  │
│  $\text{dotP}(c - b, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \text{dotP}(c - b, a) \rightarrow h_a$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 24/50
    
```

Durch Schnitt der Trägergeraden der Dreiecksseiten mit den Höhen erhalten wir die Höhenfußpunkte und speichern sie unter  $hfa$ ,  $hfb$  und  $hfc$  ab.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $\text{solve}(\text{gab and hc}, \langle x, y \rangle)$  │
│  $x = cx \text{ and } y = 0$  │
│  $\begin{bmatrix} cx \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow hfc$  │
│  $\text{solve}(\text{gac and hb}, \langle x, y \rangle)$  │
│  $x = \frac{bx \cdot cx^2}{cx^2 + cy^2} \text{ and } y = \frac{bx \cdot cx \cdot cy}{cx^2 + cy^2}$  │
│  $\text{solve}(\text{gac and hb}, \langle x, y \rangle)$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 27/50
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $\frac{cx^2 + cy^2}{bx \cdot cx \cdot cy} \rightarrow hfb$  │
│  $\frac{bx \cdot cx \cdot cy}{cx^2 + cy^2}$  │
│  $\text{solve}(\text{gbc and ha}, \langle x, y \rangle)$  │
│  $x = \frac{bx \cdot cy^2}{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2} \text{ and } y = \frac{bx \cdot cx \cdot cy}{cx^2 + cy^2}$  │
│  $\text{solve}(\text{gbc and ha}, \langle x, y \rangle)$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 29/50
    
```

Als erstes überprüfen wir nun ob alle drei Höhenfußpunkte den Abstand  $r_f$  (Radius des Feuerbachschen Kreises) vom Mittelpunkt  $fp$  des Feuerbachschen Kreises besitzen.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $\frac{bx \cdot (bx - cx) \cdot cy}{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2}$  │
│  $\frac{bx \cdot cy^2}{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2}$  │
│  $\frac{bx \cdot (bx - cx) \cdot cy}{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2}$  │
│  $\frac{bx \cdot (bx - cx) \cdot cy}{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2} \rightarrow hfa$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 30/50
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $\frac{bx \cdot (bx - cx) \cdot cy}{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2}$  │
│  $\frac{bx \cdot cy^2}{bx^2 - 2 \cdot bx \cdot cx + cx^2 + cy^2}$  │
│  $(\text{norm}(fp - hfa))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - hfb))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - hfc))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - hfc))^2 - rf^2 = 0$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 33/50
    
```

Danach überprüfen wir die Seitenmitten und zum Abschluss die Halbierungspunkte zwischen dem Höhenschnittpunkt und den Eckpunkten.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $(\text{norm}(fp - \frac{a+b}{2}))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - \frac{a+c}{2}))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - \frac{b+c}{2}))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - \frac{b+c}{2}))^2 - rf^2 = 0$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 36/50
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
┌────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
│  $(\text{norm}(fp - \frac{hp+c}{2}))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - \frac{hp+a}{2}))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - \frac{hp+b}{2}))^2 - rf^2 = 0 \quad \text{true}$  │
│  $(\text{norm}(fp - \frac{hp+b}{2}))^2 - rf^2 = 0$  │
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
MAIN DEG AUTO FUNC 39/50
    
```

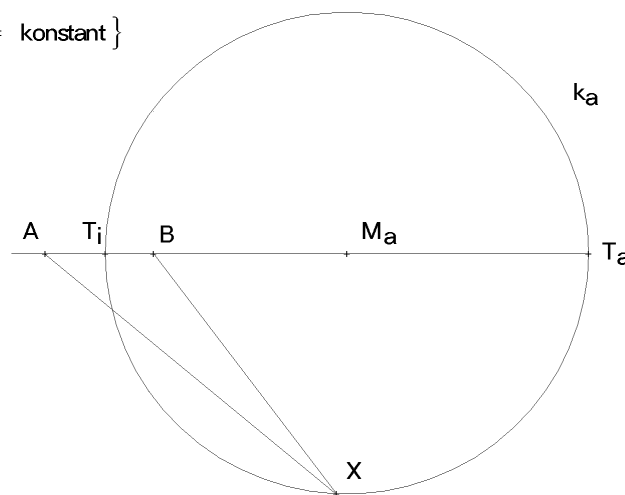
### 3) Der Kreis von Apollonios

#### a) Mathematische Grundlagen:

Der griechische Mathematiker Apollonios von Perge (2. Jhdt. n. Chr.) entdeckte folgende Eigenschaft. .

Die Menge aller Punkt  $X$ , für die gilt, daß das Verhältnis der Abstände zu zwei festen Punkten  $A$  und  $B$  konstant ist, ist der Apollonische Kreis  $k_a$ . Sein Mittelpunkt ist der Halbierungspunkt zwischen dem inneren und dem äußeren Teilverhältnis und er verläuft durch diese beiden Punkte.

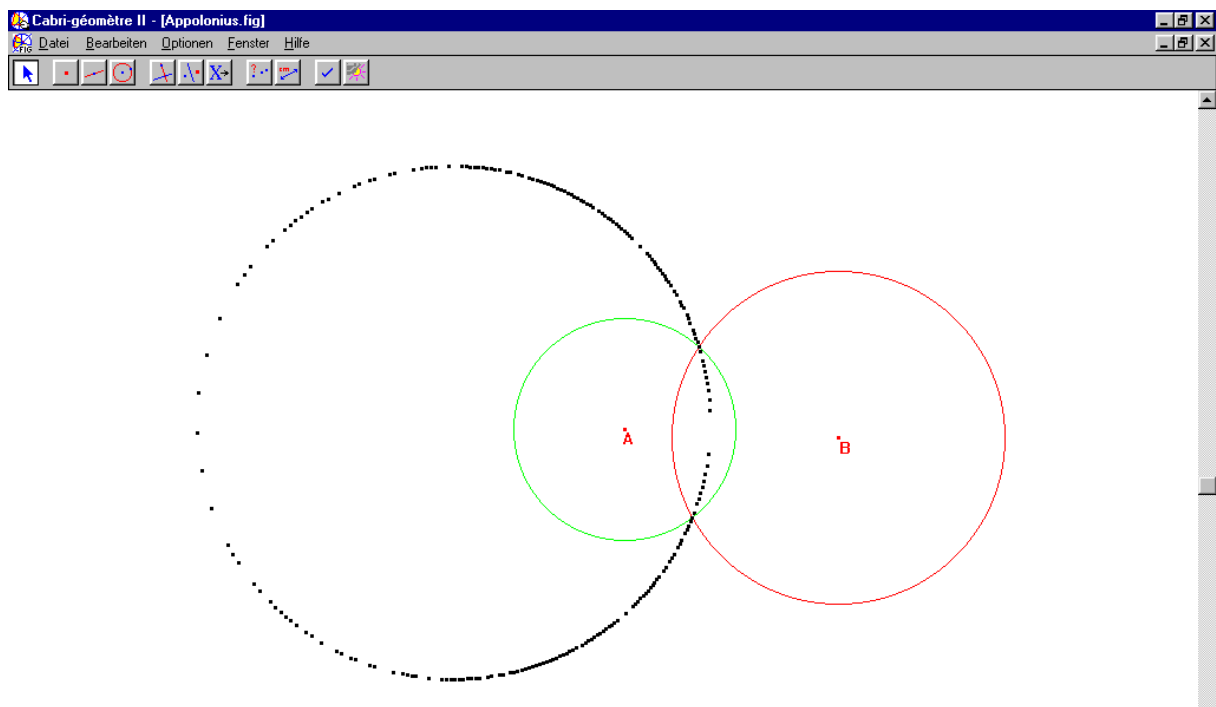
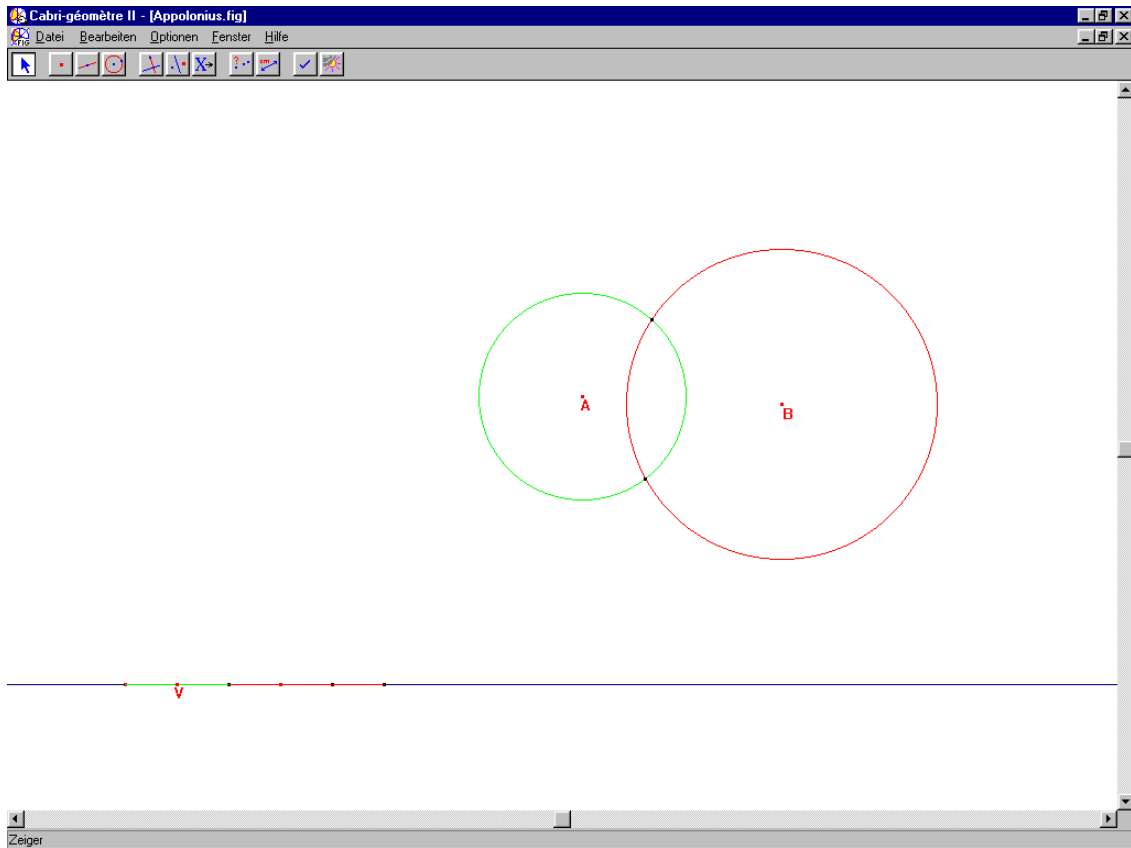
$$k_a = \left\{ X \mid \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \text{konstant} \right\}$$



#### b) Cabri Geometrie:

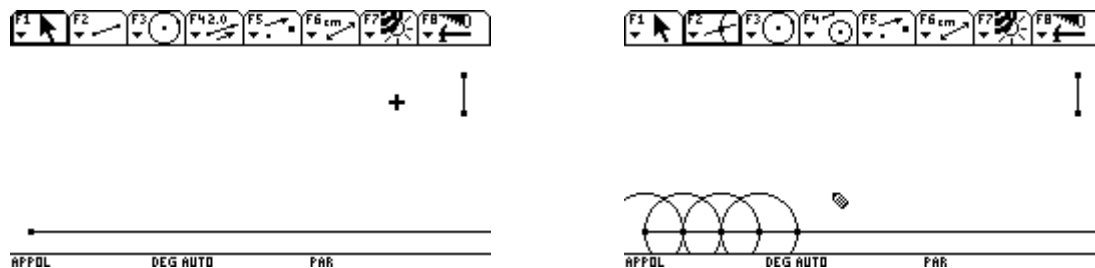
Auf einer Geraden ist von ihrem Punkt aus eine Strecke aufgetragen. Mit Hilfe der Zirkelfunktion ist diese Strecke noch fünfmal auf dieser Geraden abgetragen. Um die beiden Punkte  $A$  und  $B$  ist jeweils ein Kreis angelegt, dessen Radius die doppelte Streckelänge bzw. die dreifache Streckenlänge besitzt. Die Schnittpunkte dieser Kreise sind Punkte des Kreises von Apollonios für das Verhältnis 2:3. Wenn man die Spur für die beiden Punkte einschaltet, kann man durch verändern der Streckenlänge die Ortskurve erzeugen.



