5. Veränderung in der Unterrichtskonzeption

Wenn man sich für ein computerunterstütztes Unterrichtskonzept entscheidet, muß man sich darüber im klaren sein, daß diese neue Lernumgebung die gesamte Unterrichtsorganisation, das Rollenbild von Lehrern und Schülern, beginnend von der Vorbereitungsarbeit des Lehrers bis hin zur Prüfungssituation verändert. Es ist daher nicht nur notwendig, wie in den vorangehenden Kapiteln beschrieben, die Lernformen und die didaktisch-strategische Planung neu zu überdenken, es müssen auch notwendige Veränderungen von den Unterrichtsmethoden, über Arbeitsunterlagen bis hin zu den Prüfungsinhalten und -formen mit berücksichtigt werden.

5.1. Veränderungen im Methodeneinsatz

Wir beziehen uns in diesem Kapitel auf eine Untersuchung, die Robert Nocker im Rahmen des österreichischen Computeralgebraprojekts durchgeführt hat. Eine genauere Beschreibung dieses Projekts folgt im Kapitel 6. In dieser Studie werden die Ergebnisse einer Unterrichtsbeobachtung in 20 Unterrichtsstunden mit Einsatz von Computeralgebra und 37 Stunden ohne Computereinsatz verglichen. Die Beobachtung erfolgte in gymnasialen Klassen der 9. bis 11. Schulstufe. Genauere Informationen über das Beobachungsinstrument, die Stichprobe und ausführlichere Interpretationen können Interssierte aus den Berichten über das Projekt entnehmen [Nocker, 1994].

Wir wollen hier nur jene Bereiche beschreiben, wo signifikante Unterschiede zwischen dem traditionellen und dem computerunterstützten Unterricht zu beobachten waren.

5.1.1. Methodische Grundformen

In diesem Bereich geht es vor allem um den Grad der Lehrer- und Schülerzentriertheit im Unterricht. Tendenziell erkennt man in Stunden mit Computereinsatz einen geringeren Anteil an Lehreraktivität, die Differenz ist aber nicht signifikant. Hochsignifikant sind der Rückgang des Vorrechnens durch Schüler und vor allem der Anstieg der selbständigen Schülertätigkeit (siehe Abb. 5.1).

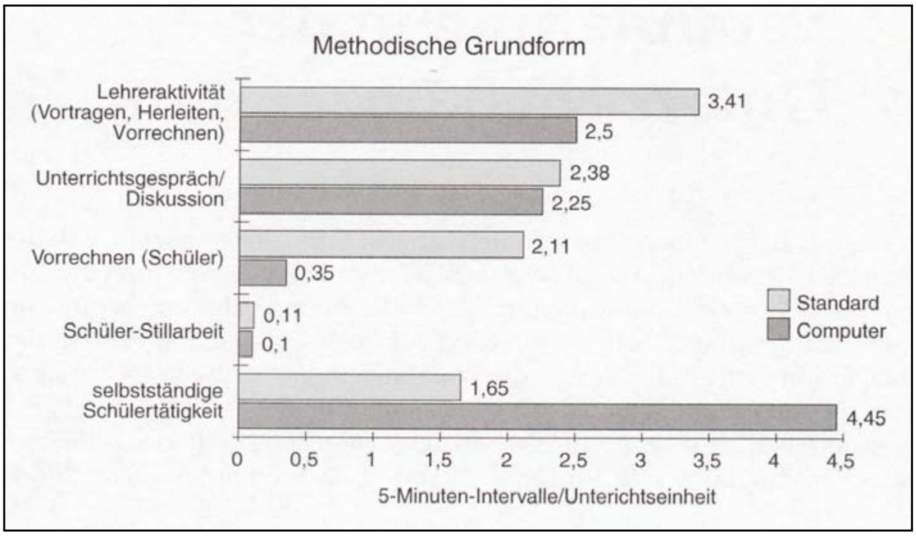


Abb. 5.1: Methodische Grundformen

5.1.2. Sozialformen

Noch deutlicher als bei den methodischen Grundformen ist hier der Wechsel zu individualisierten Unterrichtsformen erkennbar. Während in traditionellen Unterichtsstunden die Arbeit im Klassenverband klar dominiert, beobachtet man im computerunterstützten Unterricht eine gleichmäßige Aufteilung auf Unterricht im Klassenverband und Einzel- bzw. Partnerarbeit (siehe Abb. 5.2)

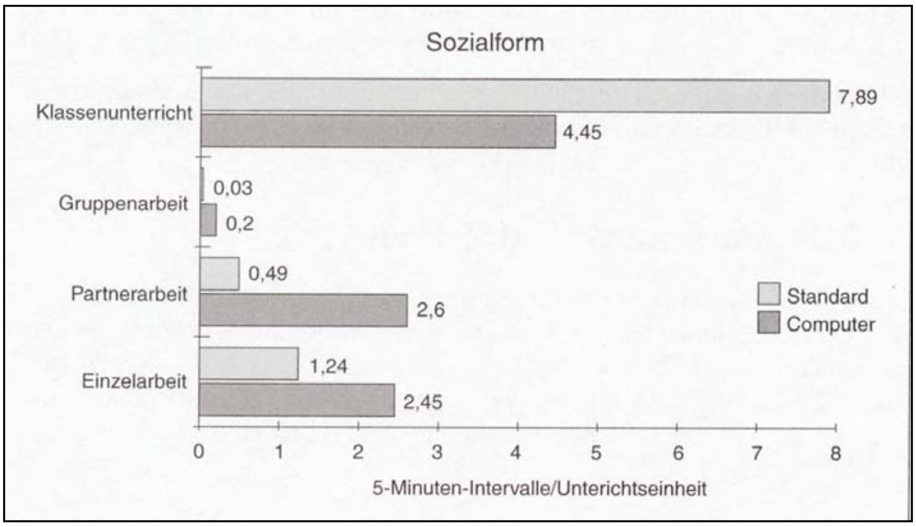


Abb. 5.2: Sozialformen

Daß die Partnerarbeit relativ häufig vorkommt, hängt auch mit der Hardwareausstattung zusammen. In den EDV-Räumen gibt es 14 bis 15 PCs, so daß die Partnerarbeit eine Notwendigkeit ist. Aus dieser Not wird aber insofern eine Tugend, insofern dieses Arbeiten zu zweit meist zu einer intensiven Diskussion über mathematische Probleme führt. Selten habe ich Mathematikstunden erlebt, in denen so viel über Mathematik diskutiert wurde wie bei solchen Stunden im EDV-Raum. Ein weiterer Vorteil besteht in der Möglichkeit der gegenseitigen Kontrolle bei der Eingabe von Daten in den Computer, was vor allem bei Schülern mit wenig Computererfahrung wichtig ist.

Gruppenarbeit spielte praktisch keine Rolle. Ich sehe das auch in Zusammenhang mit dem Untersuchungsergebnis, daß sich die Inhalte und Fragestellungen noch nicht sehr verändert haben, was aber im ersten Jahr des Projekts nicht zu erwarten war. Die beteiligten Lehrer waren vorerst auf traditionelle Inhalte angewiesen, da neue Unterrichtsmaterialien erst im Laufe der Projekarbeit entwickelt wurden. Wenn es in der Zukunft gelingt, den Schülern offenere Aufgaben zu stellen, den gesamten Problemlöseprozeß zum Gegenstand des Lernens zu machen, wird diese Sozialform an Bedeutung gewinnen.

Schülertätigkeit

Wie aus der Abb. 5.3 zu erkennen ist, dominiert in den traditionellen Stunden das reproduktive Lernen - hier als 'Aufnehmen' bezeichnet. In Stunden mit Computereinsatz überwiegt dagegen signifikant das 'Produzieren', also die selbständige produktive Schülertätigkeit.

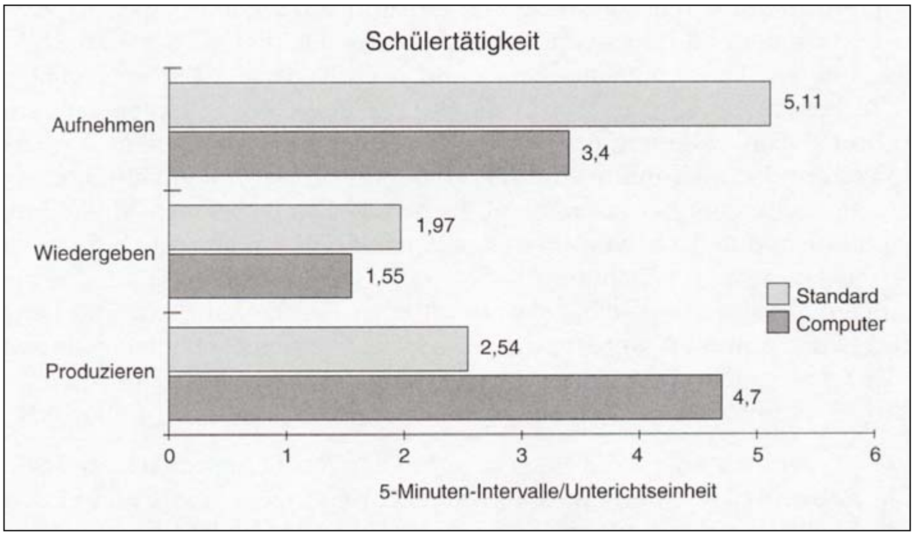


Abb. 5.3: Schüleraktivitäten

Wir halten es für eines der wichtigsten Ergebnisse, daß die Schüler durch das neue Lernmedium Computer zu mehr Selbsttätigkeit geführt werden. Beachten sollte man allerdings auch, daß bei solchen schülerzentrierten Computerstunden die individuelle Belastung der Schüler steigt. Aber auch für den Lehrer, der dabei mehr die Aufgabe des Initiators und Betreuers hat und weniger die zentrale Rolle des Wissensvermittlers, sind computerunterstützte Stunden wesentlich anstrengender. Man könnte seine Rolle mit der eines Schachspielers vergleichen, der gegen mehrere Gegner eine Simultanpartie spielt. Durch die individuellen Aktivitäten der einzelnen Schüler ist der Lehrer oft an jedem Arbeitsplatz mit neuen Problemen konfrontiert. Der positive Ertrag rechtfertigt aber die Mühe.

5.2. Zur Rolle des Lehrers

Die Veränderungen im Gefolge des Auftauchens von Taschenrechnern im Mathematikunterricht erscheinen geradezu harmlos im Vergleich zu CAS. Fast unbemerkt gestattete der Taschenrechner eine größere numerische Flexibilität, erlaubte mit realistischerem Zahlenmaterial ('krummen Zahlen') zu arbeiten und brachte die verschiedenen Tafelwerke zum Verschwinden. Begleitend wurden Überlegungen angestellt, wie denn einer durch den Taschenrechner drohenden Kopfrechenschwäche zu begegnen sei, und wie man Schüler am besten mit dem Handling vertraut machen kann.

Man braucht wohl kein großer Prophet zu sein, um zu sehen, daß CAS viel breitere Veränderungen mit sich bringen wird. Im Zusammenhang mit CAS stellt sich auch die Frage nach dem Bildungswert bisheriger Lernziele (vgl. Kap. 5.4), nach Veränderungen in den Unterrichtsmethoden und nach Kompetenzen im Umgang mit neuen Technologien. Und mitten in diesen Veränderungen werden Lehrerinnen und Lehrer stehen. "Als nächstes müssen Lehrerinnen und Lehrer ins Blickfeld geraten. Diese müssen ihren Unterricht ja mit den neuen Werkzeugen konzipieren und durchführen, sind hierzu aber weder von den Fähigkeiten noch von den Einstellungen her ausgebildet. Es bedarf also wirksamer Maßnahmen in der Lehrerausbildung und vor allem der Fortbildung. „Wirksam“ bezieht sich in diesem Zusammenhang auch auf die Form und „Philosophie“ von Lehrerfortbildung. Eigenständiges und selbstverantwortliches Lernen kann nur von Lehrerinnen und Lehrern initiiert werden, die solches selbst erfahren haben. Insbesondere bzgl. der weniger lehrerzentrierten Interaktions- und offenen Lernformen besteht im Mathematikunterricht ein großer Erfahrungsbedarf.“ [Schmidt, 1995, S.17]

Wir wollen hier aber zuerst auf Fragen, mit denen der Lehrer gleich zu Beginn eines CA-unterstützten Unterrichtes konfrontiert ist, eingehen: Wie kann man CAS möglichst selbstverständlich und konstruktiv in den Mathematikunterricht integrieren und auf die bei der Einführung solcher Systeme auftauchenden Probleme reagieren? Soll der Lehrer den Funktionsumfang - je nach mathematischem Wissensstand der Schüler - steuern? Hilft er seinen Schülern damit oder bevormundet er nur? Wie wirkt sich ein derartiger Unterricht auf die Vorbereitungsarbeit des Lehrers aus? Ist CAS ein Partner, der die Unterrichtsarbeit unterstützt oder sehen die Schüler darin eine zweite Autorität, an der die Kompetenz des Lehrers gemessen wird?

5.2.1. Einführung in das CAS

Im Rahmen des in Österreich durchgeführten CAS-Projekts gab es ursprünglich verschiedene Denkvarianten, wie die Einführungsphase verlaufen könnte, wie die Schüler am besten mit den Möglichkeiten und der Handhabung des Systems vertraut gemacht werden könnten. Auf Grund früherer Erfahrungen mit einem Unterrichtsversuch H.Heugls [Heugl, 1989] mit dem TI-48 tauchte etwa die Idee auf, sich mit der Handhabung in einem 'verbindlichen' Freifach parallel zum Mathematikunterricht zu beschäftigen. Eine andere Möglichkeit wäre, die Einführung im Rahmen des laut österreichischen AHS-Lehrplan in der 9.Schulstufe vorgesehenen Faches Informatik durchzuführen. Durchgesetzt hat sich eindeutig die im Mathematikunterricht integrierte Einführung von DERIVE, die sich mit ansteigender Komplexität an den jeweiligen mathematischen Inhalten des Unterrichts orientiert. Die erste Variante verpflichtet alle Schüler zu einem zusätzlichen Unterricht, und dieser Idealismus kann nicht immer eingefordert werden. Eine auf die neunte Schulstufe beschränkte Einführung hat den Nachteil, daß sie sich auf die mathematischen Inhalte dieser Schulstufe reduzieren muß und dieses hier praktizierte Lernen auf Vorrat nicht unbedingt motivationsfördernd ist. Der Hauptvorteil der integrierten Einführung und Verwendung des CAS liegt in der natürlichen und genetischen Entwicklung des im Zusammenhang damit notwendigen Wissens.

So steht die Einführung nicht isoliert und kann bei geeignetem Aufbau einen wertvollen Beitrag für den Mathematikunterricht selbst darstellen. Die Problematik der Verwendung eines CAS entschärft sich zunehmend, da immer mehr Schüler bereits Vorerfahrungen im Umgang mit dem Computer aufweisen. Ziel dieser Einführung wird es daher vor allem sein, die Schüler mit

- Fertigkeiten im Werkzeuggebrauch,
- Übersetzungtechniken
- heuristische Techniken im Zusammenhang mit CA auszustatten und
- zu einer kritischen Betrachtung der CA-Ergebnisse

zu erziehen.

Fertigkeiten im Werkzeuggebrauch

(1) Editieren, Modifizieren, Strukturieren und Kommentieren eines CAS-Arbeitsblatts

Beim Arbeiten auf Papier ist der „Blick aufs Ganze“ eine Selbstverständlichkeit, so selbstverständlich, daß uns dies erst dann erst bewußt wird, wenn er plötzlich nicht mehr vorhanden ist, z.B. wenn ein Schüler an der Tafel arbeitet und es nicht gewohnt ist, plötzlich nur mehr einen kleinen Ausschnitt aus seinen Berechnungen wahrnehmen zu können. Genauso ist es natürlich kein Zufall, daß viele Fehler bei schriftlichen Arbeiten gerade dann passieren, wenn umgeblättert wird. Entsprechende Probleme haben auch oft Anfänger im Umgang mit einem CAS. Teile der Berechnung wandern durch Scrollen aus dem Blickfeld, Fehlversuche und Nebenrechnungen unterbrechen den Aufgabenzusammenhang, der Überblick droht auf diese Weise verlorenzugehen.

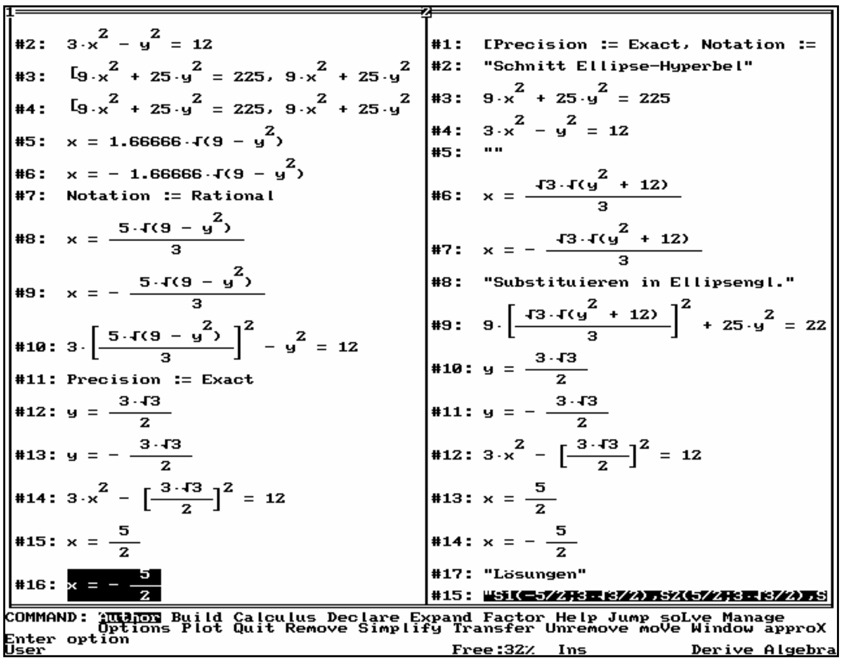


Abb. 5.4: Chaos und Ordnung

Es ist daher wichtig für eine effiziente Arbeit mit dem CAS, die Schüler dahingehend zu trainieren, ihre Lösungsansätze besser zu strukturieren, (Bildschirm-)platzsparend zu arbeiten und das Kommentieren nicht zu vernachlässigen.

Wie stark dieses strukturierte Vorgehen sein soll, hängt natürlich auch davon ab, ob das CAS in Form eines Taschenrechners eingesetzt wird und die Dokumentation einer Bearbeitung per Hand im Heft erfolgt oder ob das ausgedruckte CA-File zur Dokumentation eingesetzt wird.

(2) Aufbau von Kompetenzen bei der grafischen Darstellung von mathematischen Objekten

Speziell in der 2D-Grafik sollten die grundlegenden Befehle geübt werden und für flexibles Bearbeiten der Grafik als Rüstzeug zur Verfügung stehen. Nicht jede Datenmenge, jeder Graph einer Funktion liefert nach **Plot Plot** sofort im Grafikfenster eine geeignete Darstellung, häufig geschieht scheinbar nichts. Überlegungen zu einer geeigneten Skalierung sind Voraussetzung für spätere Interpretationen am Graphen (**Scale**). Das CAS bietet die didaktisch sehr gut einsetzbare Möglichkeit, auf den Funktionsgraphen zu springen (mit **F3**) und darauf herumzuwandern. Des weiteren kann ein gewünschtes Fenster mittels **Range** justiert werden. Als Beispiel soll die Darstellung der rationalen Funktion f in Abb.5.5 dienen.

$$\#1: \quad F(x) := \frac{x^2 - 3\cdot x + 2}{x^2 + x - 6} \qquad\qquad \text{User}$$

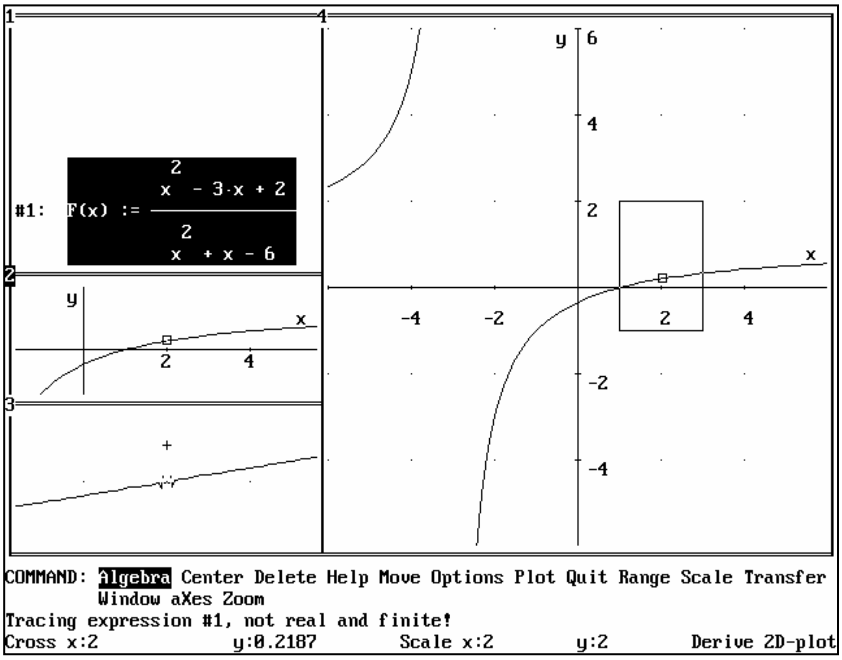


Abb. 5.5: Berarbeitung von Graphen

In den geöffneten Fenstern (**Window Split**) kann die Art des Fensters festgelegt werden (**Designate**). Neben den Koordinaten des Cursors (+) am linken unteren Rand des Bildschirmes erhält man im *Trace*-Mode (**Option State** ***Trace***) auch weitere Rückmeldungen. Im Fenster 2 wird die Tatsache, daß an der Stelle 2 dieser Funktion eine hebbare Lücke aufscheint, durch die Rückmeldung 'not real and finit' beschrieben. Die Tasten **F9** und **F10** bieten die Möglichkeit des Vergrößerns und Verkleinerns (siehe Fenster 3). Bei diesem Beispiel sieht man, daß diese hebbare Lücke beim Zeichnen des Graphen größere Probleme auslöst, die auftretenden Zacken sollen nur andeuten, daß an dieser Stelle etwas Besonderes vorzufinden ist. Diese Darstellung soll einige Hinweise geben, welche Qualifikationen im Umgang mit der Grafik in der Einführung gelernt werden sollen, und umfaßt natürlich keineswegs die gesamte Palette an Grafikmöglichkeiten in DERIVE.

(3) Fähigkeiten im Vergleichen und Umformen mathematischer Ausdrücke

Auf eine Diskussion dieser Fähigkeiten soll hier verzichtet werden, da darauf in Kap. 3.5 (Schnittstelle Operieren-Interpretieren) bereits eingegangen wurde.

