Klassische Lehrsätze der ebenen Geometrie:

Verschiedene Zugänge zu Begründen und Beweisen

Ausgangslage

Stellung der Geometrie in der M-Oberstufe lässt zu wünschen übrig!

- Geometrie kommt nur in Form der analytischen Geometrie vor!
- auch das nur in der AHS, in der BHS fällt auch analytische Geometrie weg!
- Die Betrachtungen in der „Unterstufengeometrie“ setzen sich in der Oberstufe nicht fort!
- Grund: der Praxisbezug ist oft nur schwer herzustellen – Geometrie wird oft als innermathematische „Spielerei“ abgetan

Auch die weiteren geometrischen Fächer - GZ und DG - verlieren zunehmend an Stellenwert (und Stunden!).

Ideen

- Mathematische Denkweisen sollen mit Hilfe der Geometrie dargestellt und den Schülern nahegebracht werden.
- Die Idee und Notwendigkeit einer Beweisführung soll vertieft werden
- Die Möglichkeiten, sich einem Thema über verschiedene Zugänge zu nähern, sollen gezeigt werden
- Die (mögliche) Entwicklung eines Themas soll bewusst gemacht werden
- Mathematische Sätze fallen nicht vom Himmel – zwischen Hypothese und endgültigem Beweis liegen oft viele Jahre (bis zu Jahrhunderten)
- Zufallszahlen sollen hinleiten zu: Numerik ist nichts hässliches, sondern integraler Bestandteil der Mathematik!
- Fallunterscheidungen stärker einbeziehen!

Der Vorteil bei geometrischen Zugängen ist

- Anschaulichkeit
- Klassischer historischer Hintergrund – man kann über die Probleme „Geschichten“ erzählen

Verwendete Werkzeuge

A) DGS – Dynamische Geometrie Systeme

CABRI (Cabri Geometre) ist in Generallizenz an Österreichs AHS vorhanden und (zumindest teilweise) eingeführt. Weitere DGS sind frei erhältlich (per Download): zB. Cinderella, Z.u.L. – Zirkel und Lineal, GeoNext, GeoGebra, …).

Grundlage und „Witz“ eines DGS: **Zugmodus**
Wir können einen **Randomisierten Beweis** führen: die Vermutung wird durch das Erzeugen weiterer (vieler!) hinreichend zufälliger Instanzen entweder sehr schnell widerlegt oder mit hohem Wahrscheinlich-keitsgrad erhärtet!

B) CAS – Computer Algebra System

Mehrere CAS sind schon seit langer Zeit an Österreichs Schulen verbreitet.

- DERIVE – Generallizenz für AHS
- MathCAD – Generallizenz für HTL
- TI-89/TI-92/TI-92+/Voyage200 – Handheld Technologie mit weiter Verbreitung

Weitere CAS am Markt: Mathematica (per Schulbuch erhältlich), Mupad (in einer Light-Version gratis per Download), Maple, …

Das CAS bietet als Grundlage für den geometrischen Zugang:
- Lösung geometrischer Probleme über die analytische Geometrie – Algebraisierung über einen geeigneten Koordinatenbereich
- Dies kann über eingesetzte Zufallszahlen (RANDOM-Funktion) erfolgen oder
- komplett algebraisch Durchrechnen ohne Rücksicht auf entstehende Monsterterme

Als krönenden Abschluss und Ergänzung sollen die Schüler dann herangeführt werden an einen

Formalen (elementargeometrischen) Beweis

Die Schüler sollen bei diesem Ablauf die verschiedenen Qualitäten der Begründungen / Beweisführungen kennenlernen. Außerdem soll die Genealogie einer Beweisführung – des Hintastens an eine Hypothese und ihre langsame Erhärtung erfahren werden.

Fermatscher Punkt

Gesucht wird:

Jener Punkt *P* in einem Dreieck, wo die Summe der Entfernungen zu den Eckpunkten minimal ist!

