Grundfragen des Mathematikunterrichts

Klassische Lehrsätze der ebenen Geometrie:

Verschiedene Zugänge zu Begründen und Beweisen

Mag. Walter Wegscheider

BG/BRG Klosterneuburg, PI-Hollabrunn

Ausgangslage

- *Stellung der Geometrie in der M-Oberstufe*
  - *Kommt nur in der analytischen Geometrie vor!*
  - *„Unterstufengeometrie“ setzt sich nicht fort!*
  - *Wenige Praxisbeispiele möglich!*
  - *Selbst Analytische Geometrie in BHS nicht vorhanden!*
- *Auch GZ und DG verlieren zunehmend Stellenwert!*

Ideen

- Mathematische Denkweisen mit Hilfe der Geometrie zeigen
- Idee der Beweisführung vertiefen
- Möglichkeit, sich einem Thema über verschiedene Zugänge zu nähern
- Fallunterscheidungen stärker thematisieren
- Vorteile bei geometrischen Zugängen
  - Anschaulichkeit
  - Klassischer historischer Hintergrund

Werkzeuge – DGS

- DGS – Dynamische Geometrie Systeme
  - CABRI – Generallizenz für AHS
  - weitere DGS frei erhältlich (Cinderella, Z.u.L., GeoNext, GeoGebra, …)
- Grundidee
  - Zugmodus – Randomisierter Beweis
  - Die Vermutung wird durch das Erzeugen weiterer (vieler!) hinreichend zufälliger Instanzen entweder sehr schnell widerlegt oder mit hohem Wahrscheinlich-keitsgrad erhärtet!

Werkzeuge – CAS

- CAS – Computeralgebrasystem
  - DERIVE – Generallizenz in AHS
  - MathCAD – Generallizenz in HTL
  - MUPAD – Lightversion frei
- Grundidee
  - Lösung geometrischer Probleme über analytische Geometrie – Algebraisierung über einen geeigneten Koordinatenbereich
    - a) einsetzen von Zufallszahlen
    - b) „durchrechnen“ mit Variablen

Ergänzung – formaler Beweis

- Schüler soll die verschiedenen Qualitäten der Begründung / Beweisführung kennen lernen!
- Genealogie einer Beweisführung soll erfahren werden!

Beispiel – Fermatscher Punkt

- Gesucht: jener Punkt *P* in einem Dreieck, wo die Summe der Entfernungen zu den Eckpunkten minimal ist!

- Die Problemstellung taucht zum ersten Mal etwa Mitte des 17. Jhdts. auf – Urheber ist Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Zugang 1 – Probieren!

- Wir erzeugen mit Hilfe von CABRI ein Dreieck mit einem beliebigen Punkt und versuchen eine Minimierung der Abstände herbeizuführen.

- Zugmodus zur Hilfe nehmen!

Zugang 2

- Geometrische Hypothesen

> Man errichtet über den Dreiecksseiten gleichseitige Dreiecke und verbindet ihre Spitzen mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks.
>
> Diese Verbindungslinien schneiden einander in einem Punkt – der Schnittpunkt ist der Fermatsche Punkt.

- Kontrolle mit Hilfe des DGS!