(4) Bearbeiten und Analysieren von Strukturen, Zugriff auf Teilstrukturen und deren Substitution

Kompetenz im Umgang mit einem CAS heißt auch, auf die dargestellten mathematischen Gegenstände zugreifen zu können, Teilstrukturen herauszugreifen, aus vorhandenen neue komplexere Strukturen aufzubauen. Eine besondere 'Spezialität' von DERIVE in diesem Zusammenhang ist etwa die Möglichkeit, Teilterme unterlegen zu können und nur gezielt auf diese eine mathematische Operation anzuwenden (vgl. Kap.4.1). Gerade solche Möglichkeiten erlauben einen sehr flexiblen und 'mathematiknahen' Umgang mit dem System. (Leider wurde diese Termmarkierung nicht in die TI-92-Version von DERIVE übernommen.)

(5) Voreinstellungen von Rechenoptionen und Statusvariablen

In diesem Buch gibt es eine Fülle von Beispielen, die aufzeigen, daß die festgelegte Voreinstellung für die gewählte Vorgangsweise, den Lösungsansatz und die Ausgabe von Werten von Bedeutung ist. Alle Einstellungen zusammen schaffen einen gewünschten Bearbeitungshintergrund. In DERIVE sind zu unterscheiden:

Einstellungen, die am Arbeitsblatt aufscheinen

Seit der Version 3.0 können bei einer Reihe von Optionen Veränderungen direkt im Arbeitsblatt vorgenommen und mit diesem abgespeichert werden, was zu einer größeren Transparenz beim Arbeiten mit dem CAS führt. Es ist zu beachten, daß im Gegensatz dazu die Grundeinstellungen (die in der Initialisierungsdatei DERIVE.INI zusammengefaßt sind) nicht angezeigt werden.

Einige wenige Beispiele, die im Unterricht von Bedeutung sind:

- Option Input :

Das Arbeiten mit Wortvariablen wird durch das Umstellen von *Character* auf *Word* ermöglicht, wird eine Differenzierung von Groß- und Kleinbuchstaben gewünscht, wird von *Insensitive* auf *Sensitive* umgestellt.

-Option Precision / Notation :

Jene Statusvariable, die die Rechengenauigkeit kontrolliert, wird mit *Exact* und *Approximate* festgelegt, die Ausgabe am Bildschirm - *Notation* - wird automatisch mitgeschalten. Sollte eine selbstgewählte Bildschirmausgabe erfolgen, kann zwischen *Decimal*, *Rational*, *Mixed* und *Scientific* gewählt werden. Darüber hinaus kann die Anzahl der Stellen (nicht der Dezimalstellen) bei *Digits* eingestellt werden.

- Option Output:

Mit dieser Option kann der Multiplikationspunkt ein- und ausgestellt werden.

- Manage Trigonometrie:

Bei manchen Bearbeitungen ist es sinnvoll, das Gradmaß zu wählen, andere Angaben und Beispiele erfordern das Bogenmaß.

Beispiel 5.1: Wertetabelle 1

Erzeuge eine Wertetabelle für besondere Winkel im Gradmaß und deren Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte.

```
#1:  Angle := Degree                                  User
#2:  VECTOR([x, SIN(x), COS(x), TAN(x)], x,0,360,45)  User
```

$$\#3: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 45 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 90 & 1 & 0 & \pm\infty \\ 135 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 180 & 0 & -1 & 0 \\ 225 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 270 & -1 & 0 & \pm\infty \\ 315 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 360 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Simp(\#2)}$$

Beispiel 5.2: Wertetabelle 2

Erzeuge eine Wertetabelle für besondere Winkel im Bogenmaß und deren Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte.

#4: Angle := Radian User

#5: $\text{VECTOR}\left[[x,\ \text{SIN}(x),\ \text{COS}(x),\ \text{TAN}(x)],\ x,\ 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{4}\right]$ User

#6: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\pi}{2} & 1 & 0 & \pm\infty \\ \frac{3\cdot\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \pi & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ Simp(#5)

Einstellungen, die nicht im Arbeitsblatt aufscheinen

Problematischer in der Unterrichtsarbeit sind Voreinstellungen, die zwar gesetzt aber in keiner Übersicht angezeigt werden. Oft wird man erst durch ein unerwartetes Verhalten des CAS auf sie aufmerksam.

Zwei Beispiele: Der Schüler möchte ein Trapez durch Angabe der entsprechenden Koordinaten zeichnen lassen, enttäuscht stellt er fest, daß nur Punkte zu sehen sind. **Option State** *Connected* ist nicht gesetzt. Beim Ausdruck des Funktionsgraphen kommt nur ein halber leerer Rahmen. **Transfer Print Options Printer** muß auf den Typ des Druckers umgestellt werden. Bei Verwendung von Farbdruckern ist darüber hinaus auf die Einstellung einer geeigneten Hintergrundfarbe zu achten!

b) Übersetzungstechniken

(1) Der mathematische Formalismus und die Syntax des Computeralgebra-Systems

Bei der Verwendung eines CAS ist es erforderlich, daß die mathematische Sprache in die Syntax des CAS übersetzt werden kann. Wenn auch die Erwartungen in die Richtung gehen, daß „die Kommunikation mit dem Rechner in einer Sprache erfolgen wird, die sich an der symbolischen und fachwissenschaftlichen Darstellung mathematischer Begriffe und Ausdrücke, am mathematischen Sprachparadigma" orientiert [Weigand, 1993/2, S.332-343], so muß hier doch darauf hingewiesen werden, daß alle zur Zeit verfügbaren CAS jeweils individuelle "Softwareparadigmen" repräsentieren. Der Benutzer muß sich daher für einen effektiven Umgang mit diesen Systemen mit den Grundideen, die von den Entwicklern in die Systeme integriert wurden, vertraut machen. Auf eine Reihe von Inkompatibilitäten zwischen mathematischer Notation und mathematischer Standardsoftware und auf die damit im Unterricht verbundenen Probleme hat R.Köhler [MNU, 1995, S.195-198] hingewiesen, indem er sich mit der Rolle des Zuweisungsoperators und des Gleichheitszeichens in DERIVE beschäftigte.

Beispiel 5.3: Ohne exakte Syntaxkenntnis keine Lösung in Sicht

Um etwa nur ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist es erforderlich, die entsprechende Syntax zu kennen und exakt einzuhalten. Nur wenn der Schüler in der **Author**-Zeile

```
[x-2y=-30, 3x -y=40]
```

eingibt und **soLve** drückt bzw. wenn er

```
solve([x-2y=-30, 3x -y=40],[x,y])
```

eingibt, wird er zur Lösung [22,26] gelangen. Eine runde Klammer an der falschen Stelle und der Erfolg bleibt aus. Andererseits lassen sich die handschriftlichen Umformungsschritte mit DERIVE nachvollziehen, dies wird aber ein Schüler meist nur dann versuchen, wenn er es einmal (beim Lehrer und seinen Mitschülern) gesehen hat. Und auch hier ist ein gewisses Mindestmaß an 'technischem' Wissen notwendig.

Natürlich ist dieses Beispiel trivial. Andererseits muß Lehrer und Schülern aber klar sein, daß die Einhaltung der Syntax Voraussetzung ist für den nutzbringenden Einsatz des Systems. Im Unterricht hat es sich z.B. bewährt, Randbemerkungen und Beispiele zur Syntax des Systems im Schulübungsheft in einer anderen Farbe notieren, um die Syntax sozusagen parallel mit den Inhalten mitzulernen und ihre dienende Rolle erkennbar zu machen.

Beispiel 5.4: Verschiedene Übersetzungsmöglichkeiten für einen mathematischen Gegenstand

Sehr oft stehen alternative Syntaxformen zur Verfügung. Dabei ist es je nach Aufgabenstellung manchmal völlig unerheblich, welche Variante der Schüler wählt, bei geänderter Zielrichtung aber entscheidend. Ein konkretes Beispiel: Die Quadratfunktion läßt sich in DERIVE u.a. in folgenden Formen darstellen:

```
#1:  a x²
#2:  f:=a x²
#3:  F(x):=a x²
#4:  [x,a x²]
#5:  f=a x²
#6:  y=a x²
#7:  QUADRATFUNKTION_1(x):=a x²
#8:  QUADRATFUNKTION_2(a,x):=a x²
```

Will der Schüler einen Funktionsgraph erzeugen, so sind alle dargestellten Varianten im wesentlichen gleichwertig. Will er aber den Funktionswert an der Stelle 1.37 berechnen, so wird ihn nur Variante #3 oder #7 rasch zum Ziel bringen. "Übersetzen ins CAS" heißt also, sich nicht irgendeiner möglichen Syntax zu bedienen, sondern die für den Aufgabenzusammenhang geeignete herauszugreifen. Dazu muß der Schüler natürlich einen entsprechenden Überblick haben.

Der Lehrer kann ihm dabei helfen. Dadurch z.B., daß er diese Palette an Übersetzungsmöglichkeiten zum Anlaß nimmt, auf die verschiedenen möglichen Schreibweisen von Funktionen und die damit verbundenen Aspekte von Funktionen einzugehen.

`#1: a x²`

Der Term wird als Funktion interpretiert.

`#2: f:=a x²`

Der Term bekommt einen Namen.

`#3: F(x):=a x²`

Eine Funktion wird definiert und *x* wird zur freien, *a* zur Formvariablen.

`#4: [x,a x²]`

Der Zuordnungsaspekt $x \to a\, x^2$ wird ins CAS übertragen (Grafik schaltet auf Parameterdarstellung um, was eigentlich der mathematischen Schreibweise $\vec{X}(x) = \begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix}$ 27entspricht.)

`#5: f=a x²`

Eine unglückliche (?) Darstellung der Funktionsgleichung.

`#6: y=a x²`

Funktionsgleichung.

`#7: QUADRATFUNKTION_1(x):=a x²`

Die Funktion bekommt einen Namen.

`#8: QUADRATFUNKTION_2(a,x):=a x²`

Funktion in 2 Variablen, die Formvariable hat sich endlich emanzipiert.

Generell ist diese Vielfalt an Übersetzungsmöglichkeiten sicher positiv zu sehen, gestattet sie doch, den Reichtum an Aspekten eines mathematischen Begriffs besser abzubilden. Allerdings muß darauf geachtet werden, daß sich der Unterricht nicht durch die syntaktischen Möglichkeiten und Begrenzungen einengen läßt. Konkret etwa: Welche Aspekte bietet der Funktionsbegriff, die vom System nicht erfaßt werden?

(2) Schrittweises Umformen mit dem Computeralgebra-System

Natürlich muß es erklärtes Ziel und Forderung der Didaktik der Mathematik an die Systementwickler sein, die Unterschiede zwischen der mathematischen Syntax und der Syntax des CAS immer geringer und bedeutungsloser werden zu lassen, dies auch durch das Implementieren möglichst toleranter Parser (jener Teil im Programm, der die Benutzereingaben analysiert).

Neben der Formulierung mathematischer Zusammenhänge in der CA-Umgebung, wie sie in (1) behandelt wurde, ist es auch notwendig, daß der Schüler befähigt wird, Umformungen mit dem System durchführen zu können. Von den Entwicklern der CAS wurden dazu verschiedenste Ansätze vorgestellt: Von syntaxorientierten Transformationen wie bei MATHEMATICA oder MAPLE - die eine entsprechende Kenntnis dieser Syntax beim Benutzer voraussetzen - über menüorientierte Systeme bis hin zur intensiven Nutzung von grafischen Oberflächen wie etwa bei MATHEPLUS, wo Variablen mit der Maus aufgegriffen und "auf die andere Seite" gezogen werden.

DERIVE ermöglicht sowohl eine menü- als auch eine syntaxorientiere Arbeitsweise. Dies ist vielleicht nicht immer die bequemste Variante, erfordert aber - was didaktisch positiv zu bewerten ist - ein bewußtes Anwenden der entsprechenden Umformungsschritte.

Beispiel 5.5: Lösen einer einfachen Differentialgleichung

Will man die folgende Differentialgleichung des beschränkten Wachstums nicht automatisiert (z.B. mit DSOLVE1) lösen lassen, so kann dies auch Schritt für Schritt durchgeführt werden.

```
#1:   Y(t) :=                                              User

      d
#3:   ── Y(t) = k·(g - Y(t))                               User
      dt

       d
       ── Y(t) = k·(g - Y(t))
#5:    dt                                                  User
      ────────────────────────
              g - Y(t)
        d
        ── Y(t)
#6:     dt                                             Simp(#5)
      ──────────── = k
       g - Y(t)

      ⌠ ┌   d          ┐
      ⌡ │   ── Y(t)    │
#7:     │   dt         │                                   User
        │──────────── = k│ dt
        └ g - Y(t)     ┘

#8:   - LN(Y(t) - g) = k·t                             Simp(#7)

#9:   LN(Y(t) - g) = - k·t + c                             User

       LN(Y(t) - g) = - k·t + c
#10:  ê                                                    User
                    c - k·t
#11:  Y(t) - g = ê                                    Simp(#10)
                    c - k·0
#12:  Y(0) - g = ê                                     Sub(#11)
                    c
#13:  Y(0) - g = ê                                    Simp(#12)
                                 - k·t
#14:  Y(t) = g + (Y(0) - g)·ê                              User
```

(3) Variablenordnung

Bei der Übersetzung in eine implizite Darstellung von Funktionen und Relationen und darauffolgender grafischer Darstellung muß die Variablenordnung beachtet werden.

Beispiel 5.6: Funktion und Umkehrfunktion (?)

Die voreingestellte Variablenordnung beginnt mit den Variablen *x, y,* und *z*, danach geht es weiter mit *a, b, c* ...

```
                2
#1:   y - x  = 0                                        User
#2:   s - 5·t = 2                                       User
```

Wird etwa mit der Standardeinstellung die Gleichung in #1 gezeichnet, erhalten wir die Darstellung einer Parabel in zweiter Hauptlage, also jene Parabel, die durch die explizite Gleichung $y = x^2$ festgelegt ist. Ändern wir jedoch mit **Manage Ordering** die Ordnung der Variablen, indem *x* und *y* in der Rangordnung vertauscht werden, wird die Parabel in erster Hauptlage gezeichnet (Abb. 5.6).

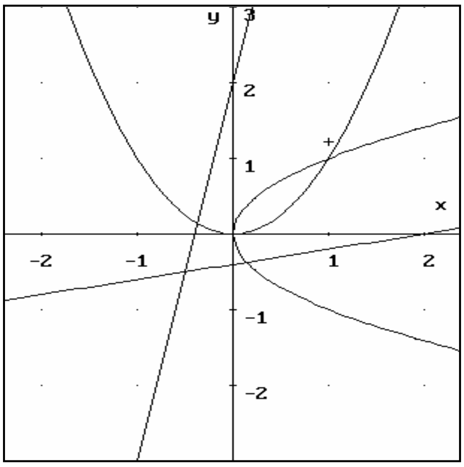


Abb. 5.6: Umkehrrelationen und -funktionen

Wird die lineare Gleichung in #2 mit der Grundeinstellung gezeichnet, erscheint der Graph der inhomogenen linearen Funktion mit der Steigung 5. Nach Änderung der Ordnung der Variablen, also *t* vor *s*, wird dieselbe Gleichung als Unkehrfunktion mit der Steigung 0.2 gezeichnet (Abb. 5.6). Die eindeutige Beschriftung der Achsen bereitet hier natürlich Probleme.

(4) Plausibilitätsabfragen

Werden etwa bei der Definition von Funktionen Zahlenbereichstests oder Tests für gewünschte Eingaben durchgeführt, können diese mit eingebauten Abfragen bewerkstelligt werden. Der Benutzer kann dadurch auch Rückmeldungen über seine Eingabe erhalten, die zur Interpretation der Auswertung dienen. Als Beispiel wird die Entwicklung einer Funktion für das Generieren einer Datenmatrix betrachtet. Zu beachten ist, daß die Verbindung von Punkten die Einstellung **Option State** *Connected* erfordert.

Als nicht geeignete Eingaben für die Auswertung werden Variablen und Polstellen von Funktionen angenommen. Zuerst wird die kleine Funktion VT_ für den 'Variablentest' definiert, wobei positive Zahlen zu 2, nicht positive zu 1 und Fehleingaben zu 0 ausgewertet werden.

```
#1:   VT_(ausdruck) := IF(ausdruck > 0, 2, 1, 0)       User
```

Danach wird eine Funktion ORDNER definiert, die bei Auswertung von nichtreellen Zahlen (das Produkt der 'Variablentests' ist 0) eine Fehlermeldung ausgibt, sonst wird die Datenmatrix für das Zeichnen der Zuordnungslinien erzeugt.

```
User
#2: ORDNER(x,fx) := IF⎡VT_(x)·VT_(fx)=0, "Fehler: Variable(n)
                   ⎣
                                     ┌ x    0 ┐┐
  eingegeben oder kein Funktionswert vorhanden" , │ x   fx ││
                                                  └ 0   fx ┘┘
```

Am Beispiel der Funktion H(x) können nun verschiedene Fälle getestet und bei geeigneter Ausgabe gezeichnet werden (Abb. 5.7).

```
                  2
#3:   H(x)  := ───────                              User
                x - 1
                          ┌ -1   0 ┐
#4:   ORDNER(-1, H(-1)) = │ -1  -1 │          User=Simp(User)
                          └  0  -1 ┘
#5:   ORDNER(1.5, H(1.5))                           User

      ┌ 1.5  0 ┐
#6:   │ 1.5  4 │                              Approx(#5)
      └  0   4 ┘
```

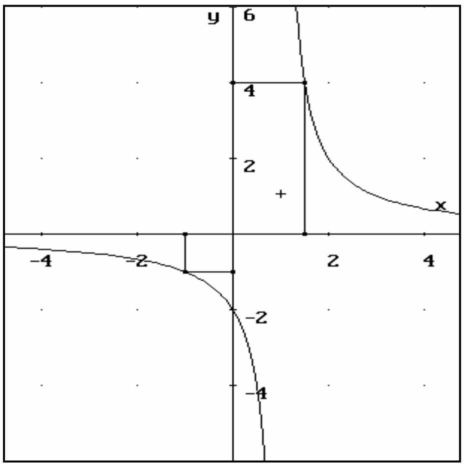


Abb. 5.7: Eingezeichnete Zurodnungslinien

Nun zwei Beispiele mit verbalen Rückmeldungen:

```
User=Simp(User)
#7:  ORDNER(1, H(1)) = "Fehler: Variable(n) eingegeben oder
  kein Funktionswert vorhanden"

User=Simp(User)
#9:  ORDNER(a, H(1)) = "Fehler: Variable(n) eingegeben oder
  kein Funktionswert vorhanden"
```

Offen bleibt die Frage, ob es sinnvoll ist, sehr viele Plausibilitätsabfragen zu tätigen, oder ob der Benützer für die Verwendung von Funktionen und die Interpretation der Ergebnisse selbst verantwortlich ist.

c) Heuristische Techniken

Verschiedene heuristische Techniken wurden bereits ausfürhlich in Kapitel 3 betrachtet. Es ist auch eine wichtige Aufgabe des Lehrers, den Lernenden mit solchen Techniken vertraut zu machen.

(1) Parametervariation

Bereits in Kapitel 2 wurde am Beispiel des freien und begrenzten Wachstums aufgezeigt, daß man im Unterricht sehr schnell, speziell im Zusammenhang mit der Grafik, Auswirkungen von Parametern untersuchen und geeignete Vermutungen aufstellen kann.

Nun soll die Auswirkung eines Parameters auf die Anzahl von Extremstellen bei einer Funktion dritten Grads analysiert werden.

Beispiel 5.7: Kurvenscharen

Zeige, daß die Funktion f: $x \to x^3 + b\,x^2 + 3\,x + 5$ für $b^2 > 9$ genau zwei lokale Extremstellen, für $b^2 < 9$ keine lokale Extremstelle hat! Wie viele lokale Extine lokale Extremstelle hat! Wieviele lokale Extremstellen gibt es für $b^2 = 9$?

[Bürger/Fischer, 1991, Beispiel 2.117]

Wir definieren die Funktion allgemein:

```
              3       2
#1:  F(x) := x  + b·x  + 3·x + 5                         User
```

Mit einem VECTOR-Befehl generieren wir neun Funktionen, indem wir *b* von -4 bis 4 mit Schrittweite 1 variieren.

```
#2:  VECTOR(F(x), b, -4, 4)                              User
```

Wir erhalten eine Schar von Polynomfunktionen dritten Grads:

```
Approx(User)
      ┌3     2           3     2           3     2
#3:   └x -4·x +3·x+5,x -3·x +3·x+5,x -2·x +3·x+ 5,
  3  2        3          3  2        3     2         3     2
x -x +3.x+5,x +3.x+5, x +x +3·x+5,x +2·x +3·x+5,x +3·x +3·x+5,
                                                     3     2
                                                    x +4·x +3·x+5┘
```

Wir bilden die erste Ableitung für alle Funktionen aus #3:

$$\#4:\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^1 \text{VECTOR(F(x), b, -4, 4)} \qquad \text{User}$$

```
Approx(#4)
        2           2           2           2           2
#5: └3·x -8·x+3,3·x -6·x+3,3·x -4·x+3,3·x -2·x+3,3·x +3,
              2           2           2           2
           3·x +2·x+3,3·x +4·x+3,3·x +6·x+3,3·x +8·x+3┘
```

Wenden wir den Differentialoperator für die Berechnung der zweiten Ableitungen auf die Schar von Funktionen an:

$$\#6:\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^2 \text{VECTOR(F(x), b, -4, 4)} \qquad \text{User}$$

```
Approx(#6)
   #7: [6·x-8,6·x-6,6·x-4,6·x-2,6·x,6·x+2,6·x+4,6·x+6,6·x+8]
```

Beim Zeichnen der Kurvenschar kann beobachtet werden, daß für *b* = -4 zwei Extremstellen, für alle weiteren *b* keine Extremstelle auftritt (Abb. 5.8). Die ersten Ableitungsfunktionen bestätigen diesen Sachverhalt, für *b* = 3 und *b* = -3 gibt es noch jeweils eine Nullstelle, jedoch ändert sich das Monotonieverhalten dieser beiden Funktionen nicht (Abb. 5.9). Alle Funktionen haben eine Wendestelle, für *b* = 3 und *b* = -3 existiert also nur eine Wendestelle (vgl. Abb. 5.10).