Die Problemstellung taucht zum ersten Mal etwa Mitte des 17. Jhdts. auf – Urheber ist Pierre de Fermat (1601 – 1665). Fermat war Richter und „Hobbymathematiker“ und höchst interessiert am Beweis geometrischer Theoreme - ohne unbedingt Relationen zur realen Welt herzustellen. Eine seiner bekanntesten Eigenschaften war die Formulierung höchst schwierig zu beantwortender Probleme – Huygens, Mersenne, Descartes, Pascal, Carcavi waren dabei seine Briefpartner.
Fermats bekannteste Fragestellungen kommen wohl aus der Zahlentheorie:

Der kleine Satz von Fermat:

Für alle Primzahlen p und alle natürlichen Zahlen n, die kein Vielfaches von p sind, gilt:

$n^{p-1}-1$ ist teilbar durch p

(n^{p-1} ergibt bei der Division durch p immer den Rest 1).

Der große Satz von Fermat (Fermats letzter Satz):

$$x^n + y^n = z^n$$

hat keine ganzzahligen Lösungen ohne Nullwert für x, y und z mit $n>2$ (n … ganzzahlig).

Fermat behauptete, einen Beweis dafür gefunden zu haben, schrieb ihn aber nicht nieder! Viele (Fehl-)-Versuche dauerten schließlich bis 1993/94, als der britische Mathematiker Andrew Wiles einen Beweis veröffentlichte, der heute anerkannt wird.

Betrachtungen mit Hilfe eines DGS

1) Wir versuchen, mit dem DGS händisch einen solchen Punkt zu bestimmen.
- Wir erzeugen ein Dreieck
- Wir erzeugen einen beliebigen Punkt *P*
- Wir messen die Abstände der Eckpunkte von *P*
- Wir berechnen die Summe der Abstände
- Wir verschieben den Punkt solange, bis wir ein Minimum (innerhalb der Rechengenauigkeit des Systems) gefunden haben.

2) Behauptung: Man errichtet über den Dreiecksseiten gleichseitige Dreiecke und verbindet ihre Spitzen mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks. Diese Verbindungslinien schneiden einander in einem Punkt - dieser Schnittpunkt ist der Fermatsche Punkt.
- Wir erzeugen ein Dreieck
- Wir erzeugen (mit Hilfe von Kreisen) die fehlenden Eckpunkte der über den Dreiecksseiten aufgestellten gleichseitigen Dreiecke.

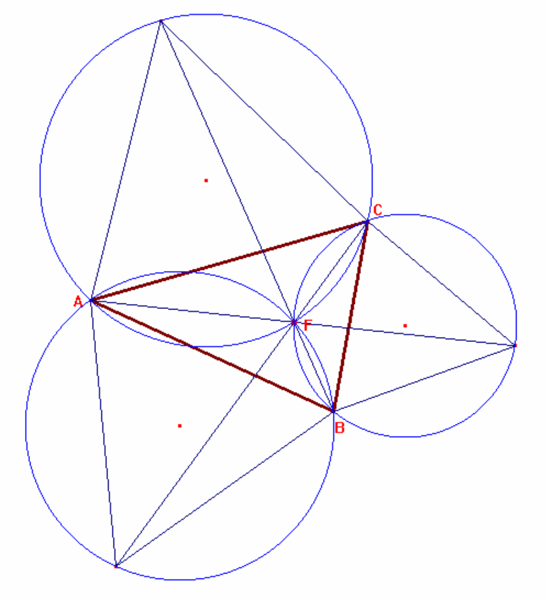
- Wir zeichnen die Dreiecke und lassen die Hilfskreise verschwinden.
- Wir verbinden die Spitzen der über den Dreiecksseiten aufgestellten gleichseitigen Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten.
- Wir schneiden diese Geraden und erhalten einen Punkt.

3) Wir kontrollieren, ob der konstruktiv gefundene Punkt mit unserer „händischen" Lösung ident (oder zumindest sehr nahe) ist.