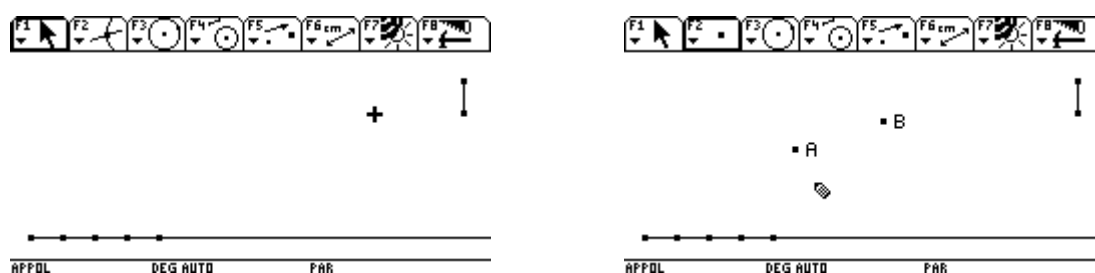


**Mit der Cabri-Geometrie am Voyage 2000:**

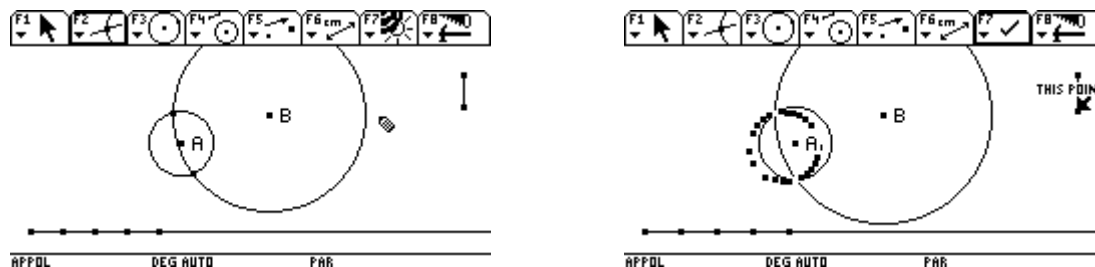
Am unteren Bildschirmrand wird ein Strahl und am rechten Bildschirmrand wird eine Strecke aufgetragen. Die Länge der Strecke wird mit der Funktion *Compass* viermal auf dem Strahl abgetragen.



Die Kreise werden ausgeblendet und es werden die beiden Punkte *A* und *B* festgelegt.



Ein Kreis mit Mittelpunkt *A* und Radius gleich der Streckenlänge und ein Kreis mit Mittelpunkt *B* und Radius gleich der dreifachen Streckenlänge werden gezeichnet. Danach werden die Schnittpunkte der Kreise bestimmt. Bei Veränderung der Streckenlänge hinterlassen die Schnittpunkte der beiden Kreise als Spur den Kreis von Apollonios.



**c) Nachweis mit dem Voyage 200**

Angabe:

Berechne Mittelpunkt und Radius des Kreises des Apollonios für die Punkte  $A = (ax | ay)$  und  $B = (bx | by)$  und das Teilverhältnis  $n$ !

Stelle den Kreis und die Strecke  $AB$  durch eine Parameterdarstellung für  $A = (1 | 2)$  und  $B = (10 | 7)$  und  $n = \frac{1}{3}$  dar.

Zunächst geben wir die Punkte *A* und *B* und einen variablen Punkt  $XP$  ein. Danach setzen wir das Verhältnis der Strecken an.

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} \rightarrow a \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix} \rightarrow b \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$

APFDL RAD AUTO PAR 2/40

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow xp \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $\text{norm}(a - xp) = n \rightarrow g11$
- $\text{norm}(b - xp) = n \rightarrow g11$
- $\frac{\sqrt{x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2}}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot bx \cdot x + y^2 - 2 \cdot by \cdot y + bx^2 + by^2}} = n$
- norm(a-xp)/(norm(b-xp))=n→g11**

APFDL RAD AUTO PAR 4/40

Nun wird die Gleichung bruchfrei und anschließend durch Quadrieren wurzelfrei gemacht. Die Gleichung erhält die Form einer Kreisgleichung. Durch Division kann dann der Koeffizient von  $x^2$  und  $y^2$  auf 1 normiert werden.

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\frac{\sqrt{x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2}}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot bx \cdot x + y^2 - 2 \cdot by \cdot y + bx^2 + by^2}} = n$
- $g11 \cdot \text{getDenom}(\text{left}(g11)) \rightarrow g12$
- $\sqrt{x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2} = n \cdot$
- $g12^2 \rightarrow g13$
- $x^2 - 2 \cdot ax \cdot x + y^2 - 2 \cdot ay \cdot y + ax^2 + ay^2 = n^2$
- g12^2→g13**

APFDL RAD AUTO PAR 6/40

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\text{left}(g13) - \text{right}(g13) \rightarrow g14$
- $(1 - n^2) \cdot x^2 + (2 \cdot n^2 \cdot bx - 2 \cdot ax) \cdot x + (1 - n^2) \cdot$
- $\text{propFrac}\left(\frac{g14}{1 - n^2}\right) \rightarrow g15$
- $\frac{n^2 \cdot x^2}{n^2 - 1} - \frac{x^2}{n^2 - 1} - \frac{2 \cdot n^2 \cdot bx \cdot x}{n^2 - 1} + \frac{2 \cdot ax \cdot x}{n^2 - 1} + \frac{r}{r}$
- propFrac(g14/(1-n^2))→g15**

APFDL RAD AUTO PAR 8/40

Jetzt lassen sich aus der Gleichung die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises ablesen und dann der Radius des Kreises bestimmen.

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\text{left}(g13) - \text{right}(g13) \rightarrow g14$
- $(1 - n^2) \cdot x^2 + (2 \cdot n^2 \cdot bx - 2 \cdot ax) \cdot x + (1 - n^2) \cdot$
- $\text{propFrac}\left(\frac{g14}{1 - n^2}\right) \rightarrow g15$
- $\frac{n^2 \cdot y^2}{n^2 - 1} - \frac{y^2}{n^2 - 1} - \frac{2 \cdot n^2 \cdot by \cdot y}{n^2 - 1} + \frac{2 \cdot ay \cdot y}{n^2 - 1}$
- propFrac(g14/(1-n^2))→g15**

APFDL RAD AUTO PAR 8/40

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\text{left}(g13) - \text{right}(g13) \rightarrow g14$
- $(1 - n^2) \cdot x^2 + (2 \cdot n^2 \cdot bx - 2 \cdot ax) \cdot x + (1 - n^2) \cdot$
- $\text{propFrac}\left(\frac{g14}{1 - n^2}\right) \rightarrow g15$
- $\frac{ay \cdot y}{-1} + \frac{n^2 \cdot bx^2}{n^2 - 1} + \frac{n^2 \cdot by^2}{n^2 - 1} - \frac{ax^2}{n^2 - 1} - \frac{ay^2}{n^2 - 1}$
- propFrac(g14/(1-n^2))→g15**

APFDL RAD AUTO PAR 8/40

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\frac{ay \cdot y}{-1} + \frac{n^2 \cdot bx^2}{n^2 - 1} + \frac{n^2 \cdot by^2}{n^2 - 1} - \frac{ax^2}{n^2 - 1} - \frac{ay^2}{n^2 - 1}$
- $\frac{n^2 \cdot bx - ax}{n^2 - 1} \rightarrow mx \quad \frac{n^2 \cdot bx - ax}{n^2 - 1}$
- $\frac{n^2 \cdot by - ay}{n^2 - 1} \rightarrow my \quad \frac{n^2 \cdot by - ay}{n^2 - 1}$
- (n^2\*by-ay)/(n^2-1)→my**

APFDL RAD AUTO PAR 10/40

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $(x - mx)^2 + (y - my)^2 - g15 \rightarrow r^2$
- $\frac{n^2 \cdot (ax^2 - 2 \cdot ax \cdot bx + ay^2 - 2 \cdot ay \cdot by + bx^2 +$
- $\text{sqrt}(r^2) \rightarrow ra$
- $\frac{n}{n^2 - 1} \cdot \sqrt{ax^2 - 2 \cdot ax \cdot bx + ay^2 - 2 \cdot ay \cdot by + b}$
- J(r^2)→ra**

APFDL RAD AUTO PAR 12/40

Es folgt die Eingabe der speziellen Daten.

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $\frac{n}{n^2 - 1} \cdot \sqrt{ax^2 - 2 \cdot ax \cdot bx + ay^2 - 2 \cdot ay \cdot by + b}$
- $1 \rightarrow ax \quad 1$
- $2 \rightarrow ay \quad 2$
- $10 \rightarrow bx \quad 10$
- $7 \rightarrow by \quad 7$
- $1/3 \rightarrow n \quad 1/3$

APFDL RAD AUTO PAR 17/40

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up

- $10 \rightarrow bx \quad 10$
- $7 \rightarrow by \quad 7$
- $1/3 \rightarrow n \quad 1/3$
- $mx \quad -1/8$
- $my \quad 11/8$
- $ra \quad \frac{3 \cdot \sqrt{106}}{8}$
- ra**

APFDL RAD AUTO PAR 20/40

Im Parametermode wird der Kreis, die Strecke und ihre Aufteilung durch geschickte Wahl des Parameters  $t$  und der Windowvariablen  $tstep$  auf einmal dargestellt.