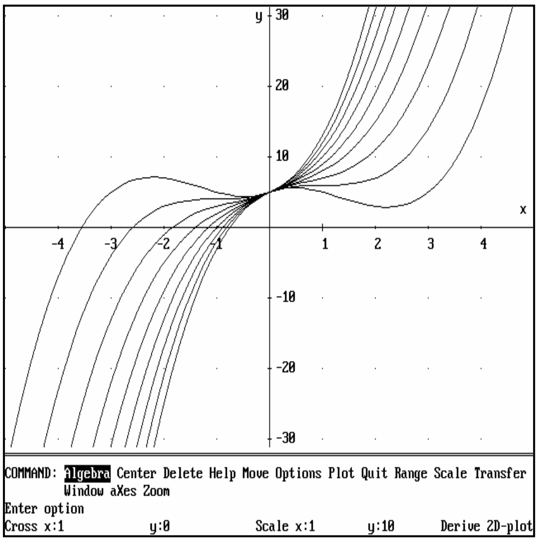


Abb. 5.8: Die Funktionen mit variiertem b

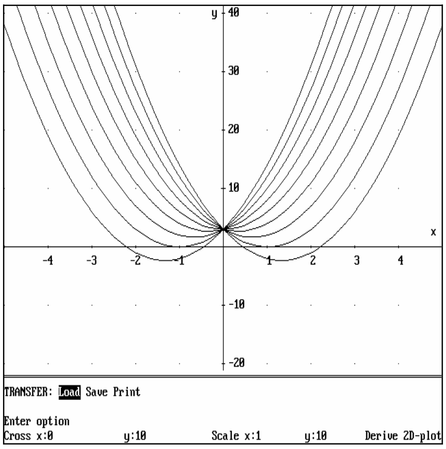


Abb. 5.9: Die ersten Ableitungen der Funktionen

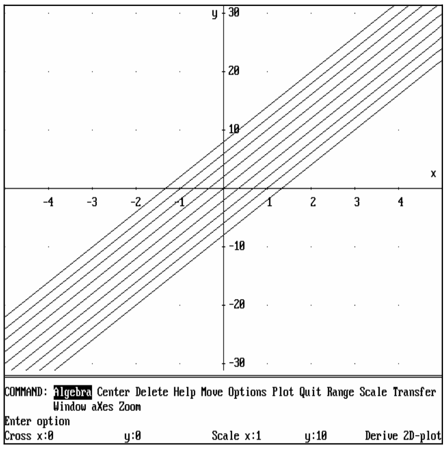


Abb. 5.10:Die zweiten Ableitungen

Die Auswirkung des Parameters *b* läßt sich auch algebraisch untersuchen. Wir bestimmen die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion *f* und erhalten 2 Lösungen in #9 und #10. Für unsere Aufgabenstellung ist nur der Ausdruck unter der Wurzel von Bedeutung, also existeren zwei Lösungen - zwei lokale Extremstellen - wenn $b^2 > 9$ ist. Setzen wir diese Lösungen in die zweite Ableitung ein, können wir gleich die Art der Extremstelle - lokale Maximumstelle oder Minimumstelle - nachweisen. Der Wert in #14 ist immer negativ und der Wert in #16 immer positiv.

#8: $\left[\frac{d}{dx}\right]^1 F(x) = 0$ User

$$\#9:\quad x = -\frac{\sqrt{(b^2 - 9)} + b}{3} \qquad \text{Solve(\#8)}$$

$$\#10:\quad x = \frac{\sqrt{(b^2 - 9)} - b}{3} \qquad \text{Solve(\#8)}$$

$$\#11:\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^2 F(x) \qquad \text{User}$$

$$\#12:\quad 6\cdot x + 2\cdot b \qquad \text{Approx(\#11)}$$

$$\#13:\quad 6\cdot\left[-\frac{\sqrt{(b^2 - 9)} + b}{3}\right] + 2\cdot b \qquad \text{Sub(\#12)}$$

$$\#14:\quad -2\cdot\sqrt{(b^2 - 9)} \qquad \text{Simp(\#13)}$$

$$\#15:\quad 6\cdot\frac{\sqrt{(b^2 - 9)} - b}{3} + 2\cdot b \qquad \text{Sub(\#12)}$$

$$\#16:\quad 2\cdot\sqrt{(b^2 - 9)} \qquad \text{Simp(\#15)}$$

Für $b^2 < 9$ (in unserem Beispiel b = -2,-1,0,1,2) existiert keine Nullstelle der ersten Ableitung und damit auch keine mögliche lokale Extremstelle.

Ohne Betrachtung der dritten Ableitung wird das Argument der Wendestelle für jede einzelne Funktion in #18 bestimmt.

$$\#17:\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^2 F(x) = 0 \qquad \text{User}$$

$$\#18:\quad x = -\frac{b}{3} \qquad \text{Solve(\#17)}$$

(2) Lokale, globale und 'familiäre' Betrachtungen von Termen und Funktionen

Zu den „neuen“ heuristischen Techniken, die durch CAS besonders unterstützt werden, gehört sicher die bewußte Betrachtung eines mathematischen Begriffs vom lokalen, globalen und vom 'familiären' Standpunkt aus. Was die Funktionenlupe für die grafische Ebene, ist der pointierte Standpunktwechsel für die symbolische Ebene.

Beispiel 5.8: Ableitung von Potenzfunktionen

Der lokale Aspekt

Wir bilden den Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 28an der Stelle $x = 1$. Es bereitet keine große Mühe sich mit dem Differenzenquotienten der betrachteten Stelle $x = 1$ zu nähern. Wesentlich dabei ist, daß sich der Schüler auf die Art der Näherung konzentrieren kann und sich nicht durch die dazu erforderlichen Rechnungen davon abhalten läßt. Im folgenden einige Anregungen.

Ein erster Versuch: Annäherung entlang der Folge <1/10^*n*>

$$\#1:\quad F(x) := \frac{1}{x^2} \qquad \text{Simp(User')}$$

$$\#2:\quad \text{VECTOR}\left[\frac{F\left[1+\dfrac{1}{10^{n}}\right]-F(1)}{\dfrac{1}{10^{n}}},\ n,\ 1,\ 10\right]\qquad \text{User}$$

Simplify liefert zehn Brüche, die eine interessante Gesetzmäßigkeit aufweisen.

Wir können dieses Annähern exakt oder nur numerisch betrachten. Wir können uns dieses Annähern auch grafisch darstellen lassen, wir können sie mit beliebigen anderen Folgen betrachen, die gegen 1 streben. Wie muß eine Folge gebaut sein, damit sie gegen 1 strebt? Wir können uns von links, von rechts oder alternierend annähern. Wir können uns aber auch gleich unbegrenzt annähern und das mit beliebigen Formalismen bewerkstelligen (Leider steht in DERIVE das Symbol Δ nicht zur Verfügung, daher wird im folgenden der entsprechende Kleinbuchstabe δ verwendet.):

$$\#3:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{F(1+\delta x)-F(1)}{\delta x}=-2\qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#4:\quad \lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=-2\qquad \text{User=Simp(User)}$$

Der globale Aspekt

Nun soll der Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotionen global betrachtet werden. Nicht mehr eine konkrete Stelle ist interessant, sondern jede beliebige, für die die Funktion definiert ist. Auch hier steht uns wieder die ganze Pallette an Möglichkeiten zur Verfügung. Betrachten wir die unbegrenzte Näherung zuerst in Zeitlupe und dann im Zeitraffer.

$$\#5:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{F(x+\delta x)-F(x)}{\delta x}\qquad \text{User}$$

$$\#6:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+\delta x)^{2}}-\dfrac{1}{x^{2}}}{\delta x}\qquad \text{Simp(\#7')}$$

Wir können Schritt für Schritt betrachten und kommen schließlich zu:

$$\#11:\quad \lim_{\delta x\to 0}-\frac{2\cdot x+\delta x}{x^{4}+2\cdot x^{3}\cdot\delta x+x^{2}\cdot\delta x^{2}}=-\frac{2}{x^{3}}\qquad \text{User=Simp(User)}$$

Eine direkte Anwendung von **Simplify** hat hier die Wirkung eines Zeitraffers:

$$\#12:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{F(x+\delta x)-F(x)}{\delta x}=-\frac{2}{x^{3}}\qquad \text{User=Simp(User)}$$

Der 'familiäre' Aspekt

Nun soll auch die 'Verwandtschaft' betrachtet werden. Wir versuchen durch die Differentiation einer Schar von Funktionen auf ein allgemeines Gesetz zu kommen.

#13: $F(x) := x^n$ User

#14: VECTOR(F(x), n, -3, 3) User

#15: $\left[\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, x^3\right]$ Simp(#14)

#16: $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, x^3\right]$ User

#17: $\left[-\frac{3}{x^4}, -\frac{2}{x^3}, -\frac{1}{x^2}, 0, 1, 2\cdot x, 3\cdot x^2\right]$ Simp(#16)

Zuletzt wieder im Zeitraffer:

#18: $\lim_{\delta x \to 0} \frac{F(x + \delta x) - F(x)}{\delta x} = n\cdot x^{n-1}$ User=Simp(User)

(3) Erstellen von Indikatormodulen

Auch die Erstellung von Indikatormodulen kann zu den heuristischen Techniken gerechnet werden. Wir verstehen darunter CA-Funktionen, die eine bestimmte mathematische Eigenschaft (Lage, Krümmung etc.) überprüfen. Bei vielen Gelegenheiten im Unterricht erweist sich die Erstellung einfacher Indikatormodule als hilfreich und nützlich. Zudem wird der Schüler dazu geführt, Fallunterscheidungen zu treffen und dadurch eine Situation umfassender zu analysieren. Dazu zwei einfache Beispiele:

Beispiel 5.9: Ein Lagetest

Die Lage eines Punkts bezüglich eines Kreises soll durch das Modul LAGE(x,y) bestimmt werden. Solche Lagetestmodule sind bei vielen Gelegenheiten denkbar, etwa: Lage eines Punkts zu einer Geraden, zu einer Ebene, zu einer geschlossenen Kurve, zu einer geschlossenen Fläche im Raum, Lage zwischen zwei Geraden, zwei Ebenen etc. Um solch ein Modul zu erstellen, ist es notwendig, mit den mathematischen Begriffen operational umzugehen und - wie bereits erwähnt - die Module anschließend entsprechenden Tests zu unterwerfen.

#1: $KREIS(x, y) := x^2 + y^2 = 4$ User

```
#2:  LAGE(x, y) :=                                          User

        IF(KREIS(x, y), "Auf Kreis!",
          IF(LHS(KREIS(x,y)) < RHS(KREIS(x, y)),

          "Innerhalb des Kreises!", "Außerhalb des Kreises"))

#3:  LAGE(2, 0)                                             User
#4:  "Auf Kreis!"                                       Simp(#3)

#5:  LAGE(0, 0)                                             User
#6:  "Innerhalb des Kreises!"                           Simp(#5)
```

```
#7:  LAGE(3, 0)                                                User
#8:  "Außerhalb des Kreises"                                Simp(#7)
```

Beispiel 5.10: Krümmungstest

Das folgende Testmodul wurde von einem Schüler erstellt und stellt eine Frage an eine vorgegebene Funktion:

```
                3
#9:  F(x) := x  - 2·x + 1                                      User
             ┌d ┐2
#10: F2(x) := │──│  F(x)                                       User
             └dx┘
#11: F2(x) := 6·x                                         Simp(#10')

#12: KRUEMMUNG(stelle) :=                                      User
     IF(F2(stelle) < 0, "Ich bin hier rechtsgekrümmt",
            IF(F2(stelle) > 0,
                            "Ich bin hier linksgekrümmt!",
                  "Ich bin hier nicht gekrümmt!"))

#13: KRUEMMUNG(-1)                                             User
#14: "Ich bin hier rechtsgekrümmt!"                       Simp(#13)

#15: KRUEMMUNG(0)                                              User
#16: "Ich bin hier nicht gekrümmt!"                       Simp(#15)

#17: KRUEMMUNG(1)                                              User
#18: "Ich bin hier linksgekrümmt!"                        Simp(#17)
```

Zwei weitere heuristische Techniken, auf die in diesem Buch bereits eingegangen wurde, sind:

(4) Window-Shuttle-Technik

Die im Zusammenhang mit den didaktischen Prinzipien vorgestellte Window-Shuttle-Technik (vgl. Kap. 4.4) stellt sicher eine wesentliche, neue heuristische Technik im CAS-unterstützten Unterricht dar.

(5) Projektionstechnik

Eng verwandt mit der Window-Shuttle-Technik ist die in Kap. 2.5 betrachtete Möglichkeit, ein Objekt in verschiedene Darstellungsebenen zu projizieren, etwa in die symbolische, numerische, grafische oder logische Ebene.

d) Ergebniskritik

So problematisch die strikte Ausklammerung von CAS im Unterricht unseres Erachtens ist, da man den Schülern damit viele Möglichkeiten vorenthält, genauso problematisch ist die blinde und unreflektierte Übernahme von CA-Ergebnissen. Hier ist besonders der Lehrer aufgerufen, die Schüler zu einer kritischen Haltung hinzuführen. „Natürlich sind zahlreiche aktuelle oder potenielle Probleme beim Computereinsatz zu beachten; das wird leider oft nicht genügend betont. So haben Rechner prinzipielle *Grenzen,* z.B. bei der Auswahl und Beurteilung von Modellen für Realsituationen. Weiter gibt es vielerlei neue *Gefahren*, z.B. eine unkritische Computergläubigkeit.“ [Blum, 1995, S.13]. Vielleicht sollte im Zusammenhang mit CAS das Motto vernünfigerweise etwa lauten: „Trau' nie einem Ergebnis, das du im Prinzip nicht nachvollziehen kannst!“ Dazu wieder einige Punkte bzw. Beispiele:

(1) Vorsicht - bestimmtes Integral!

DERIVE bestimmt die Integrale in der Art, wie wir dies auch handschriftlich machen. Zuerst werden die Stammfunktionen der Integranden ermittelt und dann die Grenzwerte der Stammfunktionen, wenn sich die Integrationsvariable von oben der unteren bzw. von unten der oberen Grenze nähert. Schließlich wird vom Grenzwert der oberen Integrationsgrenze jener von der unteren subtrahiert. Die *Verantwortung* für die Korrektheit des Ergebnisses bleibt also dem *Benutzer* überlassen. (Und dies gilt natürlich nicht nur im betrachteten Einzelfall!) Blindes Vertrauen ins System kann zu herben Enttäuschungen führen, wie folgendes Beispiel zeigen soll:

Beispiel 5.11: Ein bestimmtes Integral

#1: $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$$ User=Simp(User)

Im Gegensatz zu #1 gibt es verständlicherweise bei uneigentlichen Integralen keine Probleme:

#2: $$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \infty$$ User=Simp(User)

#3: $$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\infty$$ User=Simp(User)

Ein weiteres Beispiel zum Stichwort 'Verantwortung' des Benutzers:

(2) Vorsicht - Rundungskatastrophe

Beispiel 5.12: Die Exhaustion des Kreises

Die Kreiszahl π soll durch Ein- und Umschreiben von regelmäßigen n-Ecken angenähert werden.

Bekanntlich besteht die *Exhaustionsmethode* des Archimedes darin, den Kreisumfang mittels ein- und umschriebener regelmäßiger n-Ecke iterativ zu approximieren, wobei der Iterationsschritt in der Eckenverdoppelung besteht. Nutzt man dabei die Proportionalität von Umfang des *n*-Ecks und Kreisdurchmessers aus, so kann man sich auf die Betrachtung des Einheitskreises beschränken.

Eingeschriebenes n-Eck (Abb. 5.11)

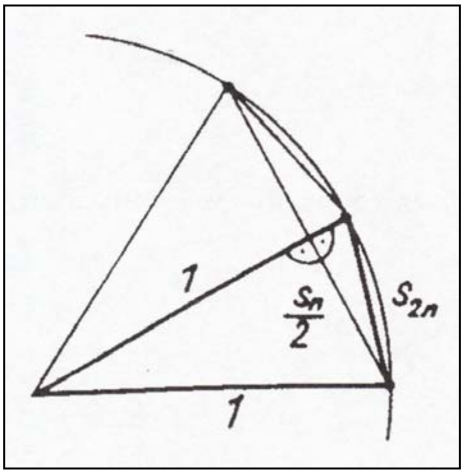


Abb. 5.11:Einschreibung eines n-Ecks

Es sei s_n die Seitenlänge und $u_n = n{\cdot}s_n$ der Umfang des eingeschriebenen *n*-Ecks. Die Näherungen für π ergeben sich dann als Verhältnis von Umfang zu Durchmesser, in unserem Fall also $\pi \approx \frac{n \cdot s_n}{2}$ [29]

Für den Zusammenhang zwischen s_{n+1} und s_n ergibt sich nun gemäß Abb. 5.11:

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}s_n)^2}\right)^2$$

```
            2     ┌ 1    ┐2     ┌         ┌     ┌ 1    ┐2┐┐2
#1:    s2n   =   │───·sn│   +  │1  -  √│1  -  │───·sn│ ││              User
                  └ 2    ┘      └         └     └ 2    ┘ ┘┘
            2                   2
#2:    s2n   = 2  -  √(4  -  sn )                                   Simp(#1')
```

s_{n+1} in Abbhängigkeit von s_n können wir damit folgendermaßen definieren:

```
                                    2
#3:    S2N(sn)  :=  √(2  -  √(4  -  sn ))
```

Eine analoge Beziehung können wir für das umschriebene *n*-Eck herleiten, so daß für die Approximation von π sich schließlich folgende Ungleichung ergibt:

$$\frac{n \cdot s_n}{2} \leq \pi \leq \frac{n \cdot t_n}{2}$$

Wir können diesen iterativen Prozeß der *Exhaustion* des Kreises durch Einsatz des **ITERATES**-Befehls von DERIVE beschleunigen

```
#15: ITERATES(S2N(sn), sn, √3, 9)                           User

                    √6       √2           √6       √2      ┐
#16:  │√3,  1,  ───── - ─────,  √│- ───── - ───── + 2│,        Simp(#15)
      └             2        2     └     2        2      ┘

                          ┌ √6       √2        ┐┐
      √│2  -  √│───── + ───── + 2││,
       └         └   2        2      ┘┘
```

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}+2}+2}+2}}$$

Wenn wir Näherungswerte ausrechnen, so beobachten wir etwas Eigenartiges - die letzte Seitenlänge (zum $3*2^9$-Eck = 1536-Eck gehörig) wird zu 0 ausgewertet.

```
#17: [1.73205, 1, 0.517638, 0.261052, 0.130806, 0.0654373,
         0.0327225, 0.0163626, 0.00818490, 0]          Approx(#16)
```

Irgendetwas stimmt hier nicht, selbst wenn wir die Genauigkeit erhöhen, tritt dieser Effekt zwar später, aber trotzdem auf! Was ist schiefgelaufen? Wenn wir den Auswertungsvorgang sozusagen in Zeitlupe betrachten, indem wir den Term 'von innen her' schrittweise mit **approX** vereinfachen, können wir von #22 zu #24 (Abb. 2.3) das beobachten, was man unter Numerikern eine Subtraktionskatastrophe nennt:

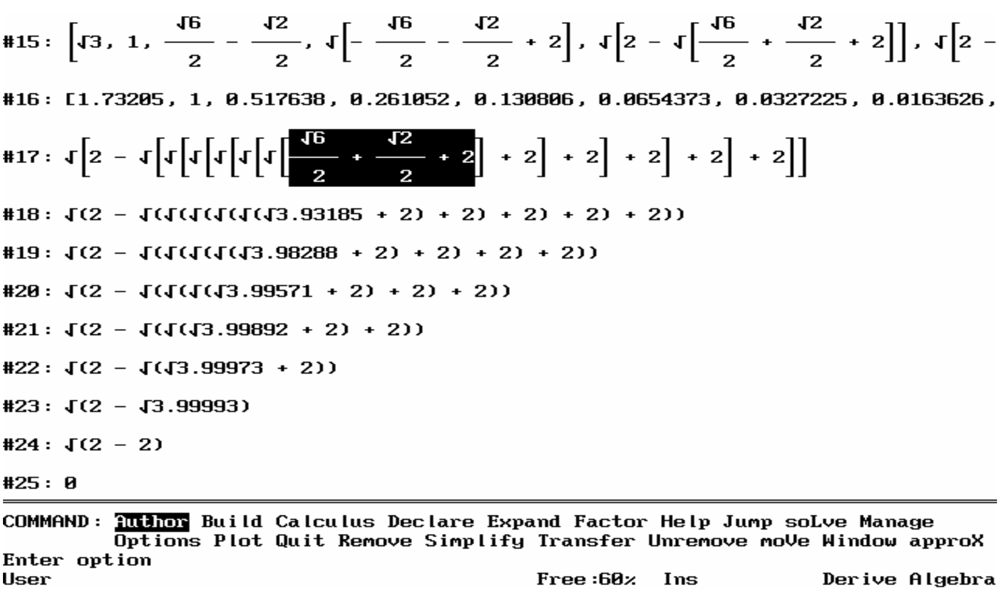


Abb. 5.12: Subtraktionskatastrophe

Die Auslöschung von in der Dezimaldarstellung sich am Anfang befindlichen Ziffern bei Differenzen annähernd gleichgroßer Werte führt zu einer explosionsartigen Vergrößerung der Auswirkung von Rundungsfehlern, so daß die Ergebnisse völlig unsinnig werden. Wie kann dieses numerische Problem behoben werden? Ganz einfach dadurch, daß wir in der Iterationsformel mit $\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}$ 30 erweitern. Die Iterationsformel wird dadurch zwar etwas komplizierter, dafür ist der Algorithmus stabiler gegenüber Rundungsfehlern, Differenzen fast gleichgroßer Werte werden auf diese Weise vermieden.

```
#26: "Der erweiterte Term verhält sich wesentlich stabiler"
                                    2                                  2
                       √((2 - √(4 - sn ))·(2 + √(4 - sn )))
#27: S2N(sn) := ───────────────────────────────────────────
                                                          2
                                 √(2 + √(4 - sn ))
```

Ein Problem, auf das in diesem Zusammenhang hingewiesen werden muß, ist die Tatsache, daß bei der Erweiterung die Iterationsformel so durchgeführt werden soll, daß im Zähler sofort das Produkt unter der Wurzel zu stehen kommt. Obwohl das System nomalerweise Terme der Gestalt $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 31 korrekt vereinfacht, ist es bei diesem konkreten Term offenbar bisher nicht dazu in der Lage.

```
                          sn
     S2N(sn) := ───────────────────
#28:                       2
               √(√(4 - sn ) + 2)

#29: ITERATES(S2N(sn), sn, √3, 9)

Approx(#39)

   #30: [1.73205, 1, 0.517638, 0.261052, 0.130806, 0.0654381,
        0.0327234, 0.0163622, 0.00818114, 0.00409057]

                                   9
     APPROX(0.00409057·3·2 )
   #31: ─────────────────────────── = 3.14155        User=Simp(User)
                   2
```

Nun haben wir unser Ziel erreicht, wir erhalten auch beim 9. Iterationsschritt einen brauchbaren Näherungswert für π.