4) Wir beobachten, wann der Fermatsche Punkt überhaupt konstruierbar ist – gibt es Winkel beim Dreieck, wo der Punkt nicht mehr im Dreieck liegt etc.?

Weiterführende Beobachtungen:

- Die drei Umkreise der oben beschriebenen Dreiecke scheiden einander im Fermatschen Punkt.
- Benachbarte Verbindungslinien des Fermatschen Punktes schließen mit den Eckpunkten des Dreiecks einen Winkel von 120° ein (folgt aus dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel).



5) Überprüfung im DGS, ob die weiterführenden Überlegungen auch zutreffen:

- Wir bilden die Streckensymmetralen der über den Dreiecksseiten aufgestellten gleichseitigen Dreiecke.
- Der Schnitt zweier Streckensymmetralen ergibt den Umkreismittelpunkt.
- Wir zeichnen die Umkreise und schneiden sie.
- Wir betrachten die Winkel AFB (F … Fermatscher Punkt), BFC, AFC – abmessen

Zusammenfassung: durch den Zugmodus im DGS können die aufgestellten Hypothesen erhärtet werden!

Betrachtungen mit Hilfe der analytischen Geometrie

(unter Zuhilfenahme eines CAS)

Wir legen das Problem „günstig" in ein Koordinatensystem.

$A = (0|0) \quad B = (bx|0) \quad C = (cx|cy)$

Zu Beginn erzeugen wir, um die Rechnung einfacher zu machen für die Koordinaten *bx*, *cx* und *cy* Zufallszahlen. Wir wählen *bx*, *by* und *cy* jeweils als beliebige reelle Zahlen aus verünftigen Intervallen – wir sehen schon aus der Konstruktion, dass ein zu stumpfer Winkel (>120°) zu „ungünstigen" Bedingungen führt, daher:

$$bx \;\ldots\; [5,10] \in \mathbb{R}$$
$$cx \;\ldots\; [0,6] \in \mathbb{R}$$
$$cy \;\ldots\; [3,8] \in \mathbb{R}$$

Wir berechnen in *DERIVE*:

- Festlegen der Parameter – *DERIVE*-Befehle:

dummy = RANDOM(0)	initialisiert die Zufallszahlen
RANDOM(1)	erzeugt eine reelle Zufallszahl zwischen 0 und 1
[x , y]	beschreibt einen zweidimensionalen Vektor
:=	Zuordnung
↓ (oder SUB)	Zugriff auf einzelne Koordinaten des Vektors
ABS	Absolutbetrag
. (*normaler Punkt*)	Skalares Produkt
SOLUTIONS	lösen einer Gleichung / eines Gleichungssystems – Rückgabe des Ergebnisses als Vektor
SUBST	Ersetzen einer Variable durch Zahl oder Term
DIF	Differenzieren

- Zurechlegen geeigneter Funktionen für die wichtigsten Schritte – erleichtert nachher die Schreibarbeit

h_pkt(p1, p2)	Halbierungspunkt einer Strecke zwischen *p*1 und *p*2
n_v(v)	Normalvektors auf *v*
e_v(v)	Einheitsvektors von *v*

Allgemeine Geradengleichung $a*x + b*y = c$ aus

gerpv(p,v)	a) Punkt + Richtungsvektor
ger2p(p1,p2)	b) 2 Punkten

Vorgangsweise

- Initialisierung – eventuell vorhandene Variablenwerte mit `bx:=, cx:=, cy:=` , … entfernen.
- Aufstellen geeigneter Hilfsfunktionen
- …
- Berechnung der Spitzen der gleichseitigen Dreiecke AC'B, AB'C, BA'C
- Aufstellen der Verbindungsgeraden zwischen den Spitzen der aufgesetzten Dreiecke und den Eckpunkten des ursprünglichen Dreiecks
- Schnitt von zwei Verbindungsgeraden
- Überprüfung, ob der berechnete Punkt auch auf der dritten Geraden liegt
- Erzeugen einer Abstandsformel
- Berechnen der partiellen Ableitungen für *x* und *y* für den Fermatschen Punkt
- Berechnen des Innenwinkels (120° sollen herauskommen)

Falls die Ableitungen jeweils 0 ergeben, handelt es sich tatsächlich um ein Minimum!