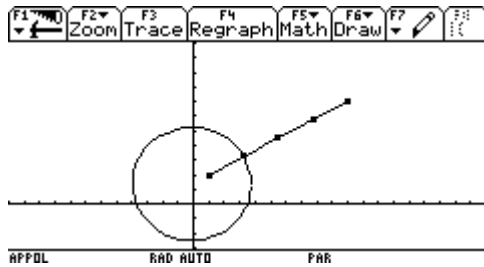
```

F1 Zoom F2 Edit F3 All F4 Style F5 # (P.S.)
APLOTS
✓xt1=mx+ra*cos(t)
✓yt1=my+ra*sin(t)
✓xt2=ax+t*(bx-ax)|t≤1
✓yt2=ay+t*(by-ay)
✓xt3=ax+10*t/4*(bx-ax)|t≤.4
✓yt3=ay+10*t/4*(by-ay)
-----
xt1(t)=mx+ra*cos(t)
APFDL RAD AUTO PAR
    
```

```

F1 Zoom F2 Zoom
tmin=0.
tmax=6.28318530718
tstep=.1
xmin=-12.
xmax=19.
xscl=1.
ymin=-3.
ymax=11.
yscl=1.
-----
APFDL RAD AUTO PAR
    
```

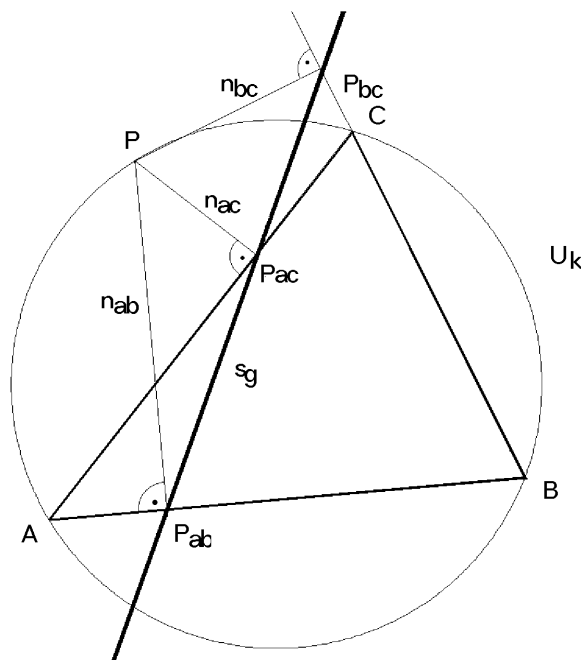
Über Zoomsqr erhält man eine unverzerrte Darstellung.



## 4) Die Simsonsche Gerade

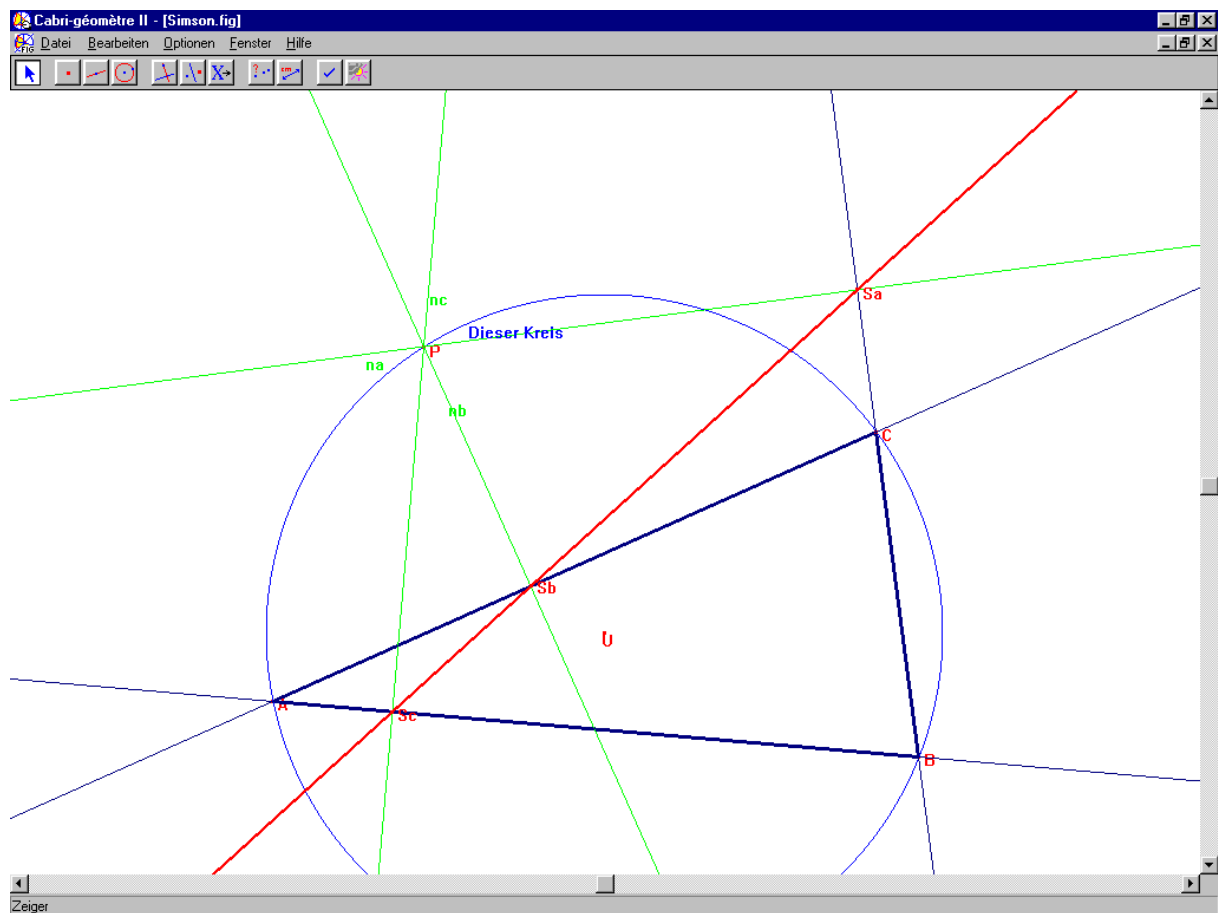
### a) Mathematische Grundlagen:

Fällt man von einem beliebigen Punkt  $P$  des Umkreises eines Dreiecks die Normalen  $n_{ab}$ ,  $n_{ac}$  und  $n_{bc}$  auf die Trägergeraden der Dreiecksseiten, so die liegen die Schnittpunkte  $P_{ab}$ ,  $P_{ac}$  und  $P_{bc}$  dieser Normalen mit den Trägergeraden auf einer Geraden, der Simsonschen Geraden. Diese Gerade wurde vom englischen Mathematiker Robert Simson (1687-1768) entdeckt.



### b) Cabri Geometrie

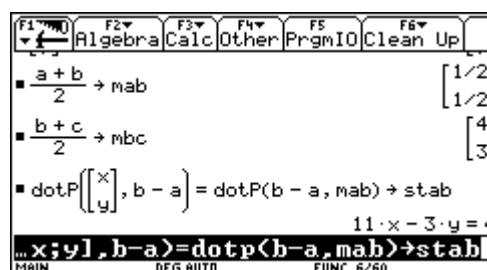
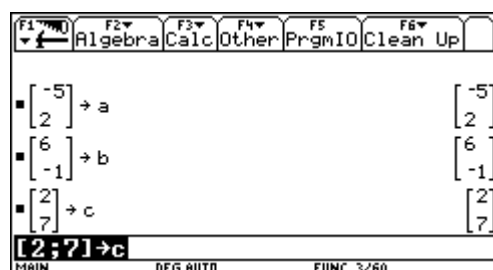
Das Dreieck und der Punkt am Umkreis können im Zugmodus verändert werden.



### c) Nachweis mit dem Voyage 200

Angabe:  $A = (-5|-2)$   $B = (6|-1)$   $C = (2|7)$

Zunächst werden die Koordinaten der Eckpunkte bestimmt. Dann werden die Streckensymmetralen aufgestellt.



Durch Schnitt der Streckensymmetralen wird der Umkreis  $um$  und dann sein Radius  $rum$  bestimmt.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
dotP([x], b-a) = dotP(b-a, mab) -> stab
11x - 3y = 4
dotP([x], b-c) = dotP(b-c, mbc) -> stbc
4x - 8y = -8
exp>list(solve(stab and stbc, {x y}), >
[14/19 26/19]
... tab and stbc, {x,y}, {x,y}>>I
MAIN DEG AUTO FUNC 8/60
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
([y])
4x - 8y = -8
exp>list(solve(stab and stbc, {x y}), >
[14/19 26/19]
1^T -> um [14/19]
norm(um - a) -> rum 5*sqrt(481) / 19
MAIN RAD AUTO FUNC 10/60
    
```

Nun wird ein beliebiger Punkt  $P$  am Umkreis ausgewählt. Die Normale  $nab$ ,  $mbc$  und  $nac$  durch ihn auf die Dreiecksseiten werden aufgestellt.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
norm(um - a) -> rum 19
um + rum * [cos(t) / sin(t)] -> p
[5*sqrt(481)*cos(t) / 19 + 14/19]
[5*sqrt(481)*sin(t) / 19 + 26/19]
MAIN RAD AUTO FUNC 11/60
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
dotP([x], b-a) = dotP(b-a, p) -> nab
11x - 3y = (55*sqrt(481)*cos(t) - 15*sqrt(481)*sin(t)) / 19
dotP([x], b-c) = dotP(b-c, p) -> nbc
4x - 8y = (20*sqrt(481)*cos(t) - 40*sqrt(481)*sin(t)) / 19
... [x][y], b-c) = dotP(b-c, p) -> nbc
MAIN RAD AUTO FUNC 13/60
    
```

Es folgt das Aufstellen der Gleichungen der Trägergeraden der Dreiecksseiten  $gab$ ,  $gac$  und  $gbc$ .

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
dotP([x], a-c) = dotP(a-c, p) -> nac
-7x - 5y = (-35*sqrt(481)*cos(t) - 25*sqrt(481)*sin(t)) / 19
b-a -> vab [11 / -3]
[3] -> nvab [3 / 11]
[3;11] -> nvab
MAIN RAD AUTO FUNC 16/60
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
c-a -> vac [5]
[5] -> nvac [5 / -7]
c-b -> vbc [8]
[8] -> nvbc [8 / 4]
[8;4] -> nvbc
MAIN RAD AUTO FUNC 20/60
    
```

Die Schnittpunkte der Trägergeraden mit den entsprechenden Normalen sind die drei Punkte  $pab$ ,  $pac$  und  $pbac$  der simonschen Geraden.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
([y])
8x + 4y = 44
(exp>list(solve(nab and gab, {x y}), >
[121*sqrt(481)*cos(t) - 33*sqrt(481)*sin(t) + 247] / 494
[-33*sqrt(481)*cos(t) - 9*sqrt(481)*sin(t) - 247] / 494
... and gab, {x,y}, {x,y}>>I -> pab
MAIN RAD AUTO FUNC 24/60
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
[-33*sqrt(481)*cos(t) - 9*sqrt(481)*sin(t) - 247] / 494
(exp>list(solve(nac and gac, {x y}), >
[245*sqrt(481)*cos(t) + 175*sqrt(481)*sin(t) - 2109] / 1406
[175*sqrt(481)*cos(t) + 125*sqrt(481)*sin(t) + 6327] / 1406
... and gac, {x,y}, {x,y}>>I -> pac
MAIN RAD AUTO FUNC 25/60
    
```