(3) Stetige Fortsetzung - ein Seiteneffekt von **Simplify**

Wird verwenden wieder die Funktion *f*, die bereits unter "Fertigkeiten im Werkzeuggebrauch" grafisch dargestellt wurde. Wird die Funktion *f* definiert und an der Stelle 2 ausgewertet, dann erhalten wir als Rückmeldung ein '?', es existiert also kein Funktionswert an dieser Stelle.

```
                   2
                  x  - 3·x + 2
     #1:  F(x) := ─────────────                         User
                    2
                   x  + x - 6
     #2:  F(2) = ?                                 User=Simp(User)
```

Wird der Term an der Stelle *x* ausgewertet (*F*(*x*) =) oder mit **Simplify** vereinfacht, erscheint ein neuer Term und die Auswertung an der Stelle 2 liefert einen Wert.

```
                  x - 1
     #3:  F(x) = ───────                              Simp(#1')
                  x + 3

                  1
     #4:  F(2) = ───                               User=Simp(User)
                  5
```

Das CAS verändert also die auswertbaren Stellen einer Funktion oder anders gesagt, es wird eine stetige Fortsetzung der Funktion *F* durch 'Kitten' der hebbaren Lücke automatisch durchgeführt. Dies sieht man natürlich sofort durch Faktorisieren des Nenners.

```
                   (x - 1)·(x - 2)
          F(x) := ─────────────────
     #5:                2                             Fctr(#1')
                       x  + x - 6
```

$$\#6: \quad F(x) := \frac{(x - 1)\cdot(x - 2)}{(x - 2)\cdot(x + 3)} \qquad \text{Fctr(\#5')}$$

Stehen etwa Stetigkeitsuntersuchungen im Vordergrund, kann dieser Verlust von Nullstellen des Nenners von Bedeutung sein.

(4) Wurzelgleichungen - No Solutions found?

Häufig führen gerade jene Inhalte, die im konkreten numerischen Fall kaum Schwierigkeiten bereiten, im allgemeinen Fall zu Gleichungen, die nur schwer algorithmisch bewältigbar sind.

Beispiel 5.13: Eine Extremwertaufgabe

Vom Ort A soll längs der geradlinigen Straße AB ($\overline{AB}$ 32= 8 km) bis zum Punkt D und dann durch das angrenzende Gelände zu einem Kraftwerk C (CB _ AB, $\overline{CB} = 2$ km 33) unter der Erde eine Leitung verlegt werden. Die Kosten der Verlegung je Kilometer längs der Straße betragen α Schilling; im Gelände sind die Verlegungskosten je Kilometer das k-fache dieses Betrags ($k > 0$).

In welcher Entfernung von B muß der Abzweigungspunkt D der geradlinigen Abzweigung DC liegen, damit die gesamten Kosten der Verlegung möglichst gering werden? [Reichel u.a., S.142]

Die Mathematisierung dieser Aufgabe führt auf einen Wurzelausdruck:

$$\#1: \quad \text{KOSTEN}(x) := (8 - x)\cdot\alpha + \sqrt{4 + x^2}\cdot k\cdot\alpha \qquad \text{User}$$

$$\#2: \quad \frac{d}{dx}\,\text{KOSTEN}(x) = \frac{\alpha\cdot\left(k\cdot x - \sqrt{x^2 + 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 4}} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#3: \quad \frac{\alpha\cdot\left(k\cdot x - \sqrt{x^2 + 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \qquad \text{User}$$

Der Lösungsversuch von #3 nach *x* endet in der Meldung "No solutions found!". Soweit, so bitter. Nun beobachet man aber leider immer wieder, daß Schüler diese Meldung interpretieren als "Es gibt keine Lösungen". Unseres Erachtens ist es eine wesentliche Aufgabe des Lehrers, bei der Einführung eines solchen Systems deutlich auf diese Fehlinterpretationen einzugehen und klarzustellen, daß die Meldung "No solutions found" noch lange nicht heißt, daß es keine Lösungen geben kann. Hier hilft z.B. ein kleiner Schritt weiter:

$$\#4: \quad k\cdot x = \sqrt{x^2 + 4} \qquad \text{User}$$

$$\#5: \quad \left(k\cdot x = \sqrt{x^2 + 4}\right)^2 \qquad \text{User}$$

$$\#6: \quad k^2\cdot x^2 = x^2 + 4 \qquad \text{Simp(\#5)}$$

$$\#7: \quad x = \frac{2}{\sqrt{k^2 - 1}} \qquad \text{Solve(\#6)}$$

$$\#8: \quad x = -\frac{2}{\sqrt{k^2 - 1}} \qquad \text{Solve(\#6)}$$

Auf die Interpretation und Auswertung der Lösung (#7 bzw #8) soll hier nicht mehr weiter eingegangen werden.

5.2.2. Lehrerschnittstelle

Das CAS DERIVE bietet die Möglichkeit, die zugelassenen Befehle und Operationen auf die Lernentwicklung der Schüler abzustimmen. Das Hauptmenü kann eingeschränkt werden. In der White Box-Phase 'Elementare Algebra' werden die Befehle **Simplify**, **Expand**, **Factor**, **Manage Subtitute** und **approX** benötigt. Der Lehrer entscheidet, welche Einstellungen im Hauptmenü aufscheinen. Der Schüler kann dadurch nur mit diesen Einstellungen arbeiten. Die neue Menügestaltung läßt sich leicht mit einem Texteditor erstellen. Die DERIVE-Variante wird mit DERIVE.MEN abgespeichert und automatisch beim Starten von DERIVE geladen. Dabei könnten die Namen der Befehle und Optionen auch in deutsche Sprache übersetzt werden, jedoch erscheinen die englischen Bezeichnungen unproblematisch und im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts und der Vorbereitung auf das Studium wünschenwert. Es erweist sich als sinnvoll, nicht zu viele Varianten in der Schule anzubieten. Eine in der Praxis gestestete Anzahl von selbsterstellten Menüs stammt vom Gymnasium Stockerau. An dieser Schule werden vier Varianten eingesetzt. Das Menü I: *Umformen* für Bearbeitung der elementaren Algebra und Umformungen bei Gleichungen wird ohne den **soLve**-Befehl und Grafikoptionen erstellt. Die Menüführung II: *Algebra* mit Zulassung von **soLve**, das Menü III: *Grafik* arbeitet ohne die Optionen **Calculus** und Einstellungen, die erst im späteren Lernprozeß Verwendung finden. Als Menü IV wird das gesamte DERIVE Menü zur Bearbeitung angeboten.

Das Beispiel *Umformen* soll diese Möglichkeit der Erstellung von eigenen Menüs aufzeigen. Es sollen, speziell für Schüler bis zur achten Schulstufe, möglichst wenige Optionen aufscheinen:

Das eigene Menü wird erstellt, indem man die vorhandenen Haupt- und Untermenüoptionen angibt und den Namen der neuen Menüzeile anschreibt. Jede Option wird mit Hochkommas versehen und in Klammern gesetzt. Das ganze Menü wird mit einer runden Klammer begonnen und beendet.

```
(("Author" "Author")
 ("Expand" "Expand")
 ("Factor" "Factor")
 ("Manage" ("Substitute" "Manage" "Substitute")
        ("Renumber" "Manage" "Renumber" ))
 ("Options" ("Input" "Options" "Input")
          ("Output" "Options" "Output")
          ("Precision" "Options" "Precision"))
 ("Quit" "Quit")
 ("Remove" "Remove")
 ("Simplify" "Simplify")
 ("Transfer" ("Load" "Transfer" "Load")
           ("Save" "Transfer" "Save")
           ("Merge" "Transfer" "Merge")
           ("Clear" "Transfer" "Clear")
           ("Print" "Transfer" "Print")
           ("menUe"))
 ("approX" "approX"))
```

Die Option **menUe** erscheint im Untermenü von **Transfer** auf. Mit dieser Option kann man einmalig in die Gesamtversion einsteigen und eine Einstellung oder Tätigkeit ausführen, die von diesem Menü aus nicht möglich ist.

Eng verbunden mit der Frage der Einführung von CAS im Mathematikunterricht ist für den Lehrer die Bereitstellung entsprechender Unterlagen für den Unterricht. Dies ist um so wichtiger, da es zur Zeit nur wenige und meist schwer zugängliche Unterrichtsmaterialien gibt. Erste Ansätze zur Entwicklung sind aber an verschiedenen Stellen bereits zu beobachten. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sei etwa erwähnt, daß es hier in Österreich z.B. eine Gruppe von (vorwiegend) aus dem Bereich technischen Schulen kommende Lehrer um Peter Schüller gibt, die sich in der AMMU (Arbeitsgruppe moderner Mathematikunterricht) zusammengefunden haben und sich zum Ziel gesetzt haben, entsprechende Materialien zu erarbeiten. Hier sind aber natürlich auch die Materialien zu erwähnen, die von BK-Teachware in Hagenberg vertrieben werden. Eine Gruppe um G.Schmidt hat begonnen, eine Reihe von Unterrichtsmaterialien für einen Unterricht mit CA-Unterstützung, herauszugeben. Auch die Unterrichtsversuch und Materialien von R.Baumann in Celle sollen hier nicht unerwähnt bleiben. Aus unserem Projekt werden eine Reihe von Materialien als CA-Reports veröffentlich werden. Eine erste Sammlung wurde 1995 von [Aspetsberger/Fuchs/ Klinger, 1995] veröffentlicht.

5.2.3. Unterrichtsvorbereitung und Arbeitsunterlagen

Die Nutzung von CAS bietet dem Lehrer einerseits erweiterte Möglichkeiten in der Unterrichsvorbereitung, erfordert aber andererseits eine andere Unterrichtsgestaltung, die wieder entsprechende Vorbereitung bedingt. Aber auch wenn CAS nicht durchgängig im Unterricht eingesetzt werden, leisten diese Systeme unschätzbare Dienste, wenn es darum geht, Problemstellungen zu visualisieren, Übungsbeispiele und Prüfungsaufgaben rasch durchzurechnen, geänderte Aufgabenstellungen zu testen und Materialien für Interpretationen und Argumentationen im Mathematikunterricht zur Verfügung zu stellen. Im Folgenden wollen wir auf drei Punkte eingehen:

- Technische Tips
- Arbeitsblätter
- Planungen im Zusammenhang mit dem Modulprinzip

CAS sind Informatiksysteme. Für ihre Verwendung ist ein gewisses Mindestmaß an technischem Wissen notwendig. Sehr oft führt ein Mangel an solchem Hintergrundwissen zu unnötigen Frustrationen oder ungerechtfertigter Ablehnung - unserer Beobachtung nach häufiger auf Seite des Lehrers als auf der des Schülers.

a) Technische Tips

(1) Initialisierungsdatei

Wird mit dem CAS DERIVE gearbeitet, sollte man die Arbeitsumgebung für alle Schüler gleich gestalten. Die Grundeinstellungen in DERIVE sind in der Datei DERIVE.INI festgelegt. Für den Umgang mit dem Programm ist ein Wissen über die dort getroffenen Einstellungen nötig.

Es erweist sich als sinnvoll, im Computerraum der Schule wie in der Übungsphase zu Hause, daß alle Schüler dieselbe Grundeinstellung verwenden. Dazu dient eine einheitliche Gestaltung der Initialisierungsdatei. Dadurch tritt eine Reihe von Problemen, die das Arbeitsklima bei der eigenen Arbeit wie im Unterricht beeinträchtigen können, nicht auf. Als Beispiel für diese Grundeinstellung könnten folgende Werte gelten, wichtige Einstellungen sind fett gedruckt. Alle diese Einstellungen werden in der vertrauten Umgebung vorgenommen, mit **Transfer Save State** in der Datei DERIVE.INI gespeichert und können im Hilfemodus eingesehen werden:

```
Einstellungen des Algebrafensters
  Rechengenauigkeitsmodus: Exact
  Stellenzahl: 6
  Notationstyp: Rational
  Stellenzahl: 6
  Zahlenbasis für Eingabe: 10
  Zahlenbasis für Ausgabe: 10

Einstellungen des Algebrafensters für das Vereinfachen
  Wurzel: Principal
  Logarithmische Umformungen: Auto
  Exponentialumformungen: Auto
  Trigonometrische Umformungen: Auto
  Trigonometrische Potenzen: Auto
  Winkelmodus: Radian

Einstellungen des Algebrafensters für die Eingabe
  Eingabemodus: Character
  Groß/Kleinschreibung: Insensitive
  Pfeiltastenmodus: LineEdit

2D-Grafikfenster-Einstellungen
  Automatischer Maßstab: No
```

```
  Folgemodus: Yes
  Zeichengenauigkeit: 7
  Koordinatensystem: Rectangular
  Grafikpunkte: Connected
  Punktgröße: Large
  Zeilen pro Gitterpunktabstand: 4
  Spalten pro Gitterpunktabstand: 4
  Automatischer Farbwechsel: No
  Farbe für Achsen: 0
  Farbe für das Kreuz: 0

Einstellungen für 3D-Grafikfenster
  Farbe für Oberseite: 15
  Farbe für Unterseite: 7

Druckseitenlayout
  Seitenlänge: 100
  Seitenbreite: 74
  Oberer Rand: 0
  Unterer Rand: 0
  Linker Rand: 0
  Rechter Rand: 0

Druckereinstellungen
  Zeichensatz: Extended
  Druckertyp: Laserjet
  Druckerorientierung: Portrait
  Zeichengröße: Small
  Papiergröße: Standard
  Druckhintergrundsfarbe: White
```

Wenn der richtige Drucker mit **Transfer Print Options** eingestellt wurde (in diesem Beispiel ein Laserdruker), müßte diese Grundeinstellung für ein durchgängiges Arbeiten reichen. Gewünschte Veränderungen von Statusvariablen scheinen meist am Bildschirm auf, wodurch der Benützer sieht, daß er die Auswirkung dieser Einstellung berücksichtigen muß. Für fortgeschrittene Benutzer empfielt sich die Einstellung des Eingabemodus auf *Word*.

(2) Abspeichern und Drucken von Arbeitsfiles

Beim Umgang mit DERIVE gibt es mehrere Möglichkeiten, Arbeitsfiles zu speichern.

- MTH-File - **Transfer Save DERIVE**:

  Diese Files dienen zur Sicherung des aktuellen Arbeitsblatts und können später mit **Transfer Load DERIVE** wieder eingelesen werden. Sehr empfehlenswert ist in diesem Zusammenhang das Hinzuschalten der Annotations (m**it Transfer Print Expressions Options** *Annotate*), die ein Nachvollziehen durchgeführter Berechnungsschritte wesentlich erleichtern. Mit der Taste **F1** kann aus allen Dateien des Verzeichnisses und/oder der Diskette das gewünschte ausgewählt werden. Diese Dateien können auch direkt ausgedruckt werden (**Transfer Print**). Sollen die Klammern und Sonderzeichen (Integral, Summe ...) erhalten bleiben, muß *Extended* mit **Transfer Print Expressions Options** eingestellt werden.

- PRT-File - **Transfer Print Expressions File**

  Mit dieser Folge von Optionen können die DERIVE-Zeilen für das Einlesen in ein Textverarbeitungssystem vorbereitet werden. Es ist zu beachten, daß die Grundeinstellung von DERIVE auf *Extended* (**Transfer Print Expressions Options**) gestellt sein muß. Diese Option ermöglicht beim Einlesen von PRT-Files in ein Textverarbeitungsprogramm die gewünschte Darstellung von Sonderzeichen (z.B. Integral, Summe, Produkt, Klammern) und Bruchstrichen. Bei einigen Textverarbeitungsprogrammen muß auch noch eine geeignete Punktgröße für die geschlossene Darstellung eingestellt werden (in diesem Buch wurden alle DERIVE-Zeilen im Schrifttyp Courier, 9 Punkt, dargestellt.)

(3) Umgang mit Abbildungen - Graphen

In DERIVE können der ganze Bildschirm oder nur einzelne Fenster ausgedruckt und als TIF-Files gespeichert werden.

- *Ausdrucken* von Grafiken: Mit **Shift+F10** wird das ganze Fenster und mit **Shift+F9** das aktuelle Fenster ausgedruckt. Bei der Grafikmenüoption *aXes* können die Achsen geeignet beschriftet werden.
- *Abspeichern* von Grafiken: Mit der Befehlsfolge **Transfer Print Screen File** wird der ganze Bildschirm als Grafikfile abgespeichert. Der gewünschte Name der TIF-Datei und das Laufwerk und/oder das Verzeichnis können mit **Transfer Print Screen Options Name** festgelegt werden. Wird diese Einstellung nicht getroffen, erhalten die Dateien den Namen DERIVE, DERIVE1, DERIVE2 und der Benützer hat das Problem, daß er sich den Inhalt der Dateien merken muß. Das Speichern erfolgt auch mit der Tastenkombination S**trg+F10**, mit **Strg+F9** wird nur das aktuelle Fenster gespeichert.

  Die gespeicherten Dateien können anschließend mit jeder einigermaßen leistungsfähigen Textverarbeitung, bzw. Grafikprogramm geladen und nachbearbeitet werden.

Ein direkter Weg, Grafiken bzw. DERIVE-Fenster in Textverarbeitungsprogramme zu übernehmen, ist gegeben, wenn DERIVE in eine grafische Oberfläche eingebunden wird.

Unter Verwendung dieser verschiedenen Optionen sollte es ohne allzu große Schwierigkeiten möglich sein, Arbeitsunterlagen für den Unterricht zu erstellen.

b) Arbeitsblätter

Wie bereits im Kapitel 4 gezeigt, tendiert der computerunterstützte Unterricht dazu, das selbständige Arbeiten der Schüler zu fördern. Eine geeignete Hilfestellung stellen Arbeitsblätter dar. Dabei ist zu beachten, daß die Arbeitsblätter dem Schüler die Möglichkeit bieten können, Bearbeitungen der Arbeitsaufträge, Zeichnungen, Interpretationen etc. in das Arbeitsblatt einzutragen. Bei diesen Arbeitsblättern gibt es eine große Vielfalt an Möglichkeiten, zwei sollen hier exemplarisch angerissen werden.

(1) Arbeitsblatt zum Überprüfen von getroffenen Entscheidungen

Dabei wird zuerst mit Papier und Bleistift gearbeitet und erst danach wird das CAS als Überprüfung, eventuell als Hilfe verwendet. Während der handschriftlichen Arbeit muß der Schüler keinen Computer zur Verfügung haben. Der Schüler kann sich danach die Rückmeldungen über die Folgen seiner Entscheidung selbst holen. Diese Komponente ist aus didaktischer Sicht neu. Die bisherige Rückmeldung über richtig und falsch erfolgte meist durch den Lehrer oder durch Mitschüler, eventuell Eltern. Es gibt also eine weitere Anlaufstelle, die befragt werden kann.

Arbeitsblätter, die vom Lehrer erstellt werden, sind beim Arbeiten mit einem CAS hilfreich, da einerseits die Schüler zur Selbständigkeit angehalten werden und andererseits der Lehrer den nötigen Freiraum für die Beobachtung und Betreuung erhält.

Beispiel 5.14: Arbeitsblatt 1

Durch welche Äquivalenzumformung ist die zweite Gleichung entstanden?

[vgl. Laub, Hruby, S.135]

```
a)  x + 6 = 1 ,    b) 7 u = 21 ,    c) 4 m = 4 m ,    d) 3 t = 3 t ,

     x = -5             u = 3             0 = 0              t = t
```

e) $\frac{5}{r} = 2$,	f) $4 - t = 1$,	g) $3x - 7 = 2x + 1$,
$5 = 2r$	$t - 4 = -1$	$x - 7 = 1$
h) $\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$,	i) $\frac{3y}{4} + 1 = \frac{y}{2}$,	j) $a - 3 = \frac{2a}{3}$,
$x = 2$	$3y + 4 = 2y$	$3(a - 3) = 2a$
k) $5 - \frac{z}{3} = z$,		
$5 = \frac{4z}{3}$		

Überprüfe Deine Umformungen mit DERIVE!

Bei der Überprüfung mit dem CAS kann die gesamte Gleichung mit **F4** in die **Author**-Zeile geholt und die Umformung eingegeben werden. Die Beispiele können in kurzer Zeit getestet werden. Bei einzelnen Beispielen wird es in der Klasse mehrere Vorschläge geben, die schon beim Vergleichen zu Diskussionen führen können. Das CAS gibt die Möglichkeit, daß der Schüler ohne Fremdanleitung seine Meinung bestätigt sieht oder revidieren muß.

Gleichung	Umformung	Vereinfachte Gleichung
#9: $4m = 4m$	#10: $(4m = 4m) - 4$	#11: $4m-4 = 4m-4$
	#12: $(4m = 4m) - m$	#13: $3m = 3m$
	#14: $(4m = 4m) - 4m$	#15: $0 = 0$
	#16: $\frac{(4m = 4m)}{4m}$	#17: $1 = 1$
#18: $3t = 3t$	#19: $(3t = 3t) - t$	#20: $2t = 2t$
	#21: $\frac{3t = 3t}{t}$	#22: $3 = 3$
	#23: $\frac{3t = 3t}{3}$	#24: $t = t$

Erfahrungsgemäß hat jeder Lehrer seine eigene Zielvorstellung und eine eigene Planung, so daß Arbeitsblätter nur selten direkt übernommen werden. Dennoch kann es hilfreich sein, sie mit bereits existierenden Arbeitsunterlagen zu vergleichen.

(2) Arbeitsblätter zum Interpretieren und Begründen

Je nach Unterrichtsplanung ist das Arbeiten mit dem CAS erwünscht, oder der Computer wird bewußt nicht eingeschaltet. Beim Arbeiten im Computerraum mit 30 Schülern ist es organisatorisch günstiger, die Abbildungen (z.B. Graphen) nicht jeden Schüler selbst ausdrucken zu lassen, sondern eine Vorlage für das Einlegen oder -kleben in das Übungsheft oder zum Einheften in eine Mappe zu kopieren.

Häufig (etwa bei der Interpretation von Graphen) wird es auch günstig sein, Folien oder Kopien eines Computerausdrucks für die handschriftliche Bearbeitung zur Verfügung zu stellen. Das angeführte Beispie könnte auch eine Themenstellung bei einer Klassenarbeit sein.

Beispiel 5.15 Arbeitsblatt 2

Es ist die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt (Abb. 5.13).

Welche Graphen in den drei weiteren Abbildungen können eine zu f' gehörige Funktion f darstellen? Begründe genau, warum die jeweilige Funktion zu dieser Ableitungsfunktion paßt!