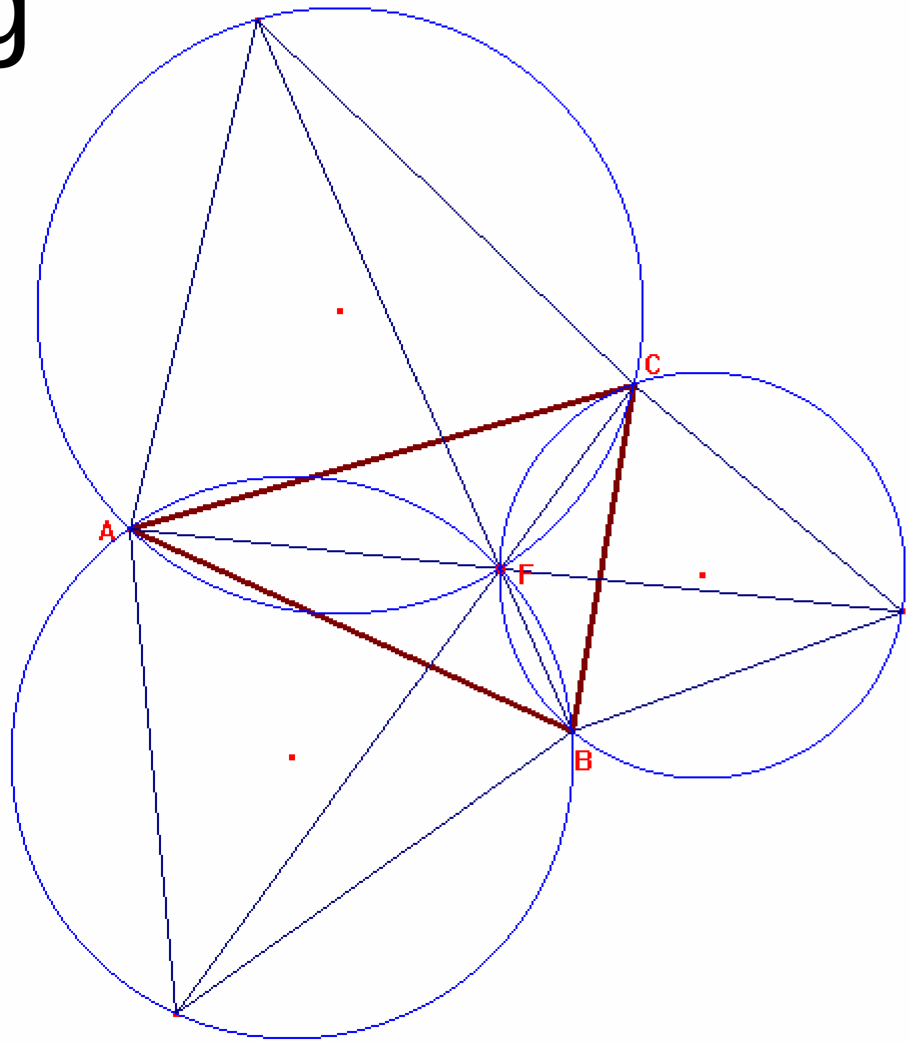
Erweiterung

- Die drei Umkreise der über die Dreiecksseiten aufgestellten gleichseitigen Dreiecke scheiden einander im Fermatschen Punkt!
- Benachbarte Verbindungslinien des Fermatschen Punktes schließen mit den Eckpunkten des Dreiecks einen Winkel von 120° ein!
- Kontrolle mit Hilfe des DGS!
  - Beachte: bei welchen Winkeln ist der Fermatsche Pkt. innerhalb des Dreiecks?

Darstellung

mit Hilfe von

Cabri Geometre



Zugang 3 – analytische Geometrie

- Wir legen die geometrische Problemstellung „günstig“ in ein Koordinatensystem.

$$A = (0 \mid 0) \quad B = (bx \mid 0) \quad C = (cx \mid cy)$$

- Zuerst der Versuch mit Hilfe von Zufallszahlen
  - *bx* … reelle Zahl beliebig zwischen 5 und 10
  - *cx* … reelle Zahl beliebig zwischen 0 und 6
  - *cy* … reelle Zahl beliebig zwischen 3 und 8

Vorgangsweise

- Initialisierung – Variablenwerte erzeugen.
- Aufstellen geeigneter Hilfsfunktionen.
- Berechnung der Spitzen der gleichseitigen Dreiecke *AC'B*, *AB'C*, *BA'C.*
- Aufstellen der Verbindungsgeraden zwischen den Spitzen der aufgesetzten Dreiecke und den Eckpunkten des ursprünglichen Dreiecks.
- Schnitt von zwei Verbindungsgeraden.
- Überprüfung, ob der berechnete Punkt auch auf der dritten Geraden liegt!
- Erzeugen einer Abstandsformel.
- Berechnen der partiellen Ableitungen für x und y für den Fermatschen Punkt.
- Falls die Ableitungen jeweils 0 ergeben, handelt es sich tatsächlich um ein Minimum!
- Berechnen des Innenwinkels (120° sollten herauskommen)

Berechnung in DERIVE

Fermatscher Punkt 1

Festlegen der Parameter – mittels Zufallszahlen

```
#1:     fermat(dummy, a, b, c) :=
          Prog
            InputMode := Word
            dummy := RANDOM(0)
            bx := 5·RANDOM(1) + 5
            cx := 6·RANDOM(1)
            cy := 8·RANDOM(1)
            a := [0, 0]
            b := [bx, 0]
            c := [cx, cy]
            RETURN [a, b, c]
```

Für die Berechnung der Streckensymmetralen und anschließenden Verbindungsgeraden brauchen wir:

- Halbierungspunkte der Seiten!
- Aufstellen des Normalvektors (ev. orientiert!)
- Aufstellen des Einheitsvektors!
- Allgemeine Geradengleichung aus Punkt + Richtungsvektor!
- Allgemeine Geradengleichung aus 2 Punkten!