Nun stellen wir die Gerade auf, die durch die Punkte  $pab$  und  $pac$  hindurchgeht, und speichern sie unter  $si$  ab.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
[175*sqrt(481)*cos(t) + 125*sqrt(481)*sin(t) + 6327] / 1406
(exp>list(solve(nbc and gbc, {x y}), >
[481*cos(t) - 2*(sqrt(481)*sin(t) - 38)] / 19
[-2*sqrt(481)*cos(t) - 4*sqrt(481)*sin(t) - 57] / 19
... and gbc, {x,y}, {x,y}>>I -> pbac
MAIN RAD AUTO FUNC 26/60
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6 Up
[-2*sqrt(481)*cos(t) - 4*sqrt(481)*sin(t) - 57] / 19
pab - pac -> rvsi
[34*sqrt(481)*cos(t) - 92*sqrt(481)*sin(t) + 2] / 481
[-92*sqrt(481)*cos(t) - 34*sqrt(481)*sin(t) - 4] / 481
MAIN RAD AUTO FUNC 27/60
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
481 481 -4
[rvsi[2,1] → nrvti
[-rvsi[1,1]
[-92·√481·cos(t) - 34·√481·sin(t) - 4
2·(46·√481·sin(t) - 481) - 34·√481·cos(t)
[rvsi[2,1];rvsi[1,1] → nrvti
MAIN RAD AUTO FUNC 28/60
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
481 481
2·(46·√481·sin(t) - 481) - 34·√481·cos(t)
dotP([x], nrvti) = dotP(nrvti, pab) → si
cos(t)·(-92·√481·x - 34·√481·y) + sin(t)
[rvsi[2,1];rvsi[1,1] → nrvti
MAIN RAD AUTO FUNC 29/60
    
```

Zum Abschluss setzen wir den dritten Punkt *pab* zur Überprüfung in die Gerade *si* ein.

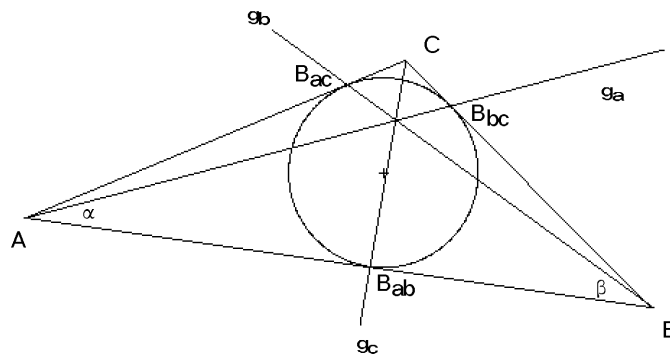
```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
2·(46·√481·sin(t) - 481) - 34·√481·cos(t)
dotP([x], nrvti) = dotP(nrvti, pab) → si
cos(t)·(-92·√481·x - 34·√481·y) + sin(t)
si | x=pb[1,1] and y=pb[2,1] true
si | x=pb[1,1] and y=pb[2,1]
MAIN RAD AUTO FUNC 30/60
    
```

## 5) Der Gergonne Punkt

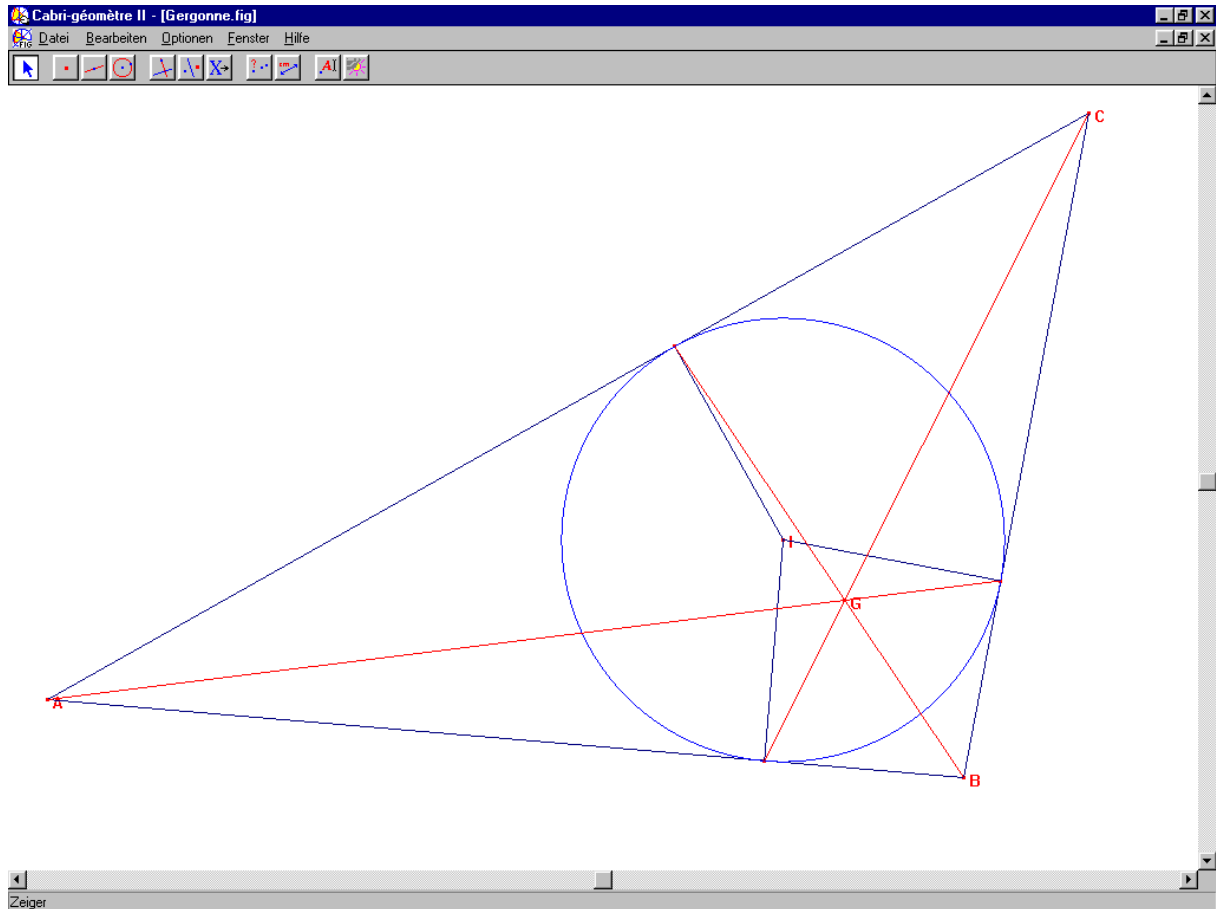
### a) Mathematische Grundlagen:

Dieser merkwürdige Punkt des Dreiecks wurde vom französischen Mathematiker Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) entdeckt.



Die drei Geraden  $g_a$ ,  $g_b$  und  $g_c$ , die die Eckpunkte eines Dreiecks mit jenen Punkten  $B_{bc}$ ,  $B_{ac}$  und  $B_{ab}$  auf den gegenüberliegenden Seite verbinden, in denen der Inkreis die Seiten berührt, schneiden einander in einem Punkt, dem Gergonne Punkt.

### b) Cabri Geometrie



### c) Nachweis mit dem Voyage 200

Angabe.

Eckpunkte des Dreiecks:  $A = (1|1)$   $B = (12|12)$   $C = (5|29)$

Zunächst definieren wir über den Programm-Editor die Funktion *ge2p*, die die allgemeine Geradengleichung durch die beiden Punkte *P1* und *P2* aufstellt. Dann werden die Eckpunkte des Dreiecks eingegeben.

```

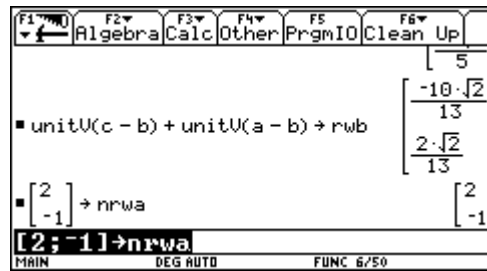
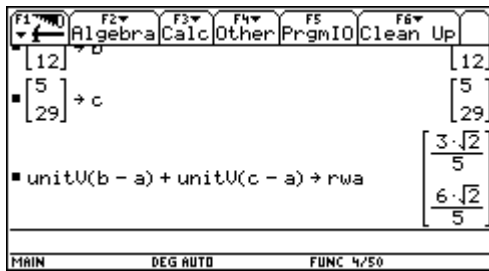
F1 Control I/O Var Find... Mode
:ge2p(p1,p2)
:Func
:Local rv,n
:p2-p1→rv
:[rv[2,1]][-rv[1,1]]→n
:dotP(n,[[x]|y])=dotP(n,p1)
:EndFunc
MAIN          DEG AUTO          FUNC
    
```

```

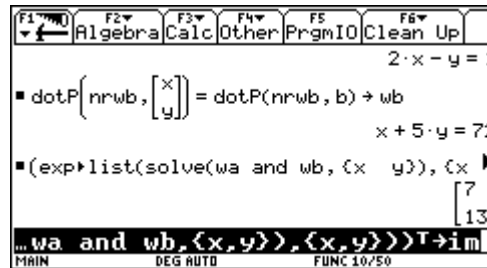
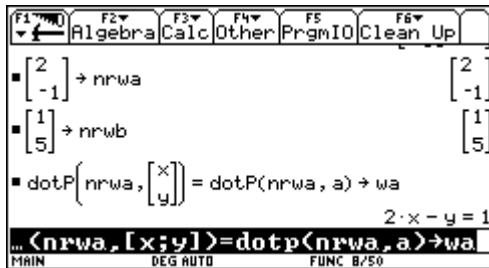
F1 Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
[ 1 ] → a      [ 1 ]
[ 1 ]           [ 1 ]
[ 12 ] → b     [ 12 ]
[ 12 ]         [ 12 ]
[ 5 ] → c      [ 5 ]
[ 29 ]         [ 29 ]
MAIN          DEG AUTO          FUNC 3/50
    