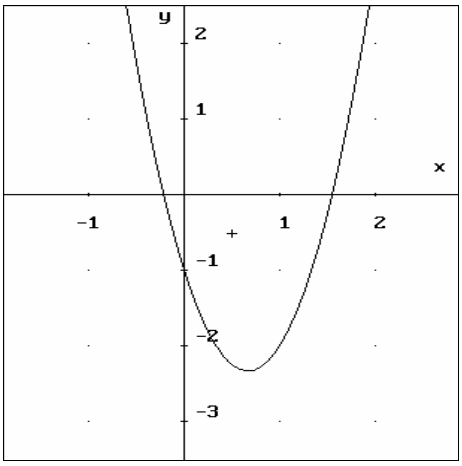


Abb. 5.13: Die Funktion f'

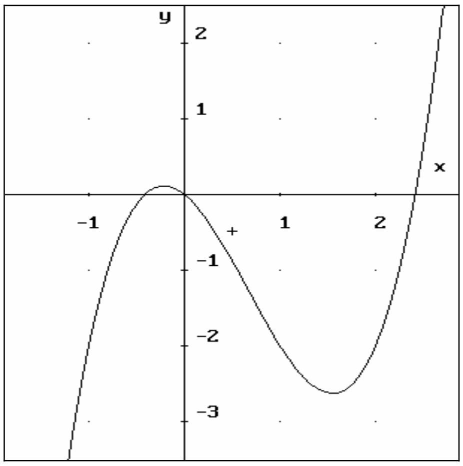


Abb. 5.14: Erste Funktion f

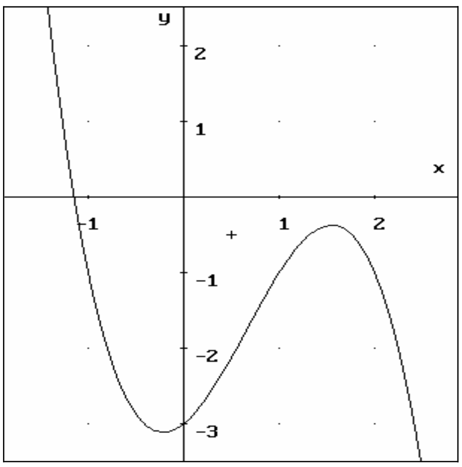


Abb. 5.15: Zweite Funktion f

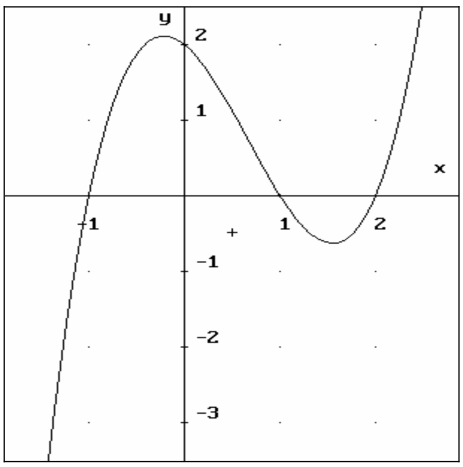


Abb. 5.16:Dritte Funktion f

c) Modulprinzip

Das in Abschnitt 4.3 vorgestellte Modulprinzip erfordert vom Lehrer einige Planungs- und Vorbereitungsarbeit, seien es nun Ideen als Anstoß für Schülermodule, Vorüberlegungen für gemeinsame Schüler-Lehrer-Module oder die Programmierung und Dokumentation von Lehrermodulen. In Ergänzung zu dem beim Modulprinzip gesagten seien hier noch zwei weitere Ideen angeführt.

(1) Module als Werkzeuge für mathematisches Erkennen und mathematische Entdeckungen

Das Modulprinzip eröffnet dem Lehrer die Chance, seinen Schülern Werkzeuge in die Hand zu geben, mit denen diese eigenständige Entdeckungen machen können. Meist werden solche Module dann nutzbringend eingesetzt werden, wenn ein neuer Begriff bereits eingeführt worden ist und es darum geht, möglichst viele Aspekte dieses Begriffs kennenzuleren und Erfahrungen im Umgang mit diesem neuen Begriff aufzubauen. So dient sicher das in Kap. 4.3 vorgestellte Modul zur Visualisierung von Binomialverteilungen dazu, das Wesentliche und Typische an Binomialverteilungen besser zu erkennen.

(2) Das modular aufgebaute Schulheft bzw. Schulbuch

Durch die Zunahme elektronisch erfaßter Unterrichtsunterlagen, durch die Möglichkeiten, die sich aus der Kombination von mathematischer Arbeitsumgebung und elektronischer Textgestaltung ergeben, scheint es nicht völlig unrealistisch, daß in Zukunft Schüler ihre Arbeit im Unterricht bzw. bei Hausübungen in der Form dokumentieren, daß 'Notebooks' angelegt werden. Fast alle unter grafischen Oberflächen betriebenen CAS gestatten es, die durchgeführten Berechnungen zu „kapseln" und erst auf Wunsch des Benutzers anzeigen zu lassen. Vorreiter in dieser Beziehung war das System MATHEMATICA, mittlerweile gehört diese Möglichkeit quasi zum Standard, auch die nächste DERIVE-Version wird damit ausgestattet sein. So können die zu einem Thema erarbeitete Theorie, die parallel entwickelten Module, die bearbeiteten Beispiele und die zugehörigen Lösungen in ein 'Notebook' zusammengefaßt werden. Eventuell könnten Beispiele noch verknüpft werden mit Anmerkungen, Daten- und Bildmaterial (z.B. aus der Geschichte der Mathematik). Solche 'Notebooks' ließen sich beständig ausbauen, „Längs- und Querschnitte" sind effektiv herstellbar. Voraussetzung dafür wären allerdings mathematisch-orientierte Textverarbeitungen, die wesentlich einfacher als alle bisher erhältlichen, zu benutzen sind. Die rasanten Entwicklungen im Bereich der Datenspeicherung (CD-ROMs), der Kommunikation mittels Internet und die Organisation solcher 'Notebooks' mit Hypertextverknüpfungen eröffnen hier für die Zukunft sicher interessante Möglichkeiten.

5.2.4. CAS als zweite Autorität und Folgen für das Lehrerverhalten

Eine in der Unterrichtspraxis nicht zu unterschätzende Folge des Einsatzes von CAS ist die Tatsache, daß der 'algorithmische Gehorsam' und (permanente) Gleichschritt im Unterricht verlorengeht. Unterschiedliche Bearbeitungswege einer Aufgabe bzw. eines Problems im Unterricht, aber vor allem auch in der Übungs- und Prüfungsituation, treten in Erscheinung. Hier ist der Lehrer in zweifacher Weise gefordert:

a) Fachliche Kompetenz und Flexibilität

Warum ist fachliche Kompetenz gefragt? Es wird im CA-unterstützten Unterricht häufiger auftreten, daß Schüler Aufklärung verlangen für Ergebnisse, die das System liefert, die aber mit dem momentanen Wissensstand des Schülers nicht erklärbar sind. Problemlösen und Verstehen sind zwei wesentliche Komponenten im Mathematikunterricht, die Hand in Hand gehen müssen. Mittels CA sind die Möglichkeiten des Problemlösens gewaltig gestiegen. Verstehen ist aber ein mit Paradoxien einhergehender Prozeß - wie H.-J.Vollrath dargestellt hat [Vollrath, 1993,S.35-38] - der nur durch intensives und persönliches Bemühen des einzelnen vollzogen werden kann. Der Lehrer und das CAS können dazu wertvolle Dienste leisten.

b) Kompetenz im Umgang mit CAS

Immer wieder wird der Lehrer auch konfrontiert sein mit Eingabe- bzw Übertragungsproblemen. Einige (häufig auftretende) Beispiele dazu:

Beispiel 5.16: Nicht erkannte 'Übertragungsfehler'

Speziell bei den selbstgewählten Einstellungen *Word* und/oder *Sensitive* (deshalb ist es günstig in der Grundeinstellung *Character* und *Insensitive* vorzugeben) treten immer wieder die Probleme auf, daß die Benützer die Einstellungen 'vergessen' und etwa *a*b* eingeben wollen, am Bildschirm erscheint jedoch die Wortvariable *ab*. Wird die Eingabe am Bildschirm nicht kontrolliert entstehen bei weiteren Berechnungn großere Probleme. Diese Situation läßt sich pädagogisch nutzen, indem durch mehrere Beispiele die Auswirkung von fehlenden Eingabekontrollen aufgezeigt werden.

Bei dem folgenden Beispiel wurde sin*x* eingegeben und die Zeile #4 gezeichnet. Es entsteht statt der Sinuskurve eine Gerade, die erste Mediane (Abb. 5.17). Spätestens hier sollte der Anwender nicht dem CAS die Schuld geben, sondern seine Eingabe hinterfragen!

```
#1:  InputMode := Word                                      User
#2:  CaseMode := Sensitive                                  User
#4:  y = sinx                                               User
```

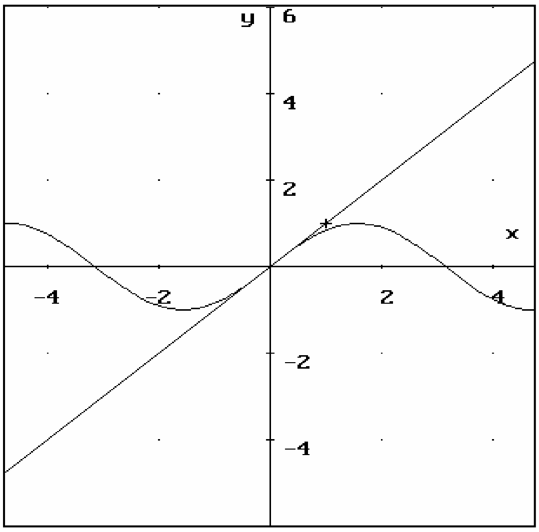


Abb. 5.17 : SIN(x) ?

Bei den von uns vorgeschlagenen Grundeinstellungen zeigt DERIVE einen hohen Anteil an Selbständigkeit im Umgang mit der Interpretation der Eingabe. Es wurde, wie vorher, sin*x* eingegeben und DERIVE filtert den vordefinierten Funktionsnamen SIN aus der Zeichenkette heraus und liefert das gewünschte Ergebnis (Abb. 5.17).

```
#5: InputMode := Charakter                                 User
#6: CaseMode := Insensitive                                User
#7: y = SIN(x)                                             User
```

Der Benützer soll verwendete Funktionen und Befehle also immer mit Großbuchstaben eingeben und sich an die Syntax (hier Klammern) halten.

Beispiel 5.17: Vordefinierte Konstanten

Ein weiterer Dauerbrenner unter Schüleranfragen ist die Eingabe der Eulerschen Zahl e und der imaginären Einheit i. Werden diese nicht mit **Alt+e** oder **Alt+i**, sondern als Buchstaben (#8) eingegeben, behandelt das CAS diese Eingaben als Variablen.

```
            x
#8:  y = e                                                User
            x
#9:  y = ê                                                User
```

Versucht man die Zeile #8 zu zeichnen, so erhält man nur die Rückmeldung "CAnnot do implizit 3D plots". Wieder liegt das Problem beim Anwender und nicht beim Computer.

Beispiel 5.18: Geänderte Voreinstellung

Mit einem CAS sind immer wieder Einstellungen durchzuführen. Dabei müssen einige Optionen mit der **TAB**-Taste übersprungen werden, um die geeignete Option einstellen zu können. Im Grafikmenü kann mit **Option State** *Connected* das Verbinden von Punkten eingestellt werden. Dabei überspringt man das Eingabefeld für die Art der Darstellung im Koordinatensystem (Cartesische Koordinaten oder Polarkoordinaten). Die grafische Darstellung von $y = x$ (siehe Abb. 5.18) gefällt den Lernenden aus ästhetischen Gründen, ist jedoch meist nicht die gewünschte.

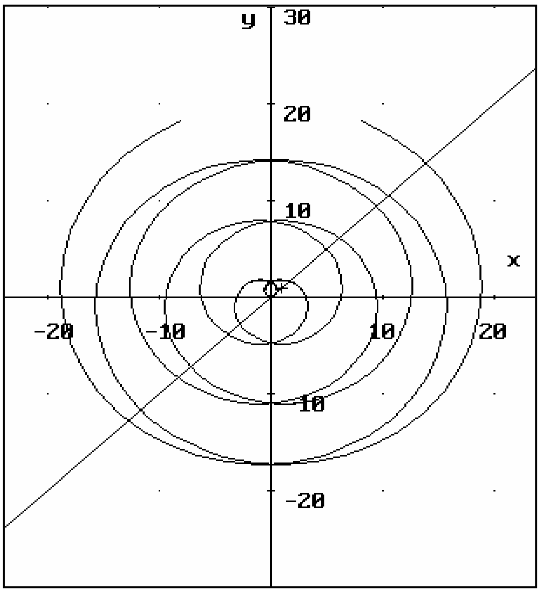


Abb. 5.18: Eine Gerade?

In der 8. und 9. Schulstufe wird das folgende Beispiel, zwecks mangelnder mathematischer Kenntnisse, meist nur durch Einsetzen, also Probieren gelöst. Mit dem CAS kann die Lösung jedoch mit Tastendruck erfolgen und die Ausgabe der Lösung verblüfft.

Beispiel 5.19: Verzinsungsproblem - geheimnisvoller Formelzauber

Ein Kapital von 5000 Schilling wird mit 5% verzinst. Nach wieviel Jahren wird das Kapital über 8000 Schilling ansteigen?

Die Übersetzung dieser Aufgabenstellung in eine Gleichung führt zum Aufsuchen einer fehlenden Hochzahl *x*.

#1: $5000 \cdot 1.05^{x} = 8000$ User

#2: $x = \dfrac{3 \cdot LN(2) - LN(5)}{LN\left[\dfrac{21}{5}\right] - 2 \cdot LN(2)}$ Solve(#1)

Die Lösung läßt sich für einen Schüler dieser Schulstufe nicht interpretieren. Jedoch wird er mit der Anwendung einer ihm nicht bekannten Funktion vertraut und sieht, daß diese 'Geheimzeichen' vertraute Zahlen liefern.

```
#3:   x = 9.63316                                      Approx(#2)
```

Der Lehrer kann diese Situation zum Anlaß nehmen, um aus der Black Box - eventuell zeitversetzt und in den Aufbau seines Kurses eingebaut - im Unterricht eine White Box zu machen (vgl. Black Box/White Box-Prinzip).

Beispiel 5.20: Das Computeralgebra-System verweigert die Dienste

Löst ein Anwender die angegebene Ungleichung mit **soLve**

#1: $\frac{x}{a} - b < c$ User

erhält er als Lösung #2.

#2: $x \cdot \mathrm{SIGN}(a) < (b + c) \cdot |a|$ Solve(#1)

Es läßt sich für Schüler einer 8. oder 9. Schulstufe nur erkennen, daß die Ausgabe irgend etwas mit der positiven oder negativen Größe von a zu tun hat. Er kann weitere Untersuchungen durchführen, etwa die Äquivalenzumformung:

#3: $\left[\frac{x}{a} < b + c\right] \cdot a$ User

#4: $a \cdot \left[\frac{x}{a} < b + c\right]$ Simp(#3)

Die Vereinfachung von #3 wird jedoch vom CAS verweigert. Warum? Die Variable a darf einerseits nicht Null sein, andererseits hat eine Multiplikation mit einem positiven oder negativen a Auswirkungen auf das Ungleichheitszeichen. Deshalb:

```
#5:   "Fallunterscheidungen:"                           User
#6:   a :ε Real (0, ∞)                                  User
#7:   x < a·(b + c)                                     Simp(#6)
#8:   a :ε Real (-∞, 0)                                 User
#9:   x > a·(b + c)                                     Simp(#6)
```

Die Vereinfachung von #7 liefert interpretierbare Ungleichungen. Diese Vorgangsweise ist vielleicht für einen Schüler einsichtiger als eine vorweggenommene Verpflichtung zum Durchführen von Fallunterscheidungen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß forciertes experimentelles Arbeiten vom Lehrer neue Kompetenzen, insbesondere eine erhöhte Flexibilität erfordert und zu einer Veränderung seiner Rolle im Unterricht führt. Aus der rein wissensvermittelnden dozierenden Autorität wird auch eine (natürlich weiter wissensvermittelnde) Person, die dem Schüler helfen kann, mit der zweiten Autorität im Unterricht kritisch, konstruktiv und sachgerecht umzugehen.

5.3. Die Veränderungen in der Übungsphase

Das Thema 'Üben' fristet in der mathematisch-didaktischen Diskussion ein eigenartiges Schattendasein. Einerseits wird Üben für sehr wichtig und wesentlich für den Lernfortschritt angesehen, wobei dies oft in der Meinung gipfelt: Alles Mathematiklernen sei bloß eine Frage des 'richtigen' Übens. Andererseits erscheint das Thema 'Üben' als wenig attraktiv und wird in der didaktischen Diskussion oft vernachlässigt. Erarbeiten neuer Inhalte, Modellbilden, kreatives Problemlösen werden oft geradezu im Gegensatz zum Üben gesehen. Auf diesen Zwiespalt hat bereits H.Winter in einem höchst lesenswerten Grundsatzartikel zum Thema Üben [Winter, 1984, S.4-16] hingewiesen.

Üben ist leider da und dort in der Schulmathematik zum Selbstzweck geworden, seien es nun in ihrer Komplexität überzogene Termumformungen, aufwendige Exponential- und logarithmische Gleichungen, die ohne jeglichen Anwendungsbezug gedrillt werden, oder mechanisch ablaufende Kurvendiskussionen. „Etwas, was offenbar auf keine vernünftige Weise angewandt werden kann, entwickelt sich, weil es ja geübt werden muß, zu einem selbständigen Kapitel der Schulmathematik. Es ist eine traurige Geschichte, daß solch ein Thema, wenn es einmal eingeführt ist, eine Tradition erzeugt, die kaum noch auszurotten ist“. [Freudenthal, 1977, zitiert nach Kronfellner, 1987, S.164]

In seinen Überlegungen zu dieser Thematik fordert H.Winter eine Theorie des Übens, die „ihren Stellenwert im Gesamtvollzug der Mathematiklernens erkennen läßt“. Seine Forderung nach Einbettung des Übens in den Kontext des Mathematiklernens - etwa wie es in Kapitel 4 in Form der drei Phasen (heuristische, exakte und Anwendungsphase) dargestellt wurde -, ist heute aktueller denn je.

Was soll im Mathematikunterricht sinnvollerweise geübt werden? Sind oder werden diese 'Übungsbereiche' durch CAS beeinflußt? Wenn ja, auf welche Weise? Gibt es Techniken, die durch CAS bedeutsamer werden und dadurch einen Übungsbedarf hervorrufen? Es ist hier kaum möglich, das weite Feld des Übens im MU auszuleuchten, wir wollen lediglich zwei Schlaglichter werfen: Die stärkere *Einbettung des Übens* in den Kontext des Mathematisierens und Problemlösens und die *Notwendigkeit des Testens*.

5.3.1. Die stärkere Einbettung des Übens in den Kontext des Mathematisierens und Problemlösens

Ganz grob läßt sich das, was geübt werden soll, gliedern in den Bereich der *Fertigkeiten* (Kalküle, Techniken), des *begrifflichen Wissens* und der *mathematischen Fähigkeiten*.

Auf den ersten Blick ist natürlich der Bereich der Rechenfertigkeiten am stärksten durch die Existenz von CAS betroffen. Worin bestehen diese Rechenfertigkeiten bzw. die schulrelevanten Kalküle?

Hier ist zuerst das Rechnen in den verschiedenen Zahlenbereichen (vom Rechnen mit Brüchen bis zum Rechnen mit komplexen Zahlen) anzuführen, also die elementaren Kalküle der Arithmetik der Zahlbereiche, in schriftlicher und mündlicher Form. Des weiteren „das Rechnen mit Buchstaben“, also Termumformungen und Lösungsverfahren für elementare Gleichungssysteme. Auch die verschiedenen Verfahren zum Auflösen von (linearen und nichtlinearen) Gleichungssystemen, von quadratischen Gleichungen und Gleichungen höherer Ordnung zählen dazu. Genauso können die Polynomdivision bzw. Partialbruchzerlegung, Bestimmung von Grenzwerten, Bestimmung von Ableitungs- und Stammfunktionstermen, die Entwicklung von Taylorreihen, die Verfahren zur numerischen Bestimmung von Nullstellen (stetiger) Funktionen sowie das Rechnen mit weiteren mathematischen Gegenständen (Vektoren, Matrizen, Folgen, Funktionen u.a.) hier angeführt werden.

Zu den Fertigkeiten sollten auch die zeichnerischen Grundfertigkeiten und die graphische Darstellung funktionaler Zusammenhänge gezählt werden.

Alle die angeführten - auch in Zukunft natürlich wichtigen - Fertigkeiten sind durch CAS gleichsam entwertet. Diese Entwertung kann eine Demotivation zur Folge haben (Schülerfrage „Warum muß ich noch die Nullstelle einer Funktion "per Hand" ermitteln, wenn ich a) diese im Graphikfenster "sehe" und b) jederzeit mir beliebig genau errechnen lassen kann?“), wenn nicht auch vom Übungsangebot und vor allem von den dahinter stehenden Intentionen entsprechend reagiert wird.

Man kann hier auf die verschiedenen positiven und wichtigen Aspekte hinweisen, die mit dem Üben von Kalkülen verbunden sind, wie sie etwa von R.Köhler [BzM 1995, S. 297] zusammengefaßt wurden.

- Kalküle vermitteln kalkulierbare Erfolgserlebnisse.
- Besonders bei schwachen Schülern wird das Verständnis gefördert.

- Um in der Lage zu sein, die von Computern gelieferten Ergebnisse vernünftig zu interpretieren, sollten Schüler Möglichkeiten kennengelernt haben, diese Ergebnisse (zumindest im Prinzip) selbst ermitteln zu können, und sie müssen dabei genügend eigene Erfahrung gesammelt haben. [Blum, 1995, S.12]
- Kalküle haben eine entlastende Funktion für Schüler und Lehrer: Der rein forschende, experimentelle Unterricht überfordert alle Beteiligten. [Bender in: Walsch, 1989,S. 224]
- Zur Einschätzung der Leistungsfähigkeit von Rechnern muß die Mühsal des selbst ausgeführten Kalküls verspürt worden sein [Schönwald in DdM, 1991, S. 252-265]
- Kalküle haben eine unterrichtsordnende Funktion, weil sie Unterrichtsabläufe strukturieren helfen und durchschaubar machen.
- Kalkülhaftes Arbeiten ist bei vielen Schülern beliebt, weil Mathematik damit greifbar und verstehbar wird (Stichwort: operatives Prinzip!). Für schwache Schüler werden Kalküle mitunter sogar zum 'Rettungsanker'.
- Der Umgang mit Kalkülen verschafft Erfahrung und Sicherheit im Umgang mit mathematischen Objekten wie Termen, Gleichungen, Funktionen usw.
- Kalküle können als Black-Boxes fungieren, indem man schwierige Details ausblendet und sich auf das Kalkülprodukt anstatt auf den Kalkülprozeß konzentriert.

Wir meinen, daß es vor allem darauf ankommen wird, sich auf ein *'vernünftiges' Ausmaß* an handschriftlichen Fertigkeiten einzupendeln. Überzogene Kalkülfertigkeiten werden angesichts eines permanent zu Verfügung stehenden CAS (etwa in Taschenrechnerform) in Zukunft wahrscheinlich den Charakter einer sportlichen Betätigung annehmen. An die Stelle einer überladenen Komplexität muß eine *verstärkte Reflexion* auf mathematische Inhalte und Begriffsbildungen treten, so daß der Werkzeugcharakter der Kalküle deutlicher hervortreten kann und diese stärker in einen anwendungs- und problemorientierten Unterricht eingebettet werden können.

Beispiele:

- Statt endlosen und damit das Interesse tötenden Termumformungen Übungen im Struktur- und Mustererkennen.
- Statt isoliertem Lösen von Exponential- und logarithmischen Gleichungen die Behandlung von Wachstumsmodellen.
- Statt mechanisch ablaufenden Kurvendiskussionen verstärktes Modellieren von Anwendungssituationen mit Funktionen und Kurven.

Ansätze für solche Veränderungen in der „Übungslandschaft“ finden sich etwa in der von W.Herget in "Mathematik lehren" eingerichteten Rubrik "Die etwas andere Aufgabe" oder in G.Schmidts Artikel [MU,1993/1, S.10-27], um nur zwei Beispiele herauszugreifen.