Halbierungspunkt

#2: $\text{h\_pkt}(p1, p2) := \dfrac{p1 + p2}{2}$

Normalvektor orientiert: 1 ... gedreht nach rechts, bei allen anderen Werten nach links.

#3: $\text{n\_v}(v) := \left[v_2, -v_1\right]$

Der Einheitsvektor:

Vertiefung – analytische Geom.

- Wir wollen im nächsten Schritt versuchen, im CAS zu allgemeinen Lösungen zu gelangen.

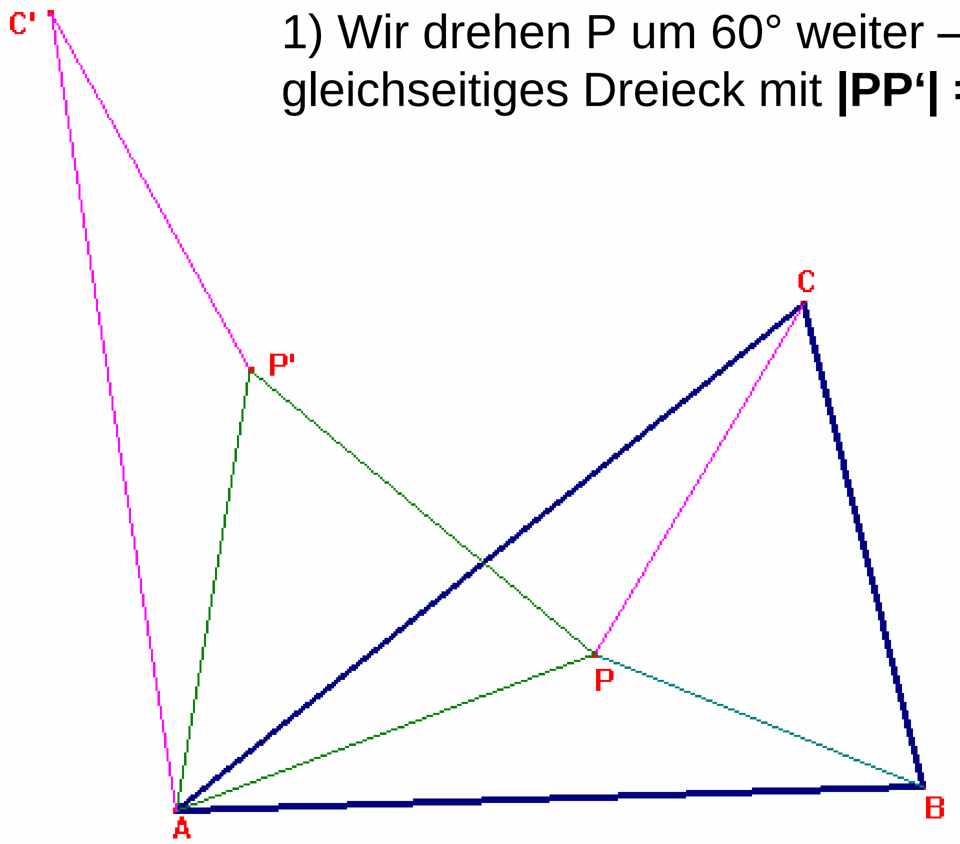
$$A = \left(0 \middle| 0\right) \quad B = \left(bx \middle| 0\right) \quad C = \left(cx \middle| cy\right)$$

- Wir bleiben bei der Grunddefinition, setzen die Punktkoordinaten jedoch unbestimmt!