```

Dann berechnen wir die Richtungsvektoren der Winkelsymmetralen und ihre Normalvektoren.

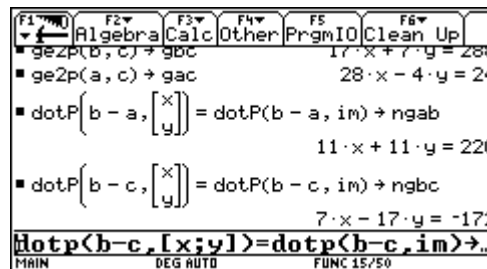
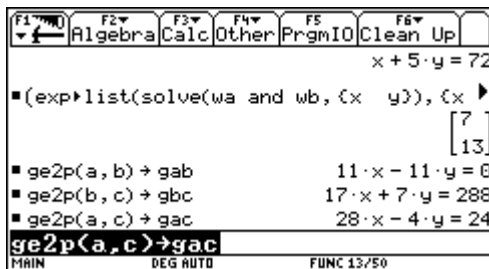




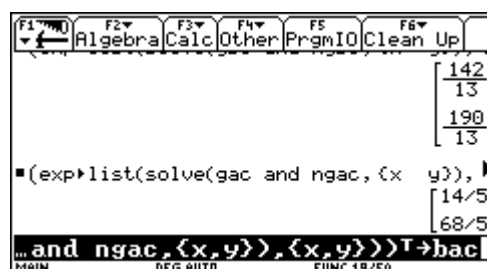
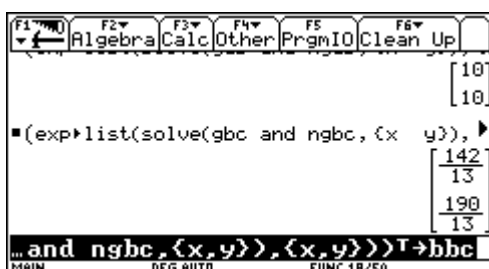
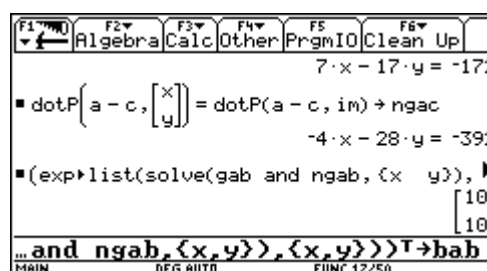
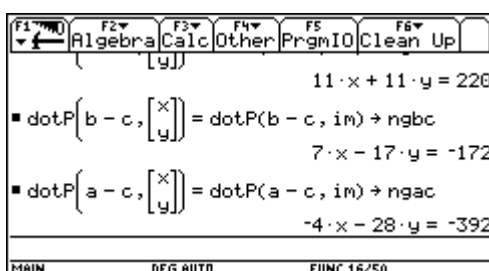
Dann stellen wir die Gleichungen der Winkelsymmetralen auf und berechnen den Inkreismittelpunkt.



Dann berechnen wir die Trägergeraden der Dreiecksseiten und die Gleichungen der Normalen durch den Inkreismittelpunkt auf die Trägergeraden.



Dann berechnen wir die Schnittpunkte der Normalen und der Trägergeraden, also die Berührungspunkte des Inkreises.



Dann stellen wir die Gleichungen der Geraden durch Berührungspunkt und gegenüberliegendem Eckpunkt auf. Wir schneiden zwei der drei Geraden miteinander, erhalten den Gergonne Punkt und überprüfen, ob die dritte Gerade auch durch den Gergonne Punkt verläuft.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
┌(exp▶list(solve(gac and hgac, {x y}), t.
└──────────────────────────────────────────────────────────
[14/5]
[68/5]
┌ ge2p(a, bbc) → ga      177·x - 129·y = 48/13
├──────────────────────────────────────────────────────────
├ ge2p(b, bac) → gb      8·x + 46·y = 648
├──────────────────────────────────────────────────────────
├ ge2p(c, bab) → gc     -19·x - 5·y = -240
├──────────────────────────────────────────────────────────
└ ge2p(c, bab) → gc
MAIN          DEG AUTO          FUNC 22/50
    
```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
┌ ge2p(b, bac) → gb      8·x + 46·y = 648
├──────────────────────────────────────────────────────────
├ ge2p(c, bab) → gc     -19·x - 5·y = -240
├──────────────────────────────────────────────────────────
├ (exp▶list(solve(ga and gb, {x y}), {x
└──────────────────────────────────────────────────────────
[1300]
[139]
[1732]
[139]
┌ ... a and gb, {x, y}, {x, y}})T → gp
MAIN          DEG AUTO          FUNC 23/50
    
```

```

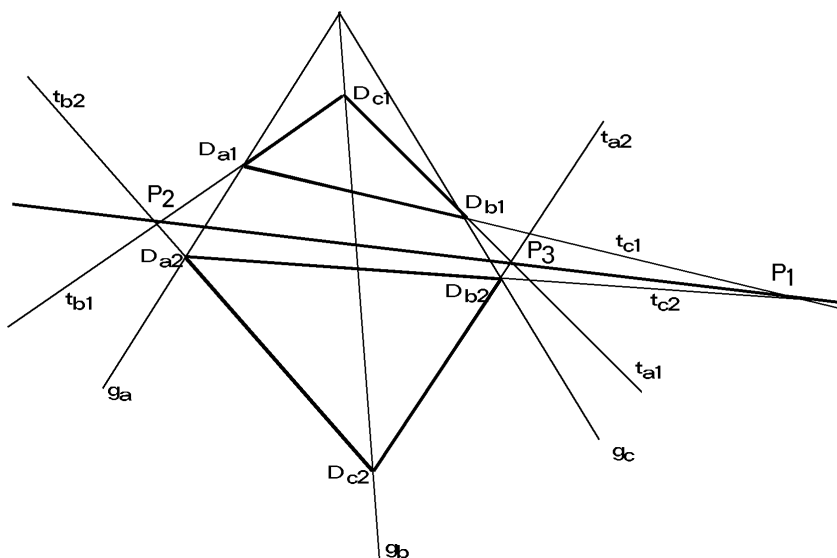
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
┌ ge2p(c, bab) → gc     -19·x - 5·y = -240
├──────────────────────────────────────────────────────────
├ (exp▶list(solve(ga and gb, {x y}), {x
└──────────────────────────────────────────────────────────
[1300]
[139]
[1732]
[139]
┌ -19·gp[1, 1] - 5·gp[2, 1] = -240      true
├──────────────────────────────────────────────────────────
└ -19*gp[1, 1] - 5*gp[2, 1] = -240
MAIN          DEG AUTO          FUNC 24/50
    
```

## 6) Der Lehrsatz von Desargue

### a) Mathematische Grundlagen:

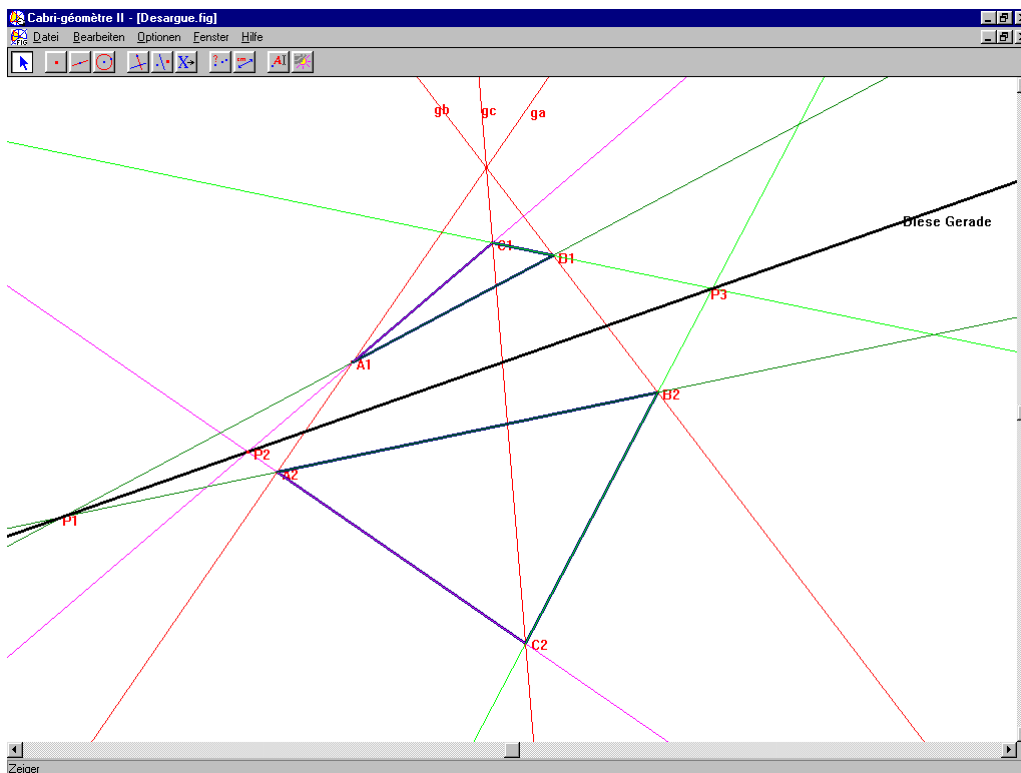
Dieser Lehrsatz wurde vom französischen Mathematiker Gerard Desargues (1593-1662) entdeckt.

Wenn die beiden Dreiecke  $D_{a1}D_{b1}D_{c1}$  und  $D_{a2}D_{b2}D_{c2}$  so liegen, daß sich die Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte in einem Punkt schneiden, so liegen die Schnittpunkte der Trägergeraden entsprechender Seiten auf einer Geraden.



### b) Cabri Geometrie

Die drei Geraden, auf denen die Eckpunkte der Dreiecke liegen, und die Eckpunkte der Dreiecke lassen sich im Zugmodus verändern.



### c) Nachweis mit dem Voyage 200

Den Schnittpunkt der drei schneidenden Geraden legen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den Ursprung und wählen für eine Gerade die y-Achse. Die anderen beiden Geraden werden mit beliebiger Richtung gewählt:

$$g1: \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad g2: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \cdot t \\ b \cdot t \end{pmatrix} \quad g3: \vec{x} = \begin{pmatrix} c \cdot t \\ d \cdot t \end{pmatrix}$$

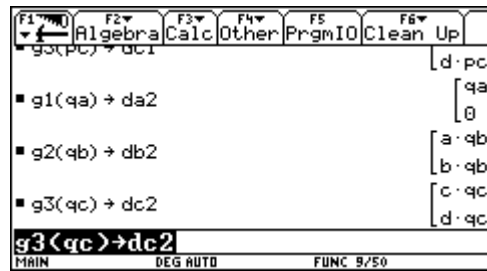
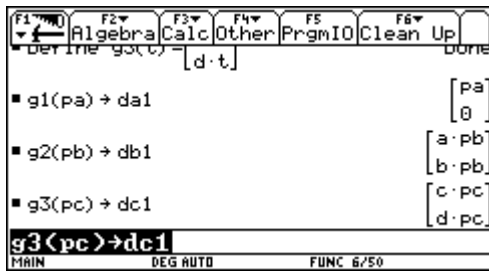
Zunächst definieren wir über den Programm-Editor die Funktion *ge2p*, die die allgemeine Geradengleichung durch die beiden Punkte *P1* und *P2* aufstellt. Dann werden die drei Geradengleichungen eingegeben und auf ihnen die Eckpunkte der Dreiecke festgelegt.

```

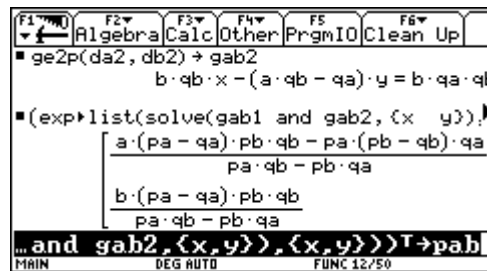
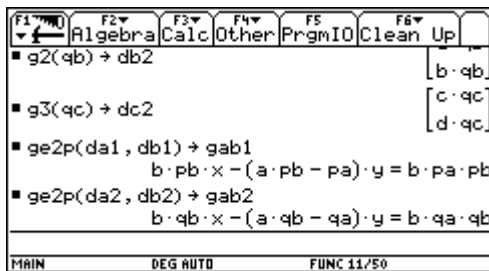
F1 Control F2 I/O Var F3 Find... F4 Mode
:ge2p(p1,p2)
:Func
:Local rv,n
:p2-p1→rv
:[rv[2,1]][-rv[1,1]]→n
:dotP(n,[[x][y]])=dotP(n,p1)
:EndFunc
MAIN DEG AUTO FUNC
    
```

```

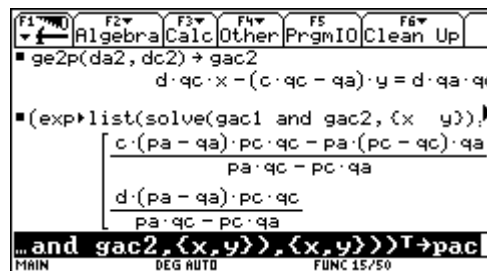
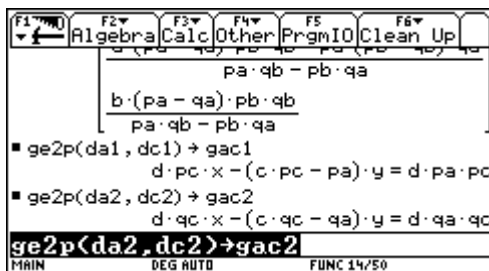
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
▪ Define g1(t) = [t]
                  [0] Done
▪ Define g2(t) = [a*t]
                  [b*t] Done
▪ Define g3(t) = [c*t]
                  [d*t] Done
Define g3(t)=[[c*t][d*t]]
MAIN DEG AUTO FUNC 3/50
    