Zusammenfasend kann also festgestellt werden: handschriftliche Verfahren behalten natürlich auch im CAS-unterstützten Unterricht ihre Bedeutung. Wichtig ist es dabei aber, sich auf die typischen und wesentlichen Fälle zu beschränken. Bei aufwendigeren Kalkülen bieten CAS hingegen neue Chancen, die es zu nutzen gilt:

- CAS befreien von der Irrtumsanfälligkeit (eine Hausübung kann zur „Kontrolle“ etwa noch einmal mit dem CAS nachgerechnet werden).
- Durch die raschere Ausführung eines Kalküls (z.B. „Nullsetzen der ersten Ableitung“, Erstellen des Graphen der Funktion oder seiner Ableitungen, Faktorisieren komplizierterer Terme) ist eine Konzentration auf den Gesamtzusammenhang eines Problems leichter möglich. Eine klarere Strukturierung eines Problemlöseprozesses in *Mathematisierung - Kalkülanwendung - Interpretation* läßt sich eher erreichen. Der Schüler kann dadurch auch leichter verstehen, daß Mathematik eine Sprache ist, die uns hilft Probleme zu lösen, wenn wir es schaffen, sie mit dieser Sprache zu beschreiben.
- Bei der Verwendung von CAS bzw. der Möglichkeit ein CAS „zu Hilfe zu rufen“, rechnen Schüler auch dann weiter, wenn sie handschriftlich bereits kapituliert hätten. Oft werden dann durch das CAS neue Ideen „induziert“, die den „Totpunkt“ überwinden helfen.

Wie schon an anderer Stelle in diesem Buch betont, müssen die Schüler nun aber andererseits auch eine neue Art von Fertigkeit erwerben, etwa jene, einen mathematischen Zusammenhang im CAS „abzubilden", Transformationen mit Hilfe des CAS vorzunehmen u.a. (vgl. Kap.5.2.1).

Begriffliches Wissen

Während Fertigkeiten „linear" organisiert sind und dann als eingeübte Handlungen wie ein Programm ablaufen können (und sich daher auch gut für einer Implementation im Rahmen eines Informatiksystems eignen) liegt begriffliches Wissen im Idealfall als „vernetztes System" vor. Steht bei den *Fertigkeiten* die Automatisierung und die „virtuos beherrrschte Technik" im Vordergrund, so soll beim *Wissen* dieses als umfassendes System leicht abrufbar zur Verfügung stehen. „Wissenselemente (Begriffe, Bestandteile von Begriffen, Eigenschaften von Begriffen, Beziehungen zwischen Begriffen ...) müssen (...) in möglichst vielfältig verbundener, aber sozusagen ruhender Vernetzung bereit liegen, um im Bedarfsfall (Erinnerungsfall) in einer bestimmten, dem jeweiligen Anliegen dienlichen Hierarchisierung rekonstruiert werden zu können (und das möglichst flüssig)" [H.Winter, a.a.O., S.8]. Unseres Erachtens kann das White Box/Black Box-Prinzip Beiträge zu einer derartigen Hierarchisierung des Wissens leisten (vgl. White Box/Black Box-Prinzip in der Algebra). Auch durch die Möglichkeit der Projektion mathematische Objekte in verschiedene Ebenen - wie sie in 2.5 dargestellt wurde - , eröffnen sich neue Zugänge zu Eigenschaften eines Begriffes eröffnen (Mehrfachrepräsentation von Begriffen).

Das Einübens von Fertigkeiten und die Schaffung einer mathematischen „Wissensbasis" können aber nie Selbstzweck sein. Sie haben eine dienende Funktion, die „eigentlichen und entscheidenden Zielsetzungen des Mathematikunterrichts sind auf die Schulung von übergeordneten, womöglich sogar fächerübergreifenden Fähigkeiten gerichtet" [Winter, 1984, S.9].

Mathematische Fähigkeiten

Ziel alles Übens muß der Aufbau mathematischer Fähigkeiten sein. Was kann man darunter verstehen? Wir wollen uns hier wieder der „Definition" H.Winters anschließen:

„Fähigkeit im Bereich X = Tüchtigkeit, Probleme im Bereich X zu lösen"

„Fähigkeiten stellen komplexe Könnensschemata dar, die Fertigkeiten und Wissensstücke als wichtige Bestandteile enthalten, aber nicht auf diese reduzierbar sind." [Winter, a.a.0., S.9]

Wird Üben integrativ als Aufbau von mathematischen Fähigkeiten gesehen, so ist es wesentlich, daß bei diesem Üben stets der Bezug

- zum *Organismus der Mathematik*,
- zu den *Anwendungen der Mathematik* und
- die Orientierung an Problem- bzw. Themenkreisen deutlich sichtbar bleibt.

Wir brauchen dazu nicht unbedingt völlig neu zu beginnen. Durch die neuen Werkzeuge werden oft auch herkömmliche Aufgabenstellungen ganz neu bearbeitbar. Und vielfach können dadurch diese drei genannten Aspekte stärker hervortreten. Dies soll anhand einer Optimierungsaufgabe dargestellt werden. Dabei soll überdies gezeigt werden, daß auch in der Kalkülphase neue Möglichkeiten bestehen, z.B. dadurch, daß eine allgemeine Problemstellung schnell mit konkreten Zahlenwerten betrachtet wird, um eine Einschätzung für einen Zusammenhang zu erhalten. Oder es tauchen in der Interpretationsphase neue Fragen auf, denen nun leicht nachgegangen werden kann, und deren Lösung einen wertvollen Beitrag zum Verständnis der Aufgabe leistet. Erst durch die größere Palette an Möglichkeiten eröffnet sich auch die Chance, verschiedene Wege bei der Mathematisierung der Problemstellung zu gehen. Andererseits zeigen sich in diesem Beispiel auch prinzipielle Grenzen im Einsatz von CAS, an die man im Mathematikunterricht aber durchaus stoßen kann.

Beispiel 5.21: Optimierungsaufgabe

[Reichel, S.142, Beisp.516]

Zwei Städte A und B wollen an der geradlinigen Meeresküste eine gemeinsame Trinkwassergewinnungsanlage C bauen (Skizze). Die Kosten für 1km Wasserleitung von C nach A beträgt a Schilling, von C nach B b Schilling. Wo soll die Anlage gebaut werden, wenn die Gesamtkosten minimiert werden sollen?

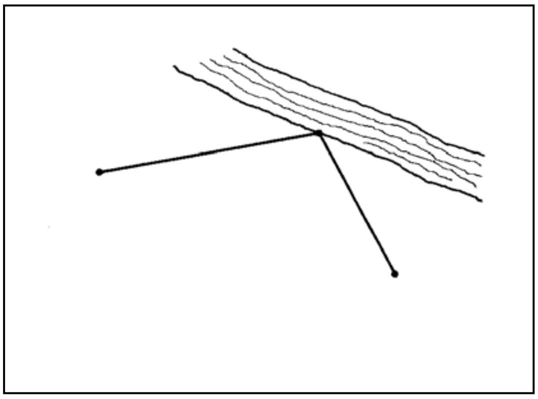


Abb. 5.19: Skizze1

Zur Mathematisierung: Die Problemstellung ist hier sehr offen (in welcher Weise soll der Ort der Trinkwasseranlage angegeben werden?) und gleichzeitig völlig eindeutig (die Gesamtkosten sollen minimal sein!) formuliert. Wir müssen uns also überlegen, wie wir den gesuchten Ort angeben wollen (was würden wir z.B. den beiden Bürgermeistern von A und B sagen?) Denkbar sind etwa folgende Varianten: Man gehe z.B. von A auf kürzestem Weg (= Normalabstand) zur Küste und von dort x km an der Küste entlang in Richtung B, nach diesen x km ist der gesuchte Ort C erreicht! Oder: Wir verraten den beiden Stadtoberhäuptern den jeweiligen Winkel zwischen der Normalen zur Küste und der Richtung zu C. Auch andere Varianten wären denkbar.

Fassen wir die genannten Varianten in eine Skizze (Abb. 5.20) zusammen und vergeben wir dabei geeignete Symbole!

Die Kostenfunktion ergibt sich damit als:

$$K(x) = a.l_a + b.l_b = a.\sqrt{n_a^2 + x^2} + b.\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}$$

Sinnvoll ist $x \ \varepsilon \ [0, d]$.

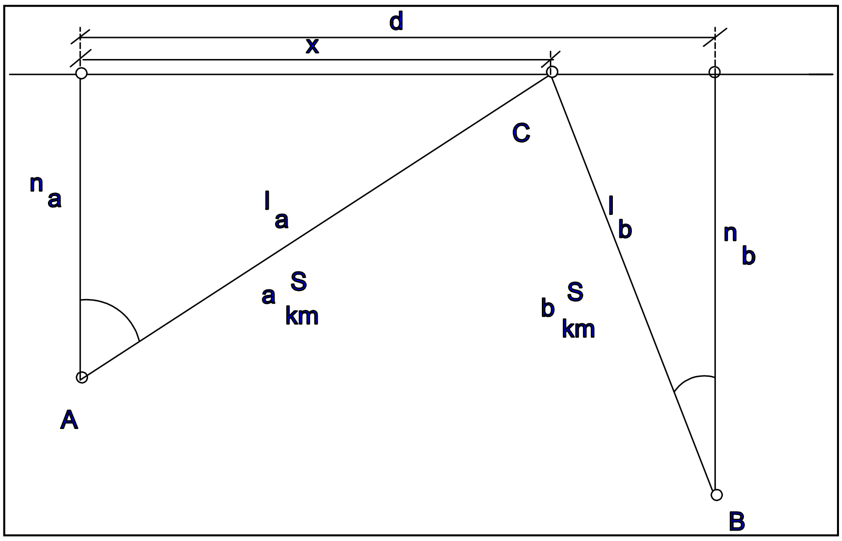


Abb. 5.19: Skizze 2

Zum Kalkül: Begeben wir uns auf die Suche nach dem Minimum.

$$K'(x) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (n_a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} + b \cdot \frac{1}{2} \cdot (n_b^2 + (d-x)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (d-x) \cdot (-1) =$$

$$\frac{a \cdot x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}} - \frac{b \cdot (d-x)}{\sqrt{n_b^2 + (d-x)^2}}$$

Die Bedingung $K'(x) = 0$ liefert die Wurzelgleichung:

(1) $$\frac{a \cdot x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}} = \frac{b \cdot (d-x)}{\sqrt{n_b^2 + (d-x)^2}}$$

Wenn wir versuchen, sie nach x aufzulösen, landen wir bei einer Gleichung 4.Grads:

$$\frac{a^2 \cdot x^2}{n_a^2 + x^2} = \frac{b^2 \cdot (d-x)^2}{n_b^2 + (d-x)^2}$$

$$a^2 \cdot x^2 \cdot n_b^2 + a^2 \cdot x^2 \cdot (d-x)^2 = n_a^2 \cdot b^2 \cdot (d-x)^2 + b^2 \cdot x^2 \cdot (d-x)^2$$

(2) $$(a^2 - b^2) \cdot x^4 + 2d(b^2 - a^2) \cdot x^3 + (a^2 d^2 + a^2 n_b^2 - b^2 d^2 - b^2 n_a^2) \cdot x^2 + \\ + 2b^2 d \ n_a^2 \cdot x + (-b^2 d^2 \ n_a^2) = 0$$

Dieses Polynom 4. Grads erweist sich nun leider als eine fast unüberwindliche Hürde, wenn wir versuchen, in dieser allgemeinen symbolischen Form zu einer Lösung bzw. zu einer Nullstelle zu kommen.

Für Gleichungen 3. Grads gibt es bekanntlich die CArdanosche Formel und Gleichungen 4. Grads kann man mit Tricks auf Gleichungen 3. Grades zurückführen (einen hat etwa Descartes 1637 angegeben [Cigler, 1995, S.36].

Wenn wir versuchen, Gleichung (2) mit DERIVE (Version 3.06) zu lösen, kommt das System zwar zu einem Ergebnis, beim Versuch es am Bildschirm darzustellen, scheitert es aber mit der Meldung "Memory full". Bei der XM-Version wurde der Lösungsversuch nach 1.5 Stunden aufgegeben. MATHEMATICA gibt zwar in kurzer Zeit (≈20s, 486er, 120 MHz) tatsächlich bei (1) bzw. (2) vier Lösungen aus - wie dies durch den Fundamentalsatz der Algebra vorhergesagt wird - allerdings benötigt jeder der 4 Lösungsterme etwa 6 Seiten (Courier, 10pt) beim Ausdruck. Der Fairneß halber muß natürlich angemerkt werden, daß MATHEMATICA wesentlich höhere Systemressourcen benötigt.

So aufwendig unsere Aufgabe im allgemeinen Fall erscheint, so lächerlich einfach wird sie, wenn wir konkrete Zahlen einsetzen und uns damit also in die rein numerische Ebene begeben. Der mathematisch interessante Teil besteht in der Notwendigkeit, eine Gleichung näherungsweise (oder auch grafisch) zu lösen. Nehmen wir also z.B. an:

$a:b = 1:2$, $n_a = 10$km, $n_b = 15$km, d=25km.

Dazu definieren wir zuerst eine Funktion, in die wir alle relevanten Größen packen; in #4 wird dann näherungsweise im sinnvollen Intervall für x ([0,25]) das Minimum ermittelt. Die Situation stellt sich in DERIVE folgendermaßen dar:

```
                                      2    2            2        2
#1:  K(x,a,b,na,nb,d):= a·√(na  + x )+ b·√(nb +(d-x) )      User

#2:  K(x, 1, 2, 10, 15, 25)                                  User
                                d
#3:  K1(x, a, b, na, nb, d) := ── K(x, a, b, na, nb, d)      User
                                dx

#4:  SOLVE(K1(x, 1, 2, 10, 15, 25) = 0, x, 0, 25)            User
```

$$\#5: \quad [x = 17.7416] \qquad \text{Simp(\#4)}$$

$$\#6: \quad K2(x,a,b,na,nb,d) := \left[\frac{d}{dx}\right]^2 K(x, a, b, na, nb, d) \qquad \text{User}$$

$$\#7: \quad K2(x, a, b, na, nb, d) := \qquad \text{Simp(\#6')}$$

$$\frac{a\cdot\sqrt{x^2+na^2}\cdot(2\cdot x^2-3\cdot d\cdot x+d^2+nb^2)+b\cdot\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2}\cdot(2\cdot x^2-d\cdot x+na^2)}{(x^2+na^2)\cdot(x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2)} -$$

$$\frac{(2\cdot x^3-3\cdot d\cdot x^2+x\cdot(d^2+na^2+nb^2)-d\cdot na^2)\cdot(a\cdot x\cdot\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2}+b\cdot(x-d)\cdot\sqrt{x^2+na^2})}{(x^2+na^2)^{1.5}\cdot(x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2)^{1.5}}$$

Führen wir noch den Nachweis, daß ein Minimum vorliegt:

$$\#8: \quad K2(17.7416, 1, 2, 10, 15, 25) \qquad \text{User}$$
$$\#9: \quad 0.109087 \qquad \text{Approx(\#8)}$$

Tatsächlich! Wenn wir #2 plotten, ergibt sich folgendes Bild:

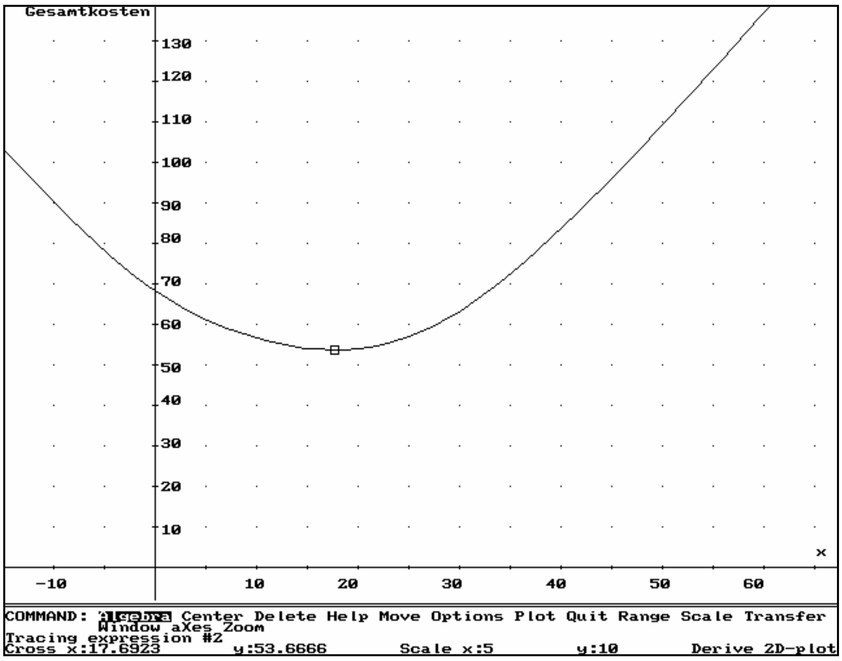


Abb. 5.20: Verlauf der Kostenfunktion K(x,1,2,10,15,25)

Schauen wir uns an, was passiert, wenn wir dieselben konkreten Werte in die von MATHEMATICA produzierten vier allgemeinen Lösungen einsetzen. Im folgenden Befehl wird zuerst Gleichung (1) allgemein aufgelöst, und dann werden die konkreten Werte eingesetzt:

```
N[(x/.
    Solve[(a^2*x^2)/(na^2+x^2)==(b^2*(d-x)^2)/(nb^2+(d-x)^2),x])
                            /.{a->1,b->2,na->10,nb->15,d->25}]
```

$$\{-0.460373 - 11.8893\ I,\ 17.7417 - 6.21725\ 10^{-15}\ I,$$
$$-0.460373 + 11.8893\ I,\ 33.1791 + 4.44089\ 10^{-15}\ I\}$$

Wir erhalten vier komplexe Zahlen, wobei die erste und dritte komplex konjugiert sind und die zweite und vierte verschwindende Imaginärteile aufweisen (Überbleibsel von Rundungen?). Der Realteil der zweiten Lösung liegt in dem für das Problem sinnvollen Intervall. Tatsächlich haben wir damit eine korrekte Lösung bekommen (vgl. #5, oben).

Es gibt noch einen weiteren Weg, um in dieser Sache voranzukommen. Betrachten wir dazu die relevante Gleichung (1) etwas genauer:

$$\frac{a \cdot x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}} = \frac{b \cdot (d - x)}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$$

Da nun $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}}$ 35und $\sin\beta = \frac{d - x}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$ 36können wir kürzer schreiben:

(3) $a \,.\, \sin\alpha = b.\ \sin\beta$ bzw. $\sin\alpha : \sin\beta = b : a$

Interpretation: Um unser Ergebnis (3) besser zu verstehen, nehmen wir wieder an, daß

z.B.: $a : b = 1 : 2 \Rightarrow \sin\alpha : \sin\beta = 2 : 1$

Heißt das nun, daß wir einen der beiden Winkel frei wählen können, und der andere ergibt sich dann daraus, da ja $\sin\alpha = 2.\ \sin\beta \Rightarrow \alpha = \arcsin(2.\ \sin\beta)$, wobei $|2.\sin\beta| < 1$

sein müßte? Dies würde weiter bedeuten, daß es bloße Vereinbarung wäre, wo die Trinkwasseranlage zu bauen ist; jeder Ort wäre gleich günstig (wenn nur $|2.\sin\beta| < 1$ erfüllt ist)? Das ist kaum zu glauben. Gleichung (3) drückt etwas anderes aus, aber was nur?

Wir wissen ja bereits aus der obigen Betrachtung einer konkreten - numerischen - Aufgabenstellung, daß es genau eine Lösung gibt! Aber halt, dort haben wir mehr Information angegeben, nämlich auch die Lage der Orte, nicht nur das Kostenverhältnis $a : b$!

Betrachten wir dazu jetzt zwei konkrete Situationen - bloß um ein besseres Gefühl für unsere Problemstellung zu bekommen:

Annahme 1: $a{:}b = 1{:}2$, n_a=10km, n_b = 15km, d =25km

Annahme 2: $a{:}b = 1{:}2$, n_a=10km, n_b = 15km, d =50km

```
#1:  Precision := Approximate                                User
```

#2: $$\frac{1 \cdot x}{\sqrt{(10^2 + x^2)}} = \frac{2 \cdot (25 - x)}{\sqrt{(15^2 + (25 - x)^2)}}$$ Sub(#19)

```
#3:  x = 17.7416                                           Solve(#2)
```

#4: $$\frac{1 \cdot x}{\sqrt{(10^2 + x^2)}} = \frac{2 \cdot (50 - x)}{\sqrt{(15^2 + (50 - x)^2)}}$$ User

```
#5:  x = 41.6544                                           Solve(#4)
```

Aus der grafischen Lösung von #2 (Abb. 5.22, oben) und #4 (Abb. 5.22, unten) sehen wir, daß im gesamten Definitionsbereich (und offenbar auf ganz ℝ) die auftretenden Terme sinnvolle Argumente für die Arcussinusfunktion liefern.

Für die gefundenen Streken x können wir uns nun die zugehörigen Winkel berechnen lassen und anschließend damit Gleichung (3) überprüfen. Dazu definieren wir zuerst geeignete Funktionen $W\alpha(x)$ und $W\beta(x)$.