Sehr anschaulich ist auch die Möglichkeit, das entstehende Dreieck und die aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke in *DERIVE* anzeigen zu lassen! (Grafik 2D – Streckenzüge zeichnen).

Vertiefung mit Hilfe der analytischen Geometrie

Die Punkte werden nicht mehr mit Zahlen „gefüttert“, sondern bleiben (im Rahmen unserer ursprünglichen Festlegung) variabel. Es gilt also immer noch:

$A = (0|0) \quad B = (bx|0) \quad C = (cx|cy)$ *bx*, *cx*, *cy* sind aber nicht belegt!

Wieder

- Initialisierung – eventuell vorhandene Variablenwerte mit `bx:=, cx:=, cy:=` , … entfernen.
- Aufstellen geeigneter Hilfsfunktionen
- …
- Überlegungen zum Winkel!

Elementargeometrische Überlegungen

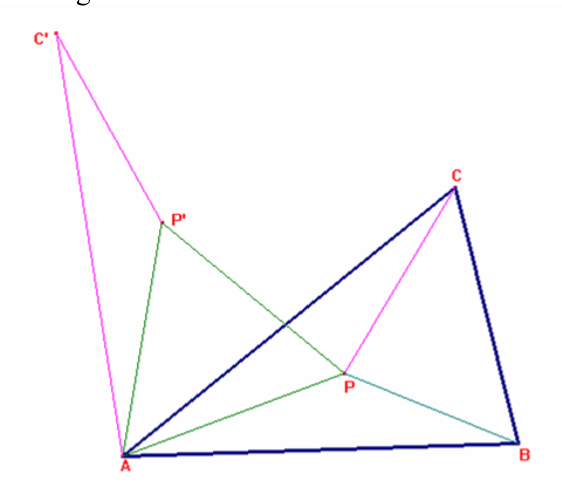
Eine der einfachsten und elegantesten Lösungen hat der Joseph E. Hofmann 1929 veröffentlicht. Die Grundidee der Beweisführung ist:

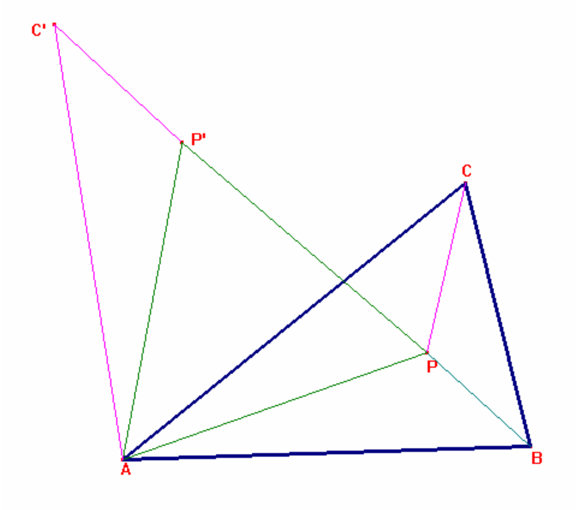
Die kürzeste Möglichkeit, drei Punkte zu verbinden, ist eine Gerade!

- **Problem** beim Fermatschen Punkt: Hier handelt es sich zuerst nicht um einen Streckenzug, sondern die Strecken gehen von einem gemeinsamen festen Punkt aus (Streckendreibein!).
- **Lösung**: Überführung des Streckendreibeins in einen Streckenzug!

1) Wir drehen P um 60° weiter – es entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit **|PP‘| = |PA|**
2) Wir drehen auch C um 60°. Durch |AP‘|=|AP| und |AC‘|=|AC| folgt: **|P‘C‘| = |PC|**

Sobald der Punkt P so zu liegen kommt, dass **BPP’C’** auf einer Geraden liegen, haben wir den optimalen Punkt gefunden.