Zugang 4 - elementargeometrisch

- Lösung nach J. E. Hofmann (1929)
  - Leitidee: gerade Linie ist kürzestmöglicher Streckenzug!
  - Problem: Hier handelt es sich zuerst nicht um einen Streckenzug, sondern die Strecken gehen von einem gemeinsamen festen Punkt aus (Streckendreibein!)
  - Lösung:
    Überführung Streckendreibein → Streckenzug

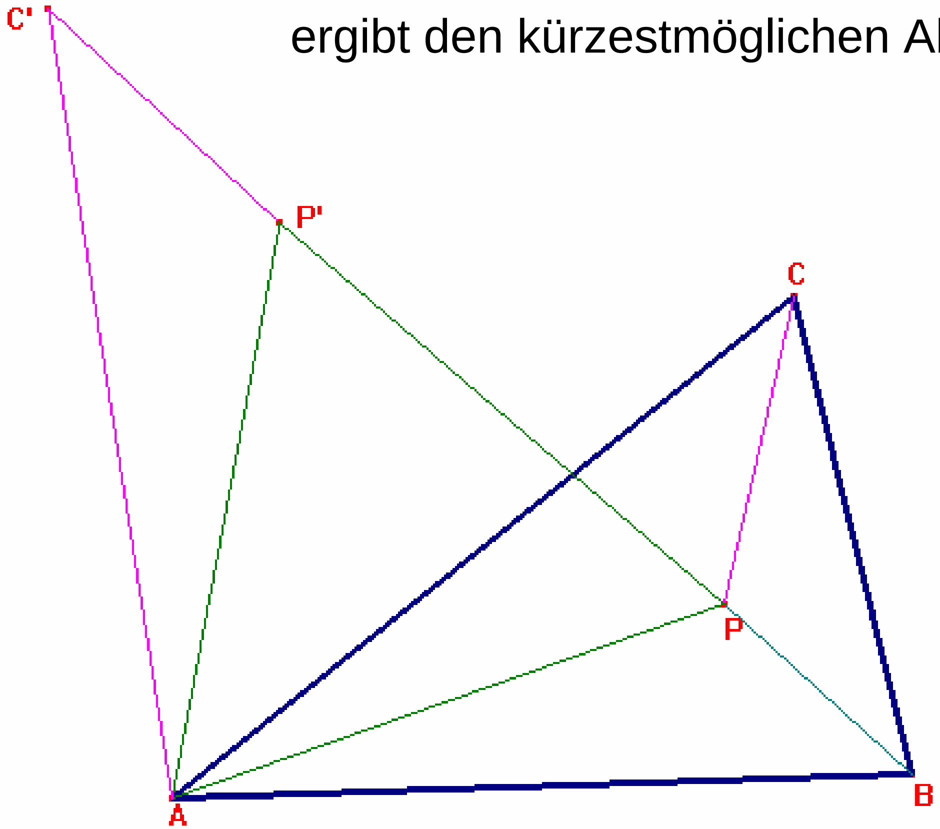
Überlegung wieder mit DGS



1) Wir drehen P um 60° weiter – es entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit **|PP'| = |PA|**

2) Wir drehen auch C um 60°. Durch |AP'|=|AP| und |AC'|=|AC| folgt: **|P'C'| = |PC|**

Alle Punkte auf einer Geraden



ergibt den kürzestmöglichen Abstand!

Folgen für die Innenwinkel:
$\angle PP'A = 60° \rightarrow \angle AP'C' = 120°$
$\rightarrow \angle APC = 120°$

$\angle P'PA = 60° \rightarrow \angle BPA = 120° \rightarrow$
$\angle BPC = 120°$