```



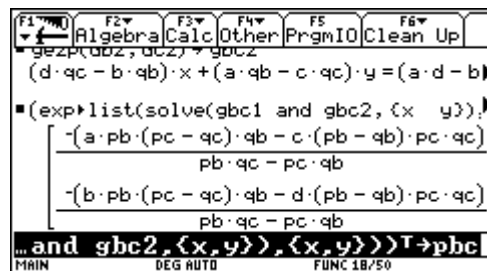
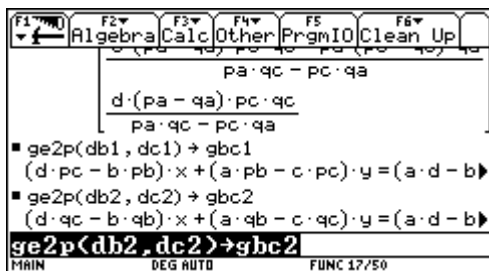
Dann werden die Trägergeraden der einander entsprechenden Dreiecksseiten aufgestellt. Zunächst durch die Eckpunkte  $da1$  und  $db1$  bzw.  $da2$  und  $db2$ . Den Schnittpunkt dieser beiden Geraden speichern wir unter  $pab$  ab.



Dann die Trägergeraden durch die Eckpunkte  $da1$  und  $dc1$  bzw.  $da2$  und  $dc2$ . Den Schnittpunkt dieser beiden Geraden speichern wir unter  $pac$  ab.



Dann die Trägergeraden durch die Eckpunkte  $db1$  und  $dc1$  bzw.  $db2$  und  $dc2$ . Den Schnittpunkt dieser beiden Geraden speichern wir unter  $phc$  ab.



Nun müssen wir noch überprüfen, ob diese drei Schnittpunkt auf einer Geraden liegen. Dazu stellen wir die Gerade  $g$  auf, die durch die Punkte  $pab$  und  $pac$  verläuft. In diese Geradengleichung setzen wir den Punkt  $phc$  ein. Die Gleichung ist erfüllt, die drei Punkte liegen auf dieser Geraden.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
-(a·pb·(pc-qb)-c·(pb-qb)·pc·qc)
pb·qc-pc·qb
-(b·pb·(pc-qb)-d·(pb-qb)·pc·qc)
pb·qc-pc·qb
■ ge2p(pab, pac) → g
(d·(pa-qa)·pc·qc - b·(pa-qa)·pb·qb)
(pa·qc-pc·qa) (pa·qb-pb·qa) ·x
ge2p(pab, pac) → g
MAIN DEG AUTO FUNC 19/50
    
```

```

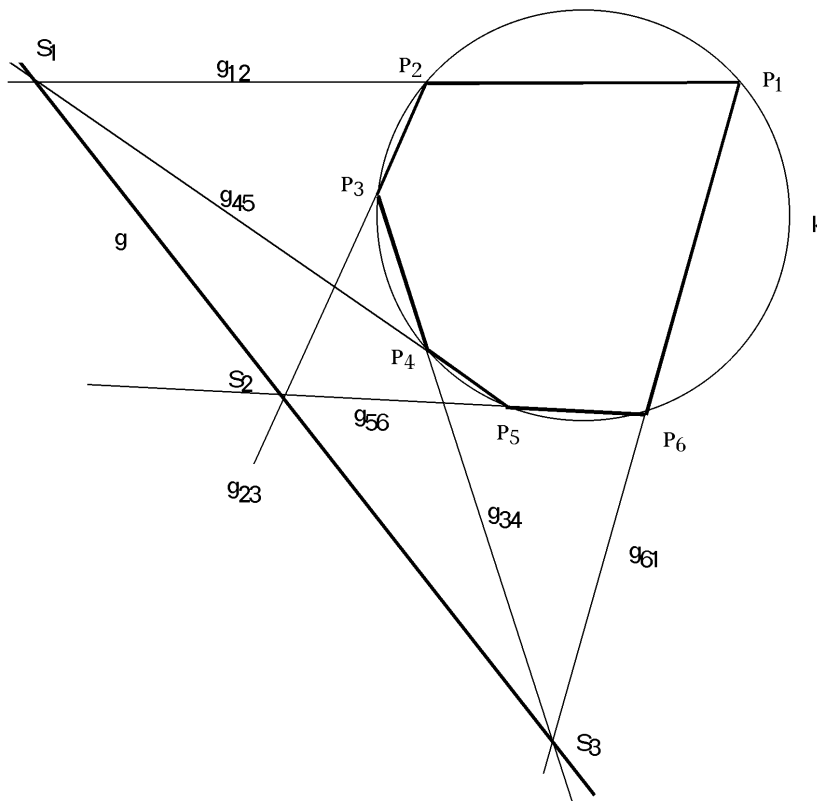
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
pb·qc-pc·qb
■ ge2p(pab, pac) → g
(d·(pa-qa)·pc·qc - b·(pa-qa)·pb·qb)
(pa·qc-pc·qa) (pa·qb-pb·qa) ·x
■ (pc·qc - b·(pa-qa)·pb·qb)
(c·qa - pa·qb - pb·qa) ·pbc[1,1] +
true
... a*qc-pc*qa)*(pa*qb-ph*qa)) → g
MAIN DEG AUTO FUNC 1/20
    
```

## 7) Der Lehrsatz von Pascal

### a) Mathematische Grundlagen:

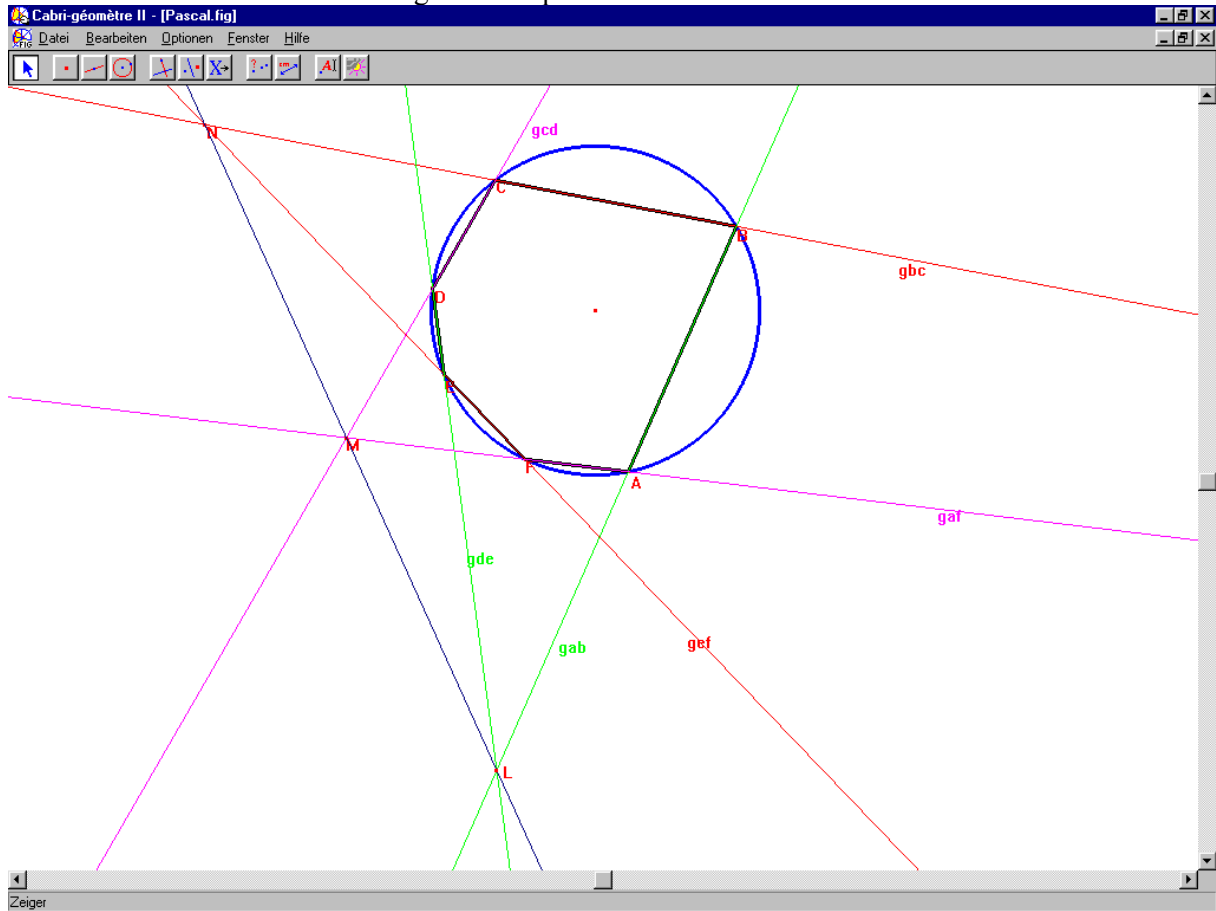
Im Alter von 16 Jahren veröffentlichte der französische Mathematiker Blaise Pascal (1623-1662) diesen Lehrsatz.

Wenn ein Sechseck einen Umkreis besitzt und gegenüberliegende Seiten nicht parallel sind, so liegen die Schnittpunkte der Trägergeraden gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.



### b) Cabri Geometrie

Die Größe des Kreises und die Lage der Eckpunkte des Sechseckes am Kreis lässt sich verändern.