#6: Angle := Degree User

#7: $W\alpha(x) := \mathrm{ASIN}\left[\dfrac{x}{\sqrt{(10^2 + x^2)}}\right]$ User

#8: $W\alpha(17.7416) = 60.5924$ User=Simp(User)

#9: $Wß(x) := \mathrm{ASIN}\left[\dfrac{25 - x}{\sqrt{(15^2 + (25 - x)^2)}}\right]$ User

#10: $Wß(17.7416) = 25.822$ User=Simp(User)

#11: $\mathrm{SIN}(W\alpha(17.7416)) = 2\cdot\mathrm{SIN}(Wß(17.7416))$ User

#12: $\mathrm{SIN}(60.5924) = 2\cdot\mathrm{SIN}(25.822)$ Approx(User')

#13: $0.871148 = 0.871153$ Simp(#11)

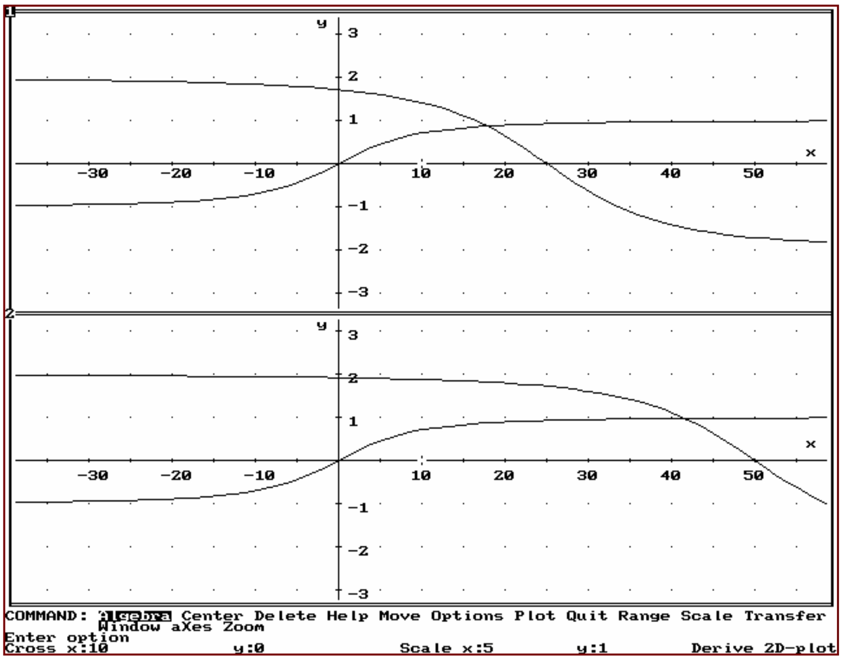


Abb. 5.21:Graphische Lösungen

Um die zweite Lösung (#5) zu überprüfen, muß W(β) neu definiert werden:

#14: $Wß(x) := \mathrm{ASIN}\left[\dfrac{50 - x}{\sqrt{(15^2 + (50 - x)^2)}}\right]$ User

#15: $\mathrm{SIN}(W\alpha(41.6544)) = 2\cdot\mathrm{SIN}(Wß(41.6544))$ User

#16: $\mathrm{SIN}(76.5004) = 2\cdot\mathrm{SIN}(29.0903)$ Approx(User')

#17: $0.972371 = 0.972377$ Simp(#15)

Jetzt sehen wir bereits etwas besser, wie (3) zu lesen ist: Wenn es eine Lösung von (1) gibt, dann ist sie gerade so beschaffen, daß (3) erfüllt ist. Dies ist wiederum trivial, da wir ja (3) aus (1) gefolgert haben. Aber (3) ist eine wesentlich elegantere Darstellung unseres Problems, außerdem sehen wir dadurch, daß es sich offenbar nur um eine andere Einkleidung des aus der Physik bekannten Brechungsgesetzes handelt.

Gleichungen (1) und (3) zeigen aber - wie oben bereits erwähnt - einen wesentlichen Unterschied. (1) beinhaltet alle konkreten Informationen über die Lage der Orte A und B. Diese Informationen gehen beim Übergang von (1) auf (3) offenbar verloren, es bleiben nur mehr Richtungen übrig. Nun vollzieht sich dieser Übergang aber in den Gleichungen:

(4a) $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}}$ 37 (4b) $\sin\beta = \frac{d - x}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$ 38

Mit Hilfe von (3) können wir (4b) auch anschreiben als:

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{b} = \frac{d - x}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$$

Dies versetzt uns in die Lage, Gleichung (1) in eine Gleichung in der Unbekannten α zu transformieren, die aber im Unterschied zu (3) auch die Informationen über die Lage der beiden Orte beinhaltet. Gehen wird dazu wieder von (1) aus und lösen wir (4a) und (4b) nach x auf. Da das CAS #20 nicht nach x auflösen kann, formen wir zuerst um:

#18: Precision := Exact User

#19: $\frac{a\cdot x}{\sqrt{(na^2 + x^2)}} = \frac{b\cdot(d - x)}{\sqrt{(nb^2 + (d - x)^2)}}$ User

#20: $\text{SIN}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{(na^2 + x^2)}}$ User

#21: $\left[\text{SIN}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{(na^2 + x^2)}}\right]^2$ User

#22: $\text{SIN}(\alpha)^2 = \frac{x^2}{x^2 + na^2}$ Simp(#21)

Damit erhalten wir die folgenden vier Lösungen:

#23: $x = \frac{na\cdot\text{SIN}(\alpha)}{|\text{COS}(\alpha)|}$ Solve(#22)

#24: $x = -\frac{na\cdot\text{SIN}(\alpha)}{|\text{COS}(\alpha)|}$ Solve(#22)

#25: $x = \infty$ Solve(#22)

#26: $x = -\infty$ Solve(#22)

Bei Gleichung (4b) wollen wir in analoger Weise vorgehen, wobei wir aber (3) verwenden:

$$\#27: \quad SIN(ß) = \frac{d - x}{\sqrt{nb^2 + (d - x)^2}} \qquad \text{User}$$

$$\#28: \quad \frac{a \cdot SIN(\alpha)}{b} = \frac{d - x}{\sqrt{nb^2 + (d - x)^2}} \qquad \text{User}$$

$$\#29: \quad \left[\frac{a \cdot SIN(\alpha)}{b} = \frac{d - x}{\sqrt{nb^2 + (d - x)^2}}\right]^2 \qquad \text{User}$$

$$\#30: \quad \frac{a^2}{2 \cdot b^2} - \frac{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot b^2} = \frac{(x - d)^2}{x^2 - 2 \cdot d \cdot x + d^2 + nb^2} \qquad \text{Simp(\#29)}$$

Wieder erhalten wir vier Lösungen:

Solve(#30)

$$\#31: \quad x = \frac{a \cdot nb \cdot \sqrt{1 - COS(2 \cdot \alpha)} + d \cdot \sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}}{\sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}}$$

Solve(#30)

$$x = \frac{d \cdot \sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2} - a \cdot nb \cdot \sqrt{1 - COS(2 \cdot \alpha)}}{\sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}} \qquad \#32:$$

$$\#33: \quad x = \infty \qquad \text{Solve(\#30)}$$

$$\#34: \quad x = -\infty \qquad \text{Solve(\#30)}$$

Die sinnvollen Lösungen (#23,#24 und #31,#32) liefern vier Gleichungen:

User

$$\#35: \quad \frac{na \cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{a \cdot nb \cdot \sqrt{1 - COS(2 \cdot \alpha)} + d \cdot \sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}}{\sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}}$$

User

$$\#36: \quad \frac{na \cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{d \cdot \sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2} - a \cdot nb \cdot \sqrt{1 - COS(2 \cdot \alpha)}}{\sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}}$$

User

$$\#37: \quad - \frac{na \cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{a \cdot nb \cdot \sqrt{1 - COS(2 \cdot \alpha)} + d \cdot \sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}}{\sqrt{a^2 \cdot COS(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2}}$$

User

$$\#38:\ -\frac{na\cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{d\cdot\sqrt{(a^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - a^2 + 2\cdot b^2)} - a\cdot nb\cdot\sqrt{(1 - COS(2\cdot\alpha))}}{\sqrt{(a^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - a^2 + 2\cdot b^2)}}$$

Eine Kontrollrechnung zeigt schnell, daß offenbar nur #36 die für die Problemstellung zutreffende Gleichung ist:

Sub(#36)

$$\#39:\ \frac{10\cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{25\cdot\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)} - 1\cdot 15\cdot\sqrt{(1 - COS(2\cdot\alpha))}}{\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)}}$$

#40: $\alpha = 60.5924$ Solve(#39)

Sub(#36)

$$\#41:\ \frac{10\cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{50\cdot\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)} - 1\cdot 15\cdot\sqrt{(1 - COS(2\cdot\alpha))}}{\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)}}$$

#42: $\alpha = 76.5004$ Solve(#41)

Von einer weiteren Interpretation der übrigen Gleichungen bzw. von deren Lösungen soll hier abgesehen werden.

Damit haben wir unsere (teilweise selbst gestellte) Aufgabe vollständig gelöst:

- Wollen wir die Lage von C über die Normalabstände zur Küste und mittels anschließender Abmessung entlang der Küste angeben, so bedienen wir uns Gleichung (1).
- Wollen wir die Lage von C über Winkel angeben, so können wir mit (1) diese ausrechnen oder Gleichung #36 lösen (lassen).

Egal was wir machen, Gleichung (3) wird immer erfüllt sein.

Wir wollen noch ein wenig auf die 'Verwandtschaft' mit dem Brechungsgesetz eingehen. Diese zeigt sich darin, daß wir den linken Teil unserer Skizze „nach oben klappen" - unser Problem also etwas anders ansehen.

Bekanntlich bewegt sich ein Lichtstrahl gerade so, daß er in der kürzestmöglichen Zeit von A nach B kommt. Mathematisch formuliert muß daher

$$t(x)=\frac{1}{v_a}\cdot l_a+\frac{1}{v_b}\cdot l_b$$

minimal werden.

v_a ... Geschwindigkeit im Medium, in dem A liegt.

v_b ... Geschwindigkeit im Medium, in dem B liegt.

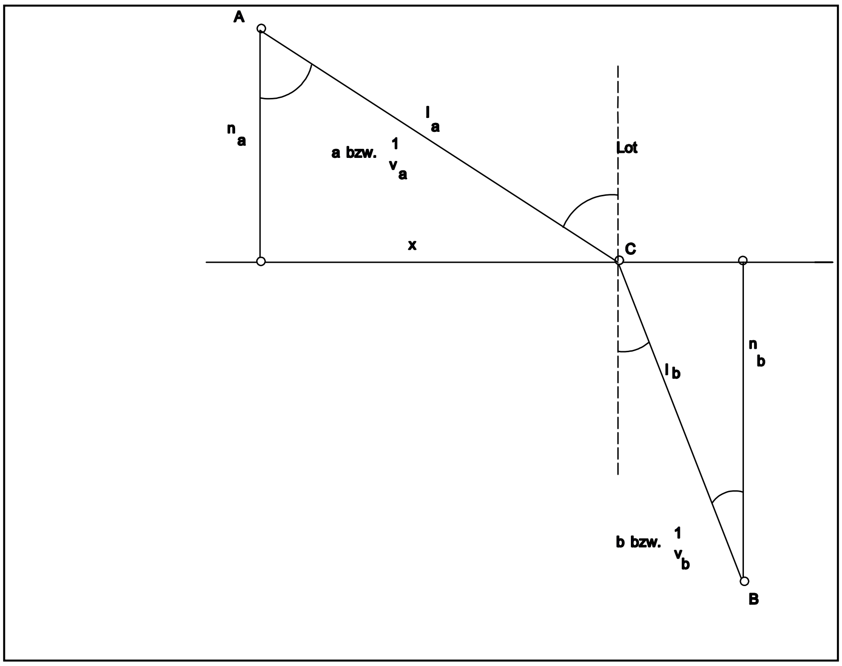


Abb. 5.22: Brechungsgesetz

Wenn wir mit $K(x) = a.l_a + b.l_b$ vergleichen, sehen wir, daß die Leitungskosten *a*, *b* den Kehrwerten der Ausbreitungsgeschwindigkeiten v_a, v_b entsprechen ($a \triangleq 1/v_a$, $b \triangleq 1/v_b$). Gleichung (3) wird damit wirklich zum Brechungsgesetz:

$$\sin\alpha : \sin\beta = b : a = \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_a} = v_a : v_b$$

(Die Sinuswerte des Einfalls- und Brechungswinkels verhalten sich wie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den betreffenden Medien.)

Physikalisch formuliert lautet unser ursprüngliches Problem damit so: „In welche Richtung, auf welchen Punkt der Grenzfläche (z.B. der Wasseroberfläche) muß ich von A aus mit einem Lichtstrahl zielen (wenn *a, b* bzw. v_a, v_b vorgegeben sind), damit ich genau den Punkt B treffe?“

Gleichung #36 beantwortet diese Frage vollständig.

Dieses Beispiel soll zeigen, was wir unter Übungen zur Ausbildung mathematischer Fähigkeiten verstehen: Insbesondere den Versuch Aufgaben, Beispiele und Problemstellungen „breiter“ anzugehen, so daß

- alle drei Phasen (Phase der Mathematisierung, Kalkülphase und Interpretationsphase) durchlaufen werden und
- die Einbettung in einen größeren Problem- und Themenkontext sichtbar wird.

5.3.2. Zur Notwendigkeit des Testens

Da der CAS-unterstützte Unterricht die Möglichkeit bietet, bearbeitete Strukturen jederzeit zur Verfügung zu haben, Parameter, definierte Funktionen und Konstanten zu variieren, erscheint es als natürlich, eine Vielzahl von Untersuchungen, Überprüfungen von Sonderfällen und Fallunterscheidungen durchzuführen. Dies ermöglicht es, die Auswirkungen der Veränderung von Größen mit wenig Zeitaufwand zu beobachten und Vermutungen rasch zu testen. Speziell ist das Testen von 'fertigen' Funktionen, die für spätere Anwendungen erzeugt wurden, notwendig. Dabei sind verschiedene Formen möglich:

- *Selbsttests:* Die Schüler entwickeln ein Modul und überprüfen es anhand von Testbeispielen, die vom Lehrer vorgegeben werden. Der Schüler führt diese Tests durch und erhält Rückmeldungen, ob seine Planung und seine Implementation des Moduls im CAS diesem Testmaterial standhält. Liefern diese Rückmeldungen nicht das gewünschte Ergebnis, muß die Fehlersuche beginnen. Ein neuer Versuch wird gestartet, bis die Tests befriedigend verlaufen.
- *Fremdtests:* Ein Modul, eine Funktion, ein Ablauf wird nicht vom Erzeuger, sondern von einem oder mehreren 'Außenstehenden' überprüft und getestet. Diese Tests können wieder vorgegeben oder vom Tester weiterentwickelt und verfeinert werden. Dieses Arbeiten mit einem fremden Produkt stellt eine Möglichkeit dar, selbst Erzeugtes anderen zu übergeben und Rückmeldungen über die Anwendbarkeit zu erhalten. Solche Fremdtests haben die Aufgabe, Ausgaben zu analysieren und auf Brauchbarkeit zu überprüfen. Bei auftretenden Problemen und Fehlern werden diese genau beschrieben (z.B. Ausdruck und Erklärung) und dem Erzeuger für den eigenen Umgang rückvermittelt. Im Unterricht führt diese Vorgangsweise zum verstärkten Sprechen über Mathematik und zum sozialen Lernen, also eigene Produkte werden fremder Kritik ausgesetzt, um Veränderungen und Modifikationen durchführen zu können. Es handelt sich dabei um ein allgemeines Lernziel, welches mit dem CAS eher unterstützt werden kann als im 'herkömmlichen Unterricht'.
- *Offene Tests:* Diese Art des Testens wird aus unserer Erfahrung seltener sinnvoll eingesetzt werden können, da es für den Schüler sehr schwer ist, eine Serie von Tests so durchzuführen, daß eine systematische Abklärung erfolgt. Meist werden diese Tests 'halb offen' sein müssen. Der Lehrer gibt einen Testrahmen vor, der/die Schüler bewegen sich innerhalb dieses Bereichs möglichst frei. Trotzdem sollten auch Versuche an einzelnen Stellen des Unterrichts zugelassen werden, um diese Qualifikation zu heben oder die Probleme und Zugänge einer gemeinsamen Diskussion zu stellen.
- *Finde bewußt erzeugte Fehler:* Bei dieser Vorgangsweise können bei einer Funktion (bei einem Modul) Ungenauigkeiten, falsche Fallunterscheidungen oder fehlende Auflösungsfälle entweder vom Lehrer eingebaut werden oder konkrete Schülerbeispiele Verwendung finden. Wird der Fehler vom Lehrer angekündigt, zeigt sich aus unserer Erfahrung bei Schülern eine hohe Motivation, diese Unzulänglichkeit aufzufinden. Wieder ist die Darstellung und Beschreibung von Bedeutung.

Der Schüler hat also die Möglichkeit, seine mathematischen Produkte zu überprüfen, muß nicht Fertiges und Vorgegebenes nachträglich reflektieren. Dieser Grad der Unmittelbarkeit erscheint aus lernpsychologischer Sicht von Vorteil. Wieder ist es eine Illusion zu glauben, diese Vorgangsweise könnte immer im Unterricht durchgehalten werden, jedoch sollten spezielle Testphasen in das Unterrichtsgeschehen eingebaut sein.

Beispiel 5.22 Berechnung von Fehlerschranken

Wenn das Definieren von Funktionen den Schülern allgemein bekannt ist, werden, häufig auf Schülerwunsch, bestimmte Tätigkeiten, die oftmals durchgeführt werden, als fertige Funktionen definiert und für die Anwendung bei konkreten Aufgabenstellungen ausgewertet (Modulprinzip). Es kann schon sehr früh begonnen werden auf diese Art einfache Formelsammlungen zu erstellen. Der Lehrer muß jedoch darauf achten, daß jeder Schüler seine Funktionen *selbst erstellt*. Bei der Entwicklung der Fähigkeit, selbst geeignete Funktionen zu definieren, bedarf es jedoch einer geeigneten Planung des Lehrers. Bei den vorgestellten Funktionen handelt es sich um Berechnungsvorgänge beim Ermitteln von Schranken bei Meßfehlern oder Ungenauigkeiten. Es werden die **IF**-Funktion und ein geeignetes Wissen über mehrparametrige Funktionen benötigt. Darüber hinaus müssen die Grundgesetze über Ungleichungen bekannt sein und die untersuchten Schrankenberechnungen allgemein hergeleitet (eventuell auch bewiesen) werden. Bei diesem Funktionen mußten die Schüler zuerst Struktogramme erstellen, mit denen sie die Planung durchführten. Erst danach wird mit dem CAS vom Schüler das Modul erzeugt. Es könnte etwa so aussehen:

```
#1:  "MODUL: UUNGL"                                        User
#2:  "5.C BG/BRG Stockerau (C) 1995"                       User
#3:  InputMode := Word                                     User
#4:  CaseMode := Sensitive                                 User
#5:  "Berechnung von Fehlerschranken! Voraussetzung: Alle
      eingegebenen Schranken müssen positiv sein !!!!!"    User
```

```
#6:  "-----------------KEHRWERT---------------------------"   User
#7:  "Bildet den Kehrwert der Ungleichung a <= x <= b"        User

User
#8: KEHRWERT(a,x,b):=IF[a>b,"Fehler:untere Schranke>obere
                                                    Schranke!",

           IF[a ≤ 0 OR b ≤ 0, "Fehler: Schranke(n) nicht positiv",

               1     1     1
              --- ≤ --- ≤ --- ], "Fehler: Variable(n) eingegeben"]
               b     x     a
```

```
#9:  "-----------------SUBTRAKTION-----------------------"    User
User
#10: "Subtrahiert 2 Ungleichungen der Form a<=x<=b und c<=y<=d"  User
#11: SUB2UNGL(a, x, b, c, y, d) := IF(a > b OR c > d,
      "Fehler: untere Schranke(n) > obere Schranke(n)",
       IF(a ≤ 0 OR b ≤ 0 OR c ≤ 0 OR d ≤ 0,
       "Fehler: Schranke(n) nicht positiv",
       a - d ≤ x - y ≤ b - c),
       "Fehler: Variable(n) eingegeben!")
```

Auch vom Lehrer wird die Funktion SUB2UNGL und KEHRWERT programmiert. Getestet werden dabei z.B. folgende Situationen:

- Die Tauglichkeit bei richtiger Eingabe von Schranken.
- Es wurde auch zugelassen, daß jede Schranke genau gegeben ist.
- Negative Werte können ausgegeben werden.
- Jede untere Schranke muß kleiner oder gleich der oberen Schranke sein.
- Die Schranken sollen keine Variablen sein.
- Die einzugrenzenden Werte dürfen beliebige Terme sein.
- Die Funktionen müssen nacheinander ausgeführt werden können.
- Ausgaben einer Funktion sollen von der nächsten Funktion bearbeitet werden können.

Das vom Lehrer vorgegebene Testblatt:

```
#1:  "-----------------Testbeispiele-------------------" User

#2:  "-------------SUBTRAKTION----!!!!!!!-------------" User

#3:  SUB2UNGL(4, x, 8, 2, y, 3)                           User
#4:  1 ≤ x - y ≤ 6                                    Simp(#3)

#5:  SUB2UNGL(7.5, x, 7.5, 4, y, 6)                       User
      3           7
#6:  --- ≤ x - y ≤ ---                                Simp(#5)
      2           2

#7:  SUB2UNGL(2, x, 5, 4, y, 8)                           User
#8:  -6 < x - y < 1                                   Simp(#7)

#9:  SUB2UNGL(7, x, 5, 4, y, 8)                           User
#10: "Fehler: untere Schranke(n)>obere Schranke(n)"   Simp(#9)

#11: SUB2UNGL(-2, x, 5, 4, y, 8)                          User
#12: "Fehler: Schranke(n) nicht positiv"             Simp(#11)

#13: SUB2UNGL(2, x, 5, 4, y, c)                           User
#14: "Fehler: Variable(n) eingeben!"                 Simp(#13)
```

$$\#15:\ \mathrm{SUB2UNGL}\left[8.4,\ \frac{1}{x},\ 8.5,\ 2.9,\ \frac{1}{y},\ 3\right] \qquad \text{User}$$

$$\#16:\ \frac{27}{5} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < \frac{28}{5} \qquad \text{Simp(\#15)}$$

$$\#17:\ \mathrm{SUB2UNGL}(8.4,\ a + c,\ 8.5,\ 2.9,\ a - c,\ 3) \qquad \text{User}$$

$$\#18:\ \frac{27}{5} < 2\cdot c < \frac{28}{5} \qquad \text{Simp(\#17)}$$

```
#19: "________Vermischung von zwei Modulen!__________"   User
```

$$\#20:\ \mathrm{KEHRWERT}(2,\ c,\ 5) \qquad \text{User}$$

$$\#21:\ \frac{1}{5} \le \frac{1}{c} \le \frac{1}{2} \qquad \text{Simp(\#20)}$$

$$\#22:\ \mathrm{KEHRWERT}(3,\ d,\ 3.4) \qquad \text{User}$$

$$\#23:\ \frac{5}{17} \le \frac{1}{d} \le \frac{1}{3} \qquad \text{Simp(\#22)}$$

$$\#24:\ \mathrm{SUB2UNGL}\left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{17},\ \frac{1}{d},\ \frac{1}{3}\right] \qquad \text{User}$$

$$\#25:\ -\frac{2}{15} < \frac{1}{c} - \frac{1}{d} < \frac{7}{34} \qquad \text{Simp(\#24)}$$

Der Schüler muß nun die von ihm erstellte Funktion SUB2UNG anhand des Lehrertestblatts überprüfen. Bei auftretenden Abweichungen muß der Schüler die Funktion hinterfragen und neu bearbeiten. Nach diesem Selbsttest muß die Funktion von zwei weiteren (neutralen) Schülern überprüft werden. Erst dann wird die neue Funktion in das File UUNGL übernommen.

Der Lehrer hat nach der Erstellung oder Erweiterung dieser Funktionen das Recht (auch die Pflicht?) diese fertigen Module zu hinterfragen. D.h., der Schüler muß in der Anwendungssituation nicht nur über die Funktionalität des Moduls, sondern auch über seinen Aufbau Auskunft geben können.