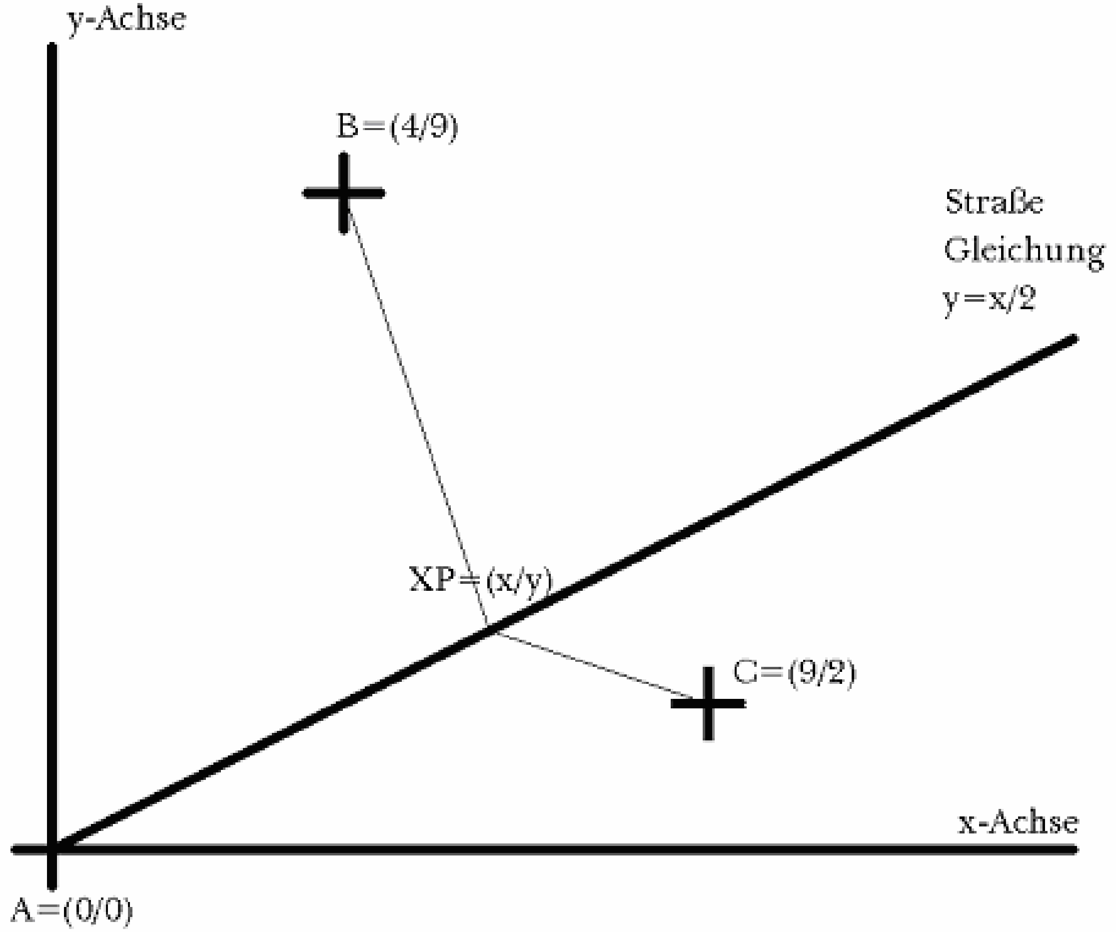
Von P aus werden drei Seiten des Dreiecks jeweils unter 120° gesehen!

Hinweis auf Konstruktion

- Aus dem Hofmannschen Beweis ergibt sich sofort die Konstruktionsvorschrift
  - Wie wurde C‘ konstruiert? – gleichseitiges Dreieck über der Seite b
  - Verbindung mit dem Eckpunkt B – der Fermatsche Punkt liegt auf der Verbindung!
  - Analog kann man auch von einer der anderen beiden Seiten ausgehen.
  - Der Schnittpunkte der drei Verbindungen ergibt den Fermatschen Punkt.

Anwendungsbeispiel

Elektrizitätswerk



Links

- http://www.acdca.ac.at/material/allgem/lehrs_geometrie1.htm
  Lehrsätze der ebenen Geometrie mit *DERIVE* und *CABRI*, Walter Wegscheider, ACDCA
- http://www.acdca.ac.at/material/allgem/lehrs_geometrie2.htm
  Lehrsätze der ebenen Geometrie mit *Voyage200*, Thomas Himmelbauer, ACDCA
- http://www.acdca.ac.at/material/allgem/deshpande.htm
  Überraschende Ergebnisse - Begründen, Beweisen mit verschiedenen Zugängen, Walter Wegscheider Hrsg., ACDCA
- http://www.acdca.ac.at/material/bsp/index.htm
  Beispielsammlung, Walter Wegscheider Hrsg., ACDCA
- http://did.mat.uni-bayreuth.de/~matthias/geometrieids/minimum/index2.html
  Über ein Extremwertproblem aus der Dreiecksgeometrie - historische und schulgeometrische Betrachtungen, Matthias Ehmann, Univ. Bayreuth

CABRI – Skriptum:

- http://www.pa.asn-sbg.ac.at/pasbg2/mathematik/cabrihelp/Index.htm
  ONLINE-Skript zu Cabri II für Windows, Friedrich Erlmoser, PÄDAK Salzburg

DERIVE – Skriptum:

- http://www.austromath.at/daten/derive/
  DERIVE 6, Online-Workshop, Walter Wegscheider, ACDCA