Folgen für die Innenwinkel und eine mögliche Konstruktion:

Innenwinkel:

$\angle$PP‘A = 60° → $\angle$AP‘C‘ = 120°

$\angle$APC = 120°

$\angle$P‘PA = 60° → $\angle$BPA = 120° → $\angle$BPC = 120°

Von P aus werden drei Seiten des Dreiecks jeweils unter 120° gesehen!

Konstruktion:

Aus dem Hofmannschen Beweis ergibt sich sofort die **Konstruktionsvorschrift**

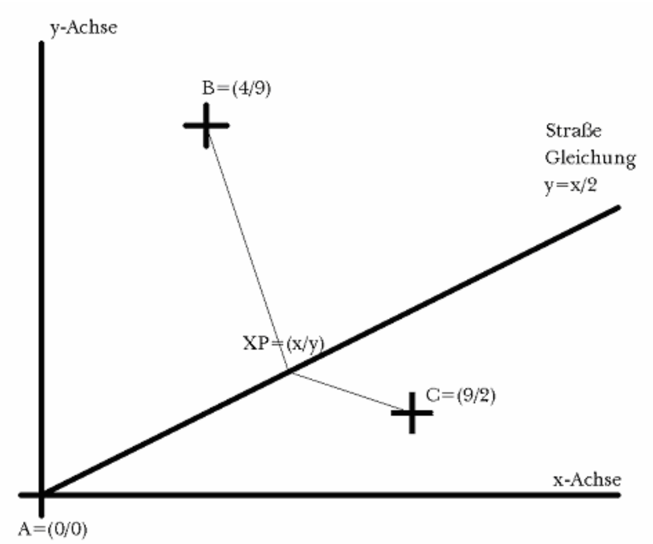
- Wie wurde C‘ konstruiert? – gleichseitiges Dreieck über der Seite b
- Verbindung mit dem Eckpunkt B – der Fermatsche Punkt liegt auf der Verbindung!
- Analog kann man auch von einer der anderen beiden Seiten ausgehen.

Der Schnittpunkte der drei Verbindungen ergibt den Fermatschen Punkt.

Anwendungsbeispiel:

Angabe
An der Straße, die von der Stadt $A = (0 \mid 0)$ etwa nach Nordosten verläuft, soll ein kalorisches Kraftwerk zur Stromerzeugung errichtet werden. Die Lage der Straße ist durch die Geradengleichung $y = 1/2 \cdot x$ bestimmt. Weiters liegen die Städte $B = (4 \mid 9)$ und $C = (9 \mid 2)$ nördlich und südlich dieser Straße.
(Die Größe der Zeicheneinheit beträgt 10 km).

Frage:
An welcher Stelle $XP = (x \mid y)$ der Straße ist das Kraftwerk zu bauen, damit die Summe der Längen der elektrischen Hochspannungsleitungen nach den drei Städten möglichst gering wird.



Möglichkeit ohne Differentialrechnung – **TRACE-Modus** im Graphen der Funktion!! (ergibt ca. 5.52)

Vorgangsweise (mit Differentialrechnung – bringt sie hier wirklich Vorteile??):
- Definition der Punkte a, b, c, p (ev. Einschränkung des Definitionsbereiches für p_x .. > 0)
- Aufstellen einer Distanzformel = Hauptbedingung
- Nebenbedingung (y = x/2) verwenden, um Hauptbedingung zu vereinfachen
- Definition der ersten Ableitung
- Versuch einer Lösung (1. Ableitung = 0), exakt nicht möglich, daher mit NSOLVE (numerisch)
- y-Koordinate für gefundenes Extremum berechnen – Antwort (5.52.. | 2.76..)