### c) Nachweis mit dem Voyage 200

Angabe:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$p1 = (8|6) \quad p2 = (6|8) \quad p3 = (-6|8) \quad p4 = (0|-10) \quad p5 = (6|-8) \quad p6 = (8|-6)$$

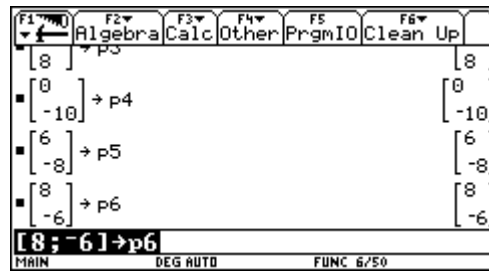
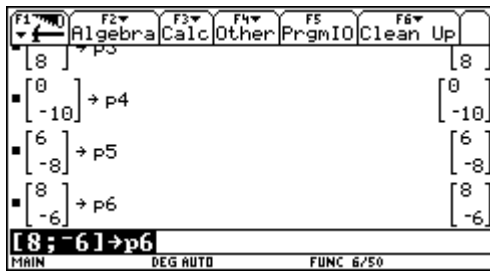
Zunächst definieren wir über den Programm-Editor die Funktion *ge2p*, die die allgemeine Geradengleichung durch die beiden Punkte *P1* und *P2* aufstellt. Dann geben wir die sechs Eckpunkte ein.

```

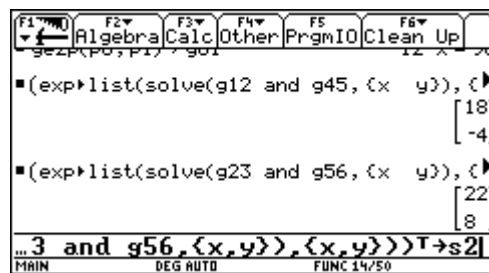
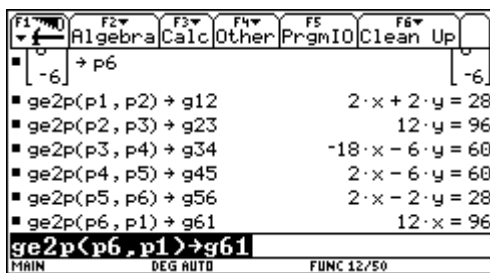
F1 Control F2 1/0 Var Find... Mode
:ge2p(p1,p2)
:Func
:Local rv,n
:p2-p1→rv
:[rv[2,1]][-rv[1,1]]→n
:dotP(n,[[x][y]])=dotP(n,p1)
:EndFunc
    
```

```

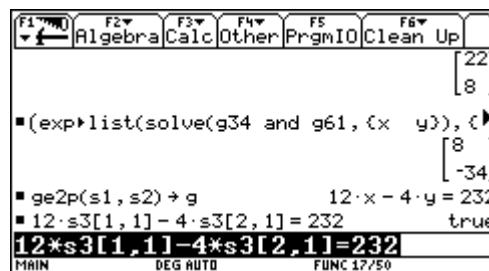
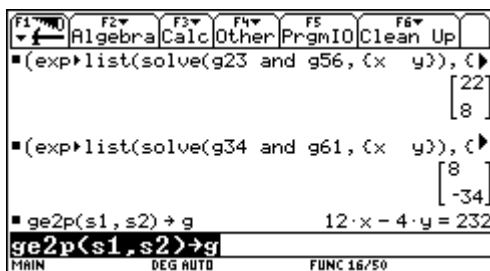
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up
[ 8 ] → p1 [ 8 ]
[ 6 ] → p2 [ 6 ]
[ 8 ] → p3 [ 8 ]
[ -6 ] → p3 [-6 ]
[ 8 ] → p3 [ 8 ]
    
```



Dann werden die Trägergeraden der Sechseckseiten aufgestellt und die Trägergeraden gegenüberliegender Seiten miteinander geschnitten. Die Schnittpunkte werden unter  $s1$  und  $s2$  und  $s3$  abgespeichert.



Dann stellen wir die Gerade durch  $s1$  und  $s2$  auf und überprüfen, ob  $s3$  auf dieser Geraden liegt.



## 8) Der Fermatsche Punkt

### a) Mathematische Grundlagen

Der Fermatsche Punkt des Dreiecks ist jener Punkt, für den die Summe der Abstände zu den drei Eckpunkten ein Minimum ist.

Er kann auf mehrere Arten konstruiert werden:

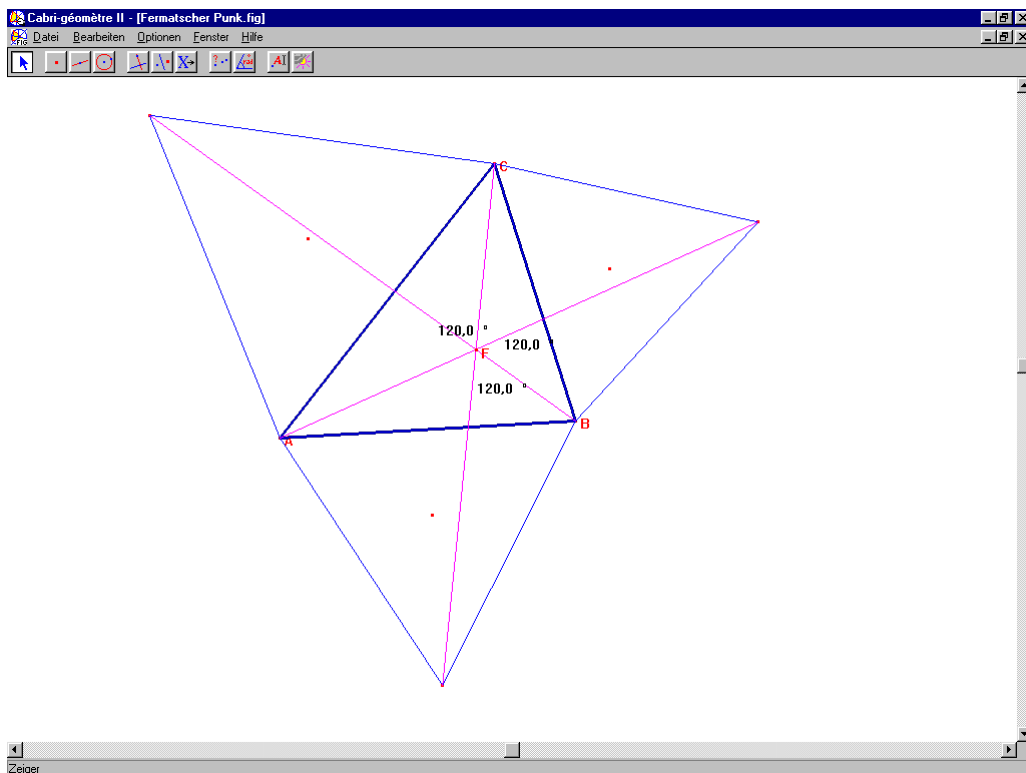
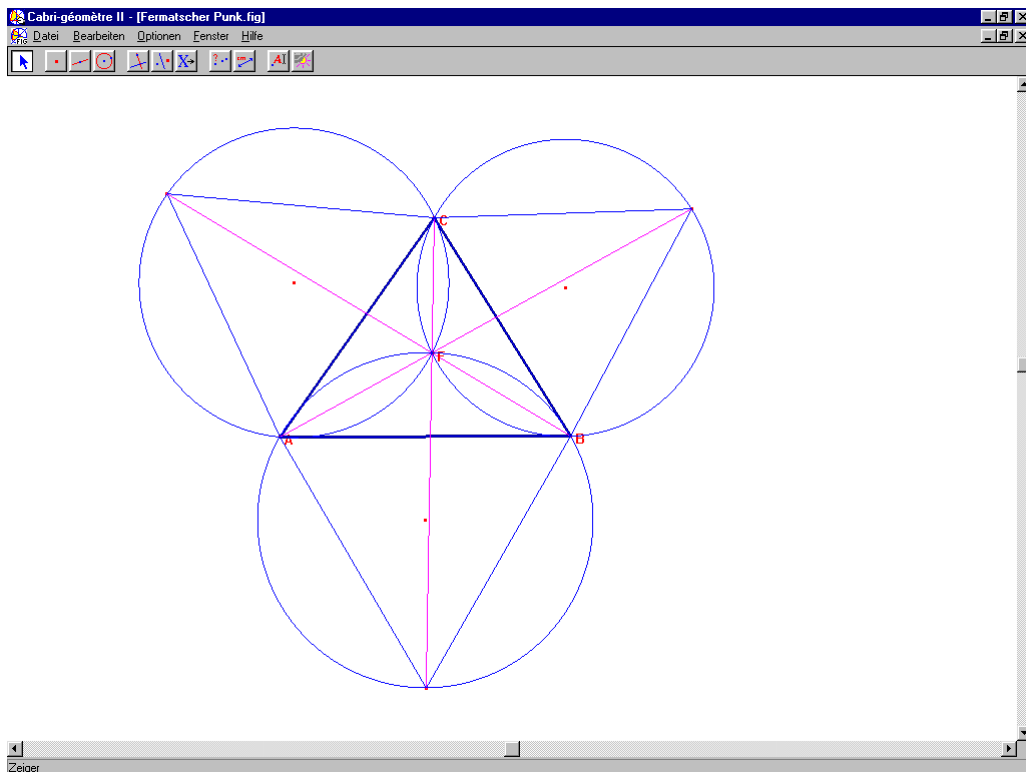
Man errichtet über den Dreiecksseiten gleichseitige Dreiecke und verbindet ihre Spitzen mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks. Der Schnittpunkt dieser Verbindungslinien ist der Fermatsche Punkt.

Die drei Umkreise der oben beschriebenen Dreiecke scheiden einander im Fermatschen Punkt.

Womit aus dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel folgt, dass benachbarte Verbindungslinien des Fermatschen Punktes mit den Eckpunkten des Dreiecks einen Winkel von  $120^\circ$  einschließen.

## b) Cabri Geometrie

Die Eckpunkte des Dreiecks lassen sich im Zugmodus verändern.





### c) Nachweis mit dem Voyage 200

Angabe:

Eckpunkte des Dreiecks:  $A = (0|0)$   $B = (bx|0)$   $C = (cx|cy)$

Zunächst definieren wir über den Programm-Editor die Funktion *ge2p*, die die allgemeine Geradengleichung durch die beiden Punkte *P1* und *P2* aufstellt. Dann werden die drei Eckpunkte des Dreiecks eingegeben.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:ge2p(p1,p2)
:Func
:Local rv,n
:p2-p1→rv
: [[rv[2,1]][-rv[1,1]]]→n
: dotP(n, [[x][y]])=dotP(n,p1)
:EndFunc
MAIN          DEG AUTO          FUNC
    
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
▪ [ 0 ] → a [ 0 ]
▪ [ 0 ] → a [ 0 ]
▪ [ bx ] → b [ bx ]
▪ [ 0 ] → b [ 0 ]
▪ [ cx ] → c [ cx ]
▪ [ cy ] → c [ cy ]
[[cx][cy]]→c
MAIN          DEG AUTO          FUNC 3/50
    
```

Nun wollen wir die Spitzen der gleichseitigen Dreiecke über den Dreiecksseiten errichten. Dazu berechnen wir die Halbierungspunkte der Dreiecksseiten, die Vektoren zwischen den Eckpunkten und ihre Normalvektoren.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
[[cy]]
▪ a + b → mab [ bx ]
▪ a + b → mab [ 2 ]
▪ a + b → mab [ 0 ]
▪ a + c → mac [ cx ]
▪ a + c → mac [ 2 ]
▪ a + c → mac [ cy ]
MAIN          DEG AUTO          FUNC 5/50
    
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
▪ b + c → mbc [ 2 ]
▪ b + c → mbc [ cy ]
▪ b + c → mbc [ 2 ]
▪ b - a → vab [ bx ]
▪ b - a → vab [ 0 ]
▪ [ 0 ] → nvab [ 0 ]
▪ [ -bx ] → nvab [ -bx ]
[[0][-bx]]→nvab
MAIN          DEG AUTO          FUNC 8/50
    
```

Vorsicht, bei der Wahl des Normalvektors, dass die richtige Orientierung gewählt wird.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
▪ [ -bx ] → nvab [ -bx ]
▪ c - a → vac [ cx ]
▪ c - a → vac [ cy ]
▪ [ -cy ] → nvac [ -cy ]
▪ [ cx ] → nvac [ cx ]
▪ c - b → vbc [ cx - bx ]
▪ c - b → vbc [ cy ]
c-b→vbc
MAIN          DEG AUTO          FUNC 11/50
    
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
▪ c - a → vac [ cy ]
▪ c - a → vac [ cx ]
▪ [ -cy ] → nvac [ -cy ]
▪ [ cx ] → nvac [ cx ]
▪ c - b → vbc [ cx - bx ]
▪ c - b → vbc [ cy ]
▪ [ cy ] → nvbc [ cy ]
▪ [ bx - cx ] → nvbc [ bx - cx ]
MAIN          DEG AUTO          FUNC 12/50
    