Weiterführende Beispiele

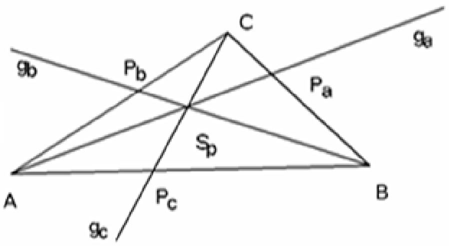
A) Miquel's Theorem

Nimmt man auf jeder Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punkt beliebig an und zeichnet durch jede Ecke und die beiden Punkte, die auf den der Ecke benachbarten Seiten liegen, Kreise, so gehen die drei Kreise durch einen Punkt, der Miquelscher Punkt genannt wird.

B) Der Lehrsatz von Ceva

Die drei Geraden g_a, g_b und g_c, welche durch die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks verlaufen und die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten P_a, P_b und P_c schneiden, besitzen genau dann einen gemeinsamen Schnittpunkt S_P, wenn gilt:

$$\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} \cdot \frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} \cdot \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = 1$$



C) Der Feuerbach'sche Kreis (Neunpunktekreis)

Der Halbierungspunkt der Strecke zwischen Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt ist der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises. Der Kreis verläuft durch die drei Seitenmitten, durch die drei Höhenfußpunkte und halbiert jeweils die Strecke zwischen Höhenschnittpunkt und Eckpunkt.

D) Die Simsonsche Gerade

Fällt man von einem beliebigen Punkt P des Umkreises eines Dreiecks die Normalen n_{AB} n_{AC} und n_{BC} auf die Trägergeraden der Dreiecksseiten, so liegen die Schnittpunkte P_{AB}, P_{AC} und P_{BC} dieser Normalen mit den Trägergeraden auf einer Geraden, der Simsonschen Geraden. Diese Gerade wurde vom engl. Mathematiker Robert Simson (1687 – 1768) entdeckt.

E) Der Gergonne Punkt

Dieser merkwürdige Punkt des Dreiecks wurde vom französischen Mathematiker Joseph-Diez Gergonne (1771 – 1859) entdeckt.
Die drei Geraden g_a, g_b und g_c, die die Eckpunkte eines Dreiecks mit jenen Punkten B_{BC}, B_{AC}, und B_{BC} auf den gegenüberliegenden Seiten verbinden, in denen der Inkreis die Seiten berührt, schneiden einander in einem Punkt, dem Gergonne Punkt.

Versuchen Sie, die Grundprinzipien

- Überprüfen der Hypothese mit Hilfe eines DGS
- Weitere Verdichtung über Analytische Geometrie – Einsetzen von Zufallszahlen
- Beweisführung über Analytische Geometrie (nicht immer trivial möglich!!)
- Formale Beweisführung

anhand dieser Beispiele (alle bezogen auf das Dreieck!) umzusetzen.

Links:

- http://www.acdca.ac.at/material/allgem/lehrs_geometrie1.htm
  Lehrsätze der ebenen Geometrie mit *DERIVE* und *CABRI*, Walter Wegscheider, ACDCA
- http://www.acdca.ac.at/material/allgem/lehrs_geometrie2.htm
  Lehrsätze der ebenen Geometrie mit *Voyage200*, Thomas Himmelbauer, ACDCA
- http://www.acdca.ac.at/material/allgem/deshpande.htm
  Überraschende Ergebnisse - Begründen, Beweisen mit verschiedenen Zugängen, Walter Wegscheider Hrsg., ACDCA
- http://www.acdca.ac.at/material/bsp/index.htm
  Beispielsammlung, Walter Wegscheider Hrsg., ACDCA
- http://did.mat.uni-bayreuth.de/~matthias/geometrieids/minimum/index2.html
  Über ein Extremwertproblem aus der Dreiecksgeometrie - historische und schulgeometrische Betrachtungen, Matthias Ehmann, Univ. Bayreuth

CABRI – Skriptum:

- http://www.pa.asn-sbg.ac.at/pasbg2/mathematik/cabrihelp/Index.htm
  ONLINE-Skript zu Cabri II für Windows, Friedrich Erlmoser, PÄDAK Salzburg

DERIVE – Skriptum:

- http://www.austromath.at/daten/derive/
  DERIVE 6, Online-Workshop, Walter Wegscheider, ACDCA