```

Durch abtragen der Höhe des gleichseitigen Dreiecks von der Seitenmitte berechnen wir die Spitzen der drei gleichseitigen Dreiecke.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
▪ [ bx - cx ] → nvbc [ bx - cx ]
▪ mab + norm(vab)·√3 / 2 · unitV(nvab) → sc [ bx ]
▪ mab + norm(vab)·√3 / 2 · unitV(nvab) → sc [ 2 ]
▪ mab + norm(vab)·√3 / 2 · unitV(nvab) → sc [ -bx·√3 ]
▪ mab + norm(vab)·√3 / 2 · unitV(nvab) → sc [ 2 ]
m(vab)*√(3)/2*unitV(nvab)→sc
MAIN          DEG AUTO          FUNC 13/50
    
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
▪ mac + norm(vac)·√3 / 2 · unitV(nvac) → sb [ bx + cy ]
▪ mac + norm(vac)·√3 / 2 · unitV(nvac) → sb [ 2 ]
▪ mac + norm(vac)·√3 / 2 · unitV(nvac) → sb [ cx - cy·√3 ]
▪ mac + norm(vac)·√3 / 2 · unitV(nvac) → sb [ 2 ]
▪ mac + norm(vac)·√3 / 2 · unitV(nvac) → sb [ cx·√3 + cy ]
▪ mac + norm(vac)·√3 / 2 · unitV(nvac) → sb [ 2 ]
m(vac)*√(3)/2*unitV(nvac)→sb
MAIN          DEG AUTO          FUNC 14/50
    
```

Nun stellen wir die Gleichungen der Geraden auf, die die Spitzen der gleichseitigen Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkte verbinden.

Calculator screen showing the derivation of equation 'sa'. The top line shows the expression  $m(\text{norm}(vbc) \cdot \sqrt{3}) / 2 \cdot \text{unit}V(\text{nvbc}) \rightarrow sa$ . Below it, the expression is expanded to  $\frac{bx + cx + cy \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{bx \cdot \sqrt{3} - cx \cdot \sqrt{3} + cy}{2}$ . The bottom line shows the final stored equation:  $m(vbc) \cdot J(3) / 2 \cdot \text{unit}V(\text{nvbc}) \rightarrow sa$ .

Calculator screen showing the derivation of equation 'ga'. The top line shows  $ge2p(a, sa) \rightarrow ga$ . The middle line shows the equation  $\left(\frac{bx \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{cx \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{cy}{2}\right) \cdot x + \left(\frac{-bx}{2} - \frac{cx + cy \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \cdot y = bx \cdot \left(\frac{cx \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{cy}{2}\right)$ . The bottom line shows the stored equation:  $ge2p(b, sb) \rightarrow gb$ .

Da der Voyage nicht gewillt ist diese Gleichungen zu lösen, legen wir selbst Hand an und lösen  $gb$  und  $gc$  mit der Methode der gleichen Koeffizienten (Elimination von  $x$ ). Die entstehende Gleichung speichern wir unter  $gl$  ab.

Calculator screen showing the derivation of equation 'gb'. The top line shows  $ge2p(b, sb) \rightarrow gb$ . The middle line shows the equation  $\left(\frac{cx \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{cy}{2}\right) \cdot x + \left(bx - \frac{cx - cy \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \cdot y = bx \cdot \left(\frac{-bx \cdot \sqrt{3}}{2} - cy\right)$ . The bottom line shows the stored equation:  $ge2p(c, sc) \rightarrow gc$ .

Calculator screen showing the derivation of equation 'gc'. The top line shows  $ge2p(c, sc) \rightarrow gc$ . The middle line shows the equation  $\left(\frac{-bx \cdot \sqrt{3}}{2} - cy\right) \cdot x + \left(cx - \frac{bx}{2}\right) \cdot y = bx \cdot \left(\frac{-cx \cdot \sqrt{3}}{2}\right)$ . The bottom line shows the stored equation:  $2 - cy - gc \cdot (cx \cdot J(3) / 2 + cy / 2) \rightarrow gl$ .

Durch lösen dieser Gleichung nach  $y$  erhalten wir die  $y$ -Koordinate des Fermatschen Punktes. Diesen  $y$ -Wert setzen wir in die Gleichung  $gc$  ein und lösen nach  $x$  auf. Wir erhalten die  $x$ -Koordinate des Fermatschen Punktes.

Calculator screen showing the derivation of equation 'gl'. The top line shows  $gb \cdot \left(\frac{cx \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{cy}{2}\right) - gc \cdot \left(\frac{cx \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{cy}{2}\right) \rightarrow gl$ . The middle line shows the equation  $\left(\frac{-bx^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + bx \cdot \left(\frac{cx \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{3 \cdot cy}{2}\right) - \frac{cx^2 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \cdot y = \dots$ . The bottom line shows the stored equation:  $\text{solve}(gl, y)$ .

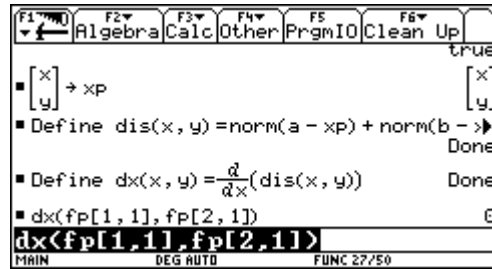
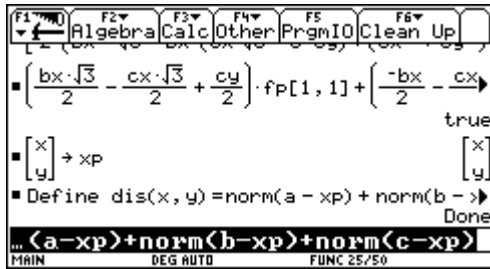
Calculator screen showing the derivation of equation 'g1'. The top line shows  $2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2)) - bx \cdot (bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} + cy) + cx^2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot cx \cdot cy) + c$ . The middle line shows the equation  $\text{solve}\left(\left(\frac{-bx \cdot \sqrt{3}}{2} - cy\right) \cdot x + \left(\frac{cx - bx}{2}\right) \cdot bx \cdot \left(\frac{bx \cdot \sqrt{3}}{2} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} + cy) + cx^2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot cx \cdot cy\right)\right)$ . The bottom line shows the stored equation:  $x = \frac{bx \cdot (bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} + cy) + cx^2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot cx \cdot cy)}{2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2))} = bx \cdot \left(\frac{-cx \cdot J(3) / 2 - cy / 2}{2}\right), x$ .

Dann speichern wir die Koordinaten des Fermatschen Punktes unter  $fp$  ab. Durch Einsetzen des Fermatschen Punktes in die dritte Geradengleichung  $ga$  überprüfen wir, ob auch die dritte Verbindung der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt durch den Fermatschen Punkt verläuft.

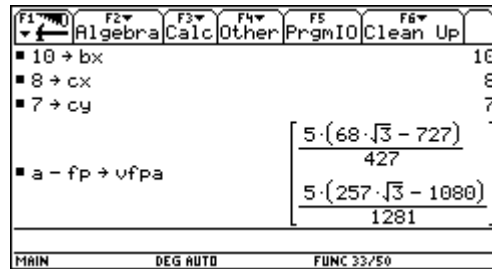
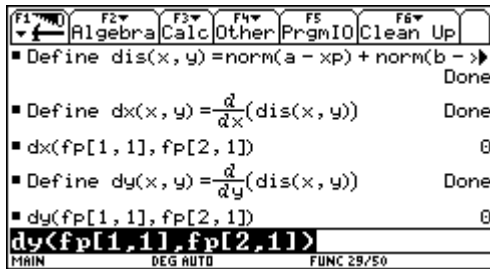
Calculator screen showing the derivation of equation 'fp'. The top line shows  $2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2)) - bx \cdot (bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} + cy) + cx^2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot cx \cdot cy) + c$ . The middle line shows the equation  $\frac{bx \cdot (bx \cdot (3 \cdot cx + cy \cdot \sqrt{3}) - 3 \cdot cx^2 + cy^2)}{2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2))}$ . The bottom line shows the stored equation:  $\frac{bx \cdot (bx \cdot (3 \cdot cx + cy \cdot \sqrt{3}) - 3 \cdot cx^2 + cy^2)}{2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2))} = \frac{bx \cdot (bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} + cy) + cx^2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot cx \cdot cy)}{2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2))} \cdot fp[1, 1] + \left(\frac{-bx}{2} - \frac{cx}{2}\right) \cdot true$ .

Calculator screen showing the derivation of equation 'fp'. The top line shows  $2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2)) - bx \cdot (bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} + cy) + cx^2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot cx \cdot cy) + c$ . The middle line shows the equation  $\frac{bx \cdot (bx \cdot (3 \cdot cx + cy \cdot \sqrt{3}) - 3 \cdot cx^2 + cy^2)}{2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2))}$ . The bottom line shows the stored equation:  $\frac{bx \cdot (bx \cdot (3 \cdot cx + cy \cdot \sqrt{3}) - 3 \cdot cx^2 + cy^2)}{2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2))} = \frac{bx \cdot (bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} + cy) + cx^2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot cx \cdot cy)}{2 \cdot (bx^2 \cdot \sqrt{3} - bx \cdot (cx \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot cy) + (cx^2 + cy^2))} \cdot fp[1, 1] + \left(\frac{-bx}{2} - \frac{cx}{2}\right) \cdot true$ .

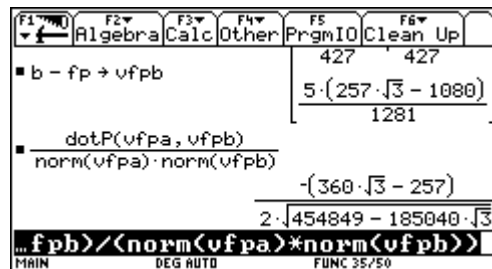
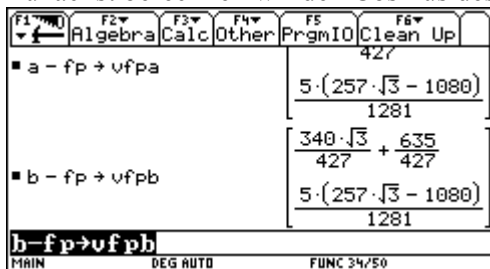
Jetzt werden wir mit Hilfe der Differentialrechnung die Minimalitätseigenschaft überprüfen. Wir bezeichnen den Variablen Punkt der Ebenen mit  $xp$  und definieren eine Funktion  $dis$ , die die Summe seiner Abstände zu den drei Eckpunkten berechnet. Dann berechnen wir die partielle Ableitung dieser Funktion nach  $x$  und setzen den Fermatschen Punkt ein.



Gleich verfahren wir mit der partiellen Ableitung nach y. Damit haben wir die notwendige Bedingung für ein Minimum nachgewiesen. Da aus geometrischen Sicht kein Maximum existieren kann, ist der Nachweis auch hinreichend. Zuletzt wollen wir noch den Winkel von  $120^\circ$  für ein spezielles Dreieck nachweisen.



Zunächst berechnen wir den Cosinus des Winkels.



Über den Befehl factor lässt sich der Ausdruck noch vereinfachen.