Dazu ein Beispiel aus einer Schularbeit der neunten Schulstufe. Das Ziel ist die Erklärung des Zustandekommen der Funktion SUB2UNGL aus UUNGL:

Erstelle eine Struktogramm für die definierte Funktion SUB2UNGL(a,x,b,c,y,d), wenn folgende Voraussetzungen gelten sollen: a,b,c,d $\varepsilon\ \mathbb{R}^+$ *. Diese Funktion soll die Schranken für das Subtrahieren der Ungleichungen* $a \le x \le b$ *und* $c \le y \le d$ *ausgeben und dem Benützer Rückmeldungen bei Eingabefehlern ausgeben. Erkläre die richtige Ausgabe bei korrekter Eingabe.*

Derart entwickelte und getestete Module können nun zur Verwendung bei künftigen Aufgaben zur Verfügung stehen. Hier ein Beispiel für die Anwendung der in UUNGL definierten Funktionen. Bei der Bearbeitung wurde das MTH-File UUNGL mit **Transfer Load Utility** versteckt geladen:

Der Preis einer Ware beträgt zu Beginn eines Jahres: $K_1 = 6700,- S$

Der Preis am Ende des Jahres ist festgelegt durch: $K_2 = 7060,- S$

Die Preissteigerungsrate ist gegeben durch:

$$r = \frac{K2 - K1}{K} 1$$

a) *Gib die Fehlerschranken für r an, wenn bei* K_1 *und* K_2 *mit einem Fehler von 2 % gerechnet wird. Welche Aussagekraft haben diese Schranken für Dich?*

b) *Um wieviel % weicht die untere Schranke für r vom Wert ohne Fehler ab?*

5.4. Auswirkungen auf die Prüfungssituation

Auf vielerlei Art und Weise beeinflussen CAS den Mathematikunterricht. Nimmt man CAS als Hilfsmittel und als Bereicherung des Unterrichts ernst, so muß sich dies auch auf die Prüfungssituation auswirken.

Wir gehen hier davon aus, daß durch CAS nicht die bisher als sinnvoll und erstrebenswert angesehenen Ziele des Mathematikunterrichts in Frage gestellt werden. CAS

- ermöglicht aber eine andere Schwerpunktsetzung und

- bietet verbesserte Voraussetzungen zur Erreichung der „alten“ Ziele.

Was sind aber diese „alten“ Ziele? Für Weigand [MNU 46/7,S.428], der sich selbst z.B. auf Bigalke und Fischer beruft, steht folgender Kanon allgemeiner Lernziele außer Frage:

- Probleme lösen lernen

- heuristische Strategien kennenlernen

- Mathematisieren lernen

- Begriffe bilden lernen

- Beweise lernen

- algorithmisches und kalkülhaftes Arbeiten kennenlernen

Spiegeln sich diese Ziele wirklich im Rahmen der Leistungsbeurteilung wider? Aus vielerlei Gründen (etwa aus falsch verstandenem Objektivitätsdenken, der leichteren „Abprüfbarkeit“ halber, leicht zugänglichen - aber oft einseitig an Techniken orientierten - Übungsmaterials wegen) steht hauptsächlich kalkülhaftes Arbeiten im Vordergrund. Völlig unabhängig von der Existenz von CAS erscheint der Prüfungsalltag häufig verzerrt, wenn man das, was verlangt wird, im Spiegel oben aufgezählter allgemeiner Lernziele betrachtet.

Wie bereits im Zusammenhang mit der Thematik des Üben erläutert, wird dieser Zustand aber nun dadurch verschärft, daß eben vieles, was bisher - insbesondere bei schriftlichen Arbeiten - abgefragt wurde, durch den Einsatz (bzw. vielfach bereits durch das bloße Vorhandensein) von CAS an Wert verliert. Und gerade Fertigkeiten im Zusammenhang mit Kalkülen sind davon betroffen. Ob man damit glücklich sein mag oder nicht: Zurecht werden hier in der Diskussion Termumformungen, das Lösen von Gleichungen, Ableitungs- und Integrationsregeln, das Erstellen von Funktionsgraphen erwähnt. Heißt dies aber, daß Kalküle nun wertlos werden, daß wir in Zukunft „Mathematik ohne Rechnen“ betreiben? Oder wie W.Blum es ausdrückte: Computer (insbesondere natürlich CAS) sind "wie Scheinwerfer, sie richten ihr Licht auf die Kalküle und fragen unerbittlich nach ihrem Bildungswert".

Am Beispiel von Schularbeiten soll gezeigt werden, daß Veränderungen hin zu den lange geforderten Zielen möglich sind. Wir plädieren hier für eine evolutionäre Entwicklung, bei der von den bisherigen Formen der Leistungsbeurteilung ausgegangen wird und aus den sich mit CA-Einsatz ergebenden Erfahrungen Vorschläge für künftige Leistungsmessung erarbeitet werden.

5.4.1. Die veränderte Arbeitsweise bei Klassenarbeiten

Bei den ersten CAS-unterstützen Schularbeiten gab es bei verschiedenen Lehrern sehr unterschiedliche Vorgangsweisen:

(1 Jeder Schritt muß mit dem verwendeten Befehl im Heft dokumentiert werden.

(2) Die wichtigen Zwischenschritte und Formeln müssen auch im Arbeitsheft dokumentiert werden, Antworten kommen ausnahmslos in das Heft.

(3) Der Schüler hat das Recht, die Antworten im MTH-File anzugeben. Ein Heft ist unnötig.

(4) Der Schüler benötigt keine Arbeitsdiskette, da bei vorhandenem Netzwerk ein eigenes Userverzeichnis zur Verfügung steht, in welches die Files gespeichert werden. Der Schüler muß sein File selbst ausdrucken.

(5) Der Schüler bestätigt mit dem Abgeben seiner Diskette, daß alle seine Files auf der Diskette vorhanden sind.

(6) Der Lehrer sammelt die Arbeitsdisketten ein und druckt selbst aus.

(7) Der Lehrer benötigt keinen Ausdruck, bei offenen Fragen wird das File geladen.

Jeder Lehrer wird hier sein eigenes Modell finden müssen, das seinen und den Bedürfnissen der Schüler entspricht. Jedoch hat sich gezeigt:

(1) führt zu einer Verdopplung der Arbeit und wird von den Schülern abgelehnt, da sie das Gefühl haben, daß es ein Nachteil ist.

(2) wird von vielen Lehrern verwendet.

(3) Dieses Modell läßt dem Schüler keine freie Wahl der verwendeten Mittel (Taschenrechner, Kopfrechnen, händisches Zeichnen etc.)

(4) führt zu organisatorischen Problemen. Die Netzwerke werden an fast jeder Schule in jeder Stunde benötigt, der Lehrer hat keine Zeit, die Files zu sichern. Andererseits muß ein Original der Arbeit eines Schülers jederzeit vorhanden sein. Die Leistung des Schülers muß dokumentiert sein.

(5) Selbstkontrolle ist ein geeigneter Weg.

(6) Wird von vielen Lehrern - unter Inkaufnahme eines beträchtlichen Mehraufwands bei der Korrektur- durchgeführt. Wenn Graphen beschriftet und erklärt werden sollen, dann ist ein Ausdruck günstig. Dies tritt jedoch meist erst in höheren Schulstufen auf.

(7) Solange DERIVE als Rechenhilfe verwendet wird, ist das ein gangbarer Weg. Jedoch wird bei vielen Beispielen der Zugang, das Modellbilden, die Vorgangsweise zur Problemlösung von Bedeutung sein, so daß ein Ausdruck erforderlich ist. Daneben haben die Erziehungsberechtigten das Recht, die Arbeit ihres Kindes einzusehen.

Dies sind einige Ansätze, die sich im Rahmen des DERIVE-Projekts im Zusammenhang mit schriftlichen Prüfungsarbeiten ergeben haben. Ein Problem, das Damoklesschwert des Stromausfalls, wenn in einem EDV-Saal gearbeitet wird, wird aller Voraussicht beim Arbeiten mit dem CA-Taschenrechner nicht mehr auftreten. Um technischen Problemen mit Geräten handhaben zu können, ist es aber auch in Zukunft unerläßlich, ein oder mehrere Ersatzgeräte zur Verfügung zu haben.

5.4.2. Prüfungssituation in der 7. und 8. Schulstufe - Vergleichstechniken

Abhängig von der Anzahl der Unterrichtsstunden pro Woche im Informatiksaal und der Ausrüstung der Schule mit Computergeräten sind verschiedenste Modelle für Klassenarbeiten durchführbar. Werden in der 7. und 8. Schulstufe nur ein Teil der Mathematikstunden im Computerraum gehalten, so können bei den Schularbeiten auch nur Teile der Lernziele mit Unterstützung durch das CAS überprüft werden. Es ist auch zu beachten, ob die Schüler in der Übungssituation zu Hause das CAS verwenden können.

Unter der Voraussetzung, daß die Schüler eine eigene Lizenz des CAS besitzen und eine Stunde pro Woche im Informatiksaal arbeiten, kann ein Beispiel auch mit Hilfe des CAS bearbeitet werden. Die Auswahl und Gestaltung der Beispiele hängt auch von der Anzahl der vorhandenen Geräte und der räumlichen Beschaffenheit des Computerraumes ab. Üblicherweise wird es bei einer Klassenarbeit bei großer Schülerzahl (25 - 30 Schüler) zwei Gruppen gegeben. Es ist zu beachten, daß die Beispiele unterschiedlich gestaltet werden, so daß die Gefahr eines 'Abschauens' vom Bildschirm nicht möglich ist.

Im Folgenden soll eine Aufgabenstellung für eine Klasse der 7. Schulstufe mit Schwerpunkt Informatik vorgestellt werden. Die Schüler hatten von vier Unterrichtsstunden eine Stunde im Informatiksaal. Als Voraussetzung sei erwähnt, daß ähnliche Beispiele (siehe Kap. 3.5.2) in der Übungssituation durchgeführt wurden. Die Schüler kannten die Flächenformel eines gleichschenkeligen Trapezes noch nicht. Im Computerraum standen 15 Geräte zur Verfügung und die Schüler waren es gewohnt, zu zweit an einem Gerät zu arbeiten und zur Bearbeitung des Beispiels während der Klassenarbeit das Gerät zu wechseln. Jeder Schüler hatte dadurch das Gerät ca. 25 Minuten zur freien Verfügung. Es durfte bzw. mußte jedoch nur dieses Beispiel mit DERIVE bearbeitet werden.

Bespiel 5.23: Prüfungsaufgabe aus einer 7. Schulatufe

Die Angabe des ersten Beispiels der Gruppe A, die Schularbeit hatte vier Aufgabenstellungen, hatte folgenden Wortlaut (die zweite Gruppe hatte eine ähnliche Aufgabe mit anderen Bezeichnungen für die Seiten und die Höhe):

Gegeben ist ein gleichschenkeliges Trapez. Die Parallelseiten heißen f und g, die Schenkel c und die Höhe m.

Gib vier verschiedene Möglichkeiten für die Berechnung des Flächeninhalts A an. Eine Formel für A muß durch Zerlegung des Trapezes in zwei Dreiecke hergeleitet werden!

Zeichne die Vorgangsweise in das Beiblatt ein! Vereinfache Deine gefundene Formel mit DERIVE und überprüfe, ob Deine vereinfachten Formeln übereinstimmen.

Speichere unter dem Namen SA6BSP1 ab !

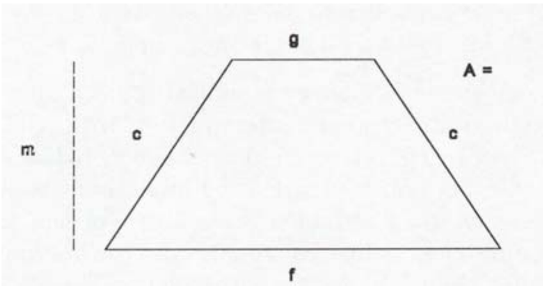


Abb. 5.23: Gleichschenkeliges Trapez

Die Beilage zeigte vier gleichschenkelige Trapeze, bei denen nur die Seiten, jedoch nicht die Höhe beschriftet waren.

Die Lernziele, die bei dieser Aufgabenstellung überprüft wurden, waren mehrschichtig:

(1) Anwendung bereits gelernter und gefestigter Fertigkeiten zur Berechnung von Flächeninhalten einzelner geometrischer Figuren (Dreieck, Rechteck, Parallelogramm, Rhombus, Deltoid).

(2) Zerlegen einer Fläche in Teilflächen oder Vervollständigen von Flächen zu bereits bekannten. Das Arbeiten mit Bleistift und Lineal wird also überprüft.

(3) Zusammensetzen von Teilflächen oder Erkennen der Größe des gesuchten Flächeninhalts, bezogen auf eine über den Flächeninhalt hinausgehende andere geometrische Figur.

(4) Eingabe der gefundenen Formel in ein CAS.

(5) Entwickeln oder Durchführen von Vergleichstechniken, mit denen nachgewiesen werden kann, daß die vier Formeln denselben Flächeninhalt beschreiben.

Für den Einsatz des CAS sind nur die Punkte (4) und (5) von Interesse.

An dieser Schularbeit nahmen 27 Schüler teil. Das Wechseln des Geräts verlief problemlos, nach Beendigung der Bearbeitung des Beispiels hatte der Schüler das File abzuspeichern und aus DERIVE auszusteigen, wodurch das Gerät für den zweiten Schüler frei wurde. Das Aussteigen ist auch deshalb von Bedeutung, weil jeder Schüler eigene Einstellungen verwendet, die mit **Transfer Clear** (also Bildschirm löschen) erhalten bleiben. Dadurch wird die gewohnte Arbeitsumgebung für den zweiten Schüler verändert. Von 108 möglichen Versuchen, den Flächeninhalt durch eine Formel zu bestimmen, waren 97 vorhanden, jedoch 12 falsch. Der häufigste Fehler bei den falschen Ansätzen (im Beiblatt war die Höhe nicht eingezeichnet) war die Verwendung der Schenkelbezeichnung *c* als Höhe. Bei den 11 fehlenden Versuchen war meist das Zerlegen in zwei Dreiecke das Problem.

Die Schüler entwickelten 17 verschiedene Wege zur Erstellung der Formel, die jeweils einen neuen Aspekt betrachteten. Diese Vielfalt ist überraschend, da im Unterricht nie eine solche Anzahl von Zugängen aufgezeigt wurde.

Hervorzuheben ist, daß einige Schüler, erstaunlich für diese Altersstufe, das Trapez in flächengleiche Figuren umwandelten, die nicht mehr durch Abschneiden und Umlegen, sondern durch Erzeugen von flächengleichen Dreiecken, die jedoch nicht mehr dieselbe Gestalt haben, den Flächeninhalt berechneten. Des weiteren gab es

Ansätze, bei denen neue Variablen eingeführt wurden, etwa das Einzeichnen zweier Deltoide mit neuer halber Diagonale oder die Vervollständigung zu einem Dreieck mit neuer Höhe. Die letzen Versuche konnten zwar noch in DERIVE eingegeben, jedoch durch die auftretenden Variablen nicht mehr mit den anderen verglichen werden.

Zu (4): Die lineare Eingabe bei DERIVE (wie auch beim Taschenrechner) zwingt die Schüler, ihre zweidimensional geschriebene Formel in eine korrekte eindimensionale Eingabe zu übersetzen. Sie müssen also die Rechenvorrangregeln genau beachten. Der Vorteil des CAS liegt darin, daß der eingegebene Term zweidimensional im Algebrafenster dargestellt wird (z.B. #2). Es läßt sich nicht nachweisen, wie viele Formeln falsch eingegeben wurden, jedoch traten bei der Auswertung der Schularbeit drei Eingabefehler mit falschen Klammern auf!

Die meisten Schüler verwendeten eine zweidimensionale Darstellung der Formeln und verschiedene Arten von Klammern (runde, eckige, geschwungene), um den Rechenvorrang festzulegen.

Kein Schüler hatte ein Problem mit der Tatsache, daß DERIVE nur runde Klammern für die Eingabe von Termen zuläßt, obwohl die Formeln oft mehrere Typen von Klammern aufwiesen.

Einige Schüler jedoch hatten sich schon auf die lineare Eingabe von DERIVE eingestellt und die Formel bereits auf dem Beiblatt entsprechend dargestellt. Scheinbar beeinflußt das Mittel, mit dem die Bearbeitung durchgeführt wird, die Planung.

Es läßt sich jedoch feststellen, daß die Möglichkeit einer großen Anzahl von unterschiedlichen Darstellungsformen von Termen und die Möglichkeit, diese Darstellungen schnell umzuformen, Schüler flexibel im Umgang mit Termen macht.

Nun einige Beispiele:

Weg 1: Durch ein kongruentes Trapez wird ein Parallelogramm erzeugt - die gesuchte Fläche hat den halben Flächeninhalt dieses Parallelogramms.

#1: $\frac{(f + g)\cdot m}{2}$ User

Wird dieselbe Formel ohne Klammern eingegeben, erscheint der folgende falsche Ausdruck:

#2: $f + \frac{g\cdot m}{2}$ User

Weg 2: Durch Zerteilung des Trapezes in zwei Dreiecke mit gleicher Höhe - die gesuchte Fläche ist die Summe der Dreiecksflächen.

#3: $\frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2}$ User

Weg 3: Ein Dreieck wird auf einer Seite abgeschnitten und durch Umlegen und 'Ankleben' auf der anderen Seite des Trapezes ein Rechteck erzeugt - der gesuchte Flächeninhalt wird durch Länge und Breite festgelegt.

#4: $\frac{f + g}{2}\cdot m$ User

Weg 4: Das Trapez wird in ein Rechteck und zwei (flächengleiche) Dreiecke zerlegt - die Gesamtfläche ist die Summe der drei Flächeninhalte.

$$\#5: \quad g\cdot m + 2\cdot\frac{\frac{f - g}{2}\cdot m}{2} \qquad \text{User}$$

Zu (5): Im Kap.3.5 wurden verschiedene Techniken vorgestellt, die wir als Vergleichstechniken bezeichnen. Die meisten Schüler wählten die Technik des Überführens in gleich aussehende Ausdrücke mit **Factor**, **Expand**, **approX** oder vermischtes Anwenden dieser drei Optionen (12 Schüler).

$$\#6: \quad \frac{m\cdot(f + g)}{2} \qquad \text{Fctr(\#1)}$$

$$\#7: \quad \frac{m\cdot(f + g)}{2} \qquad \text{Fctr(\#3)}$$

$$\#8: \quad \frac{m\cdot(f + g)}{2} \qquad \text{Fctr(\#4)}$$

$$\#9: \quad \frac{m\cdot(f + g)}{2} \qquad \text{Fctr(\#5)}$$

Fünf Schüler verglichen jeweils 2 Formeln durch Gleichsetzen. Mit den DERIVE-Optionen wurde die Gleichheit nachgewiesen.

$$\#10: \quad \frac{(f + g)\cdot m}{2} = \frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2} \qquad \text{User}$$

$$\#11: \quad \frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2} = \frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2} \qquad \text{Expd(\#10)}$$

$$\#12: \quad \frac{f + g}{2}\cdot m = g\cdot m + 2\cdot\frac{\frac{f - g}{2}\cdot m}{2} \qquad \text{User}$$

$$\#13: \quad \frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2} = \frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2} \qquad \text{Expd(\#12)}$$

Eine Schülerin erzeugte eine Gleichungskette. Eine Formel war beim ersten und zweiten Versuch falsch. Die Schülerin schaffte es jedoch, durch Überlegungen am Beiblatt eine geeignete vierte Formel zu finden und die Kette in eine Form a=a=a=a, zu überführen (siehe Kap. 3.1, Beisp. 3.6).

Ein Schüler erzeugte ebenfalls eine Gleichungskette, bearbeitete diese jedoch mit Äquivalenzumformungen soweit, bis 0=0=0=0 entstand.

Drei Schüler definierten die Flächen und verwendeten danach eine Vergleichstechnik.

```
#22: InputMode := Word                                  User
#23: CaseMode := Sensitive                              User
```

$$\#24: \quad A1 := \frac{(f + g)\cdot m}{2} \qquad \text{User}$$

```
                f·m     g·m
#25: A2 :=  ───── + ─────                              User
                 2       2

#26: A1 = A2                                           User

      m·(f + g)     m·(f + g)
#27: ─────────── = ───────────                Fctr(#26)
          2             2
```

Ein Schüler testete seine Formeln mit konkreten Zahlen für *f*, *g* und *m*. Diese Technik ist zwar eine Überprüfung, jedoch kein Nachweis.

```
#28: f := 8                                            User
#29: g := 5.4                                          User
#30: m := 2.3                                          User
#31: 15.41                                       Approx(#1)
#32: 15.41                                       Approx(#3)
#33: 15.41                                       Approx(#4)
#34: 15.41                                       Approx(#5)
```

Die verbleibenden sieben Schüler hatten entweder Zeitprobleme, so daß nicht alle Formeln eingegeben werden konnten, oder falsche Variablenbezeichnungen, so daß der Vergleich scheiterte. Dabei wurden verschiedene der schon angeführten Techniken verwendet.

Kein Schüler verwendete die Technik: Differenz zweier Formeln ist 0.

Zusammenfassung:

Im CAS kann ein Sachverhalt sehr schnell auf die unterschiedlichsten Arten dargestellt werden. Dabei können die Strukturen verschiedener Terme leicht interpretiert werden. Es ist möglich, in mathematischer Sprache über die Umformungsschritte zu sprechen und die Vorgangsweise händisch nachzuvollziehen. Motivationspsychologisch scheint das Hinterfragen von selbst erzeugten Strukturen größeres Interesse hervorzurufen als vorgegebene Sachverhalte. Das CAS ermöglicht eine große Anzahl von Strategien für das Vergleichen von Termen. Unterschiedlich aussehende Terme lassen sich in gleiche überführen, und dadurch läßt sich die Richtigkeit von Lösungsansätzen überprüfen. Das CAS unterstützt die Fähigkeit, Fehler zu erkennen und neue Lösungsversuche zu starten.

5.4.3. Prüfungssituation in der 9. und 10 Schulstufe - Wofür wird das CAS verwendet?

Es gibt noch wenige Forschungen, die das Schülerverhalten untersuchen, wenn diese frei über CAS verfügen können. Verwenden die Schüler immer das CAS? Welche Entscheidungskompetenzen haben sie entwickelt, wenn sie frei wählen können, welche Hilfsmittel werden verwendet? Ist die Zeit des numerischen Taschenechners vorbei? Werden Probleme, die leicht im Kopf zu rechnen sind, immer dem CAS übertragen?

Ein Versuch, eine Antwort auf diese oder ähnlich geartete Fragen zu bekommen, wurde von Zeiler [Zeiler, April 1995] durchgeführt. Es wurde eine sechste Klasse des BG/BRG Stockerau während einer einstündigen Schularbeit beobachtet. Diese Klasse verwendet DERIVE seit der achten Schulstufe durchgehend im Unterricht, in allen Übungssituationen und bei Klassenarbeiten. Jeder Schüler arbeitete also ca. zweieinhalb Jahre mit einem CAS. Im Unterricht wurde der Einsatz des CAS, des Taschenrechners und der "Fußweg" ohne Rechengeräte abwechselnd durchgeführt. Ziel war es, den Schülern bewußt zu machen, daß das verwendete Hilfsmittel von der Aufgabenstellung abhängig ist. Es wird also nicht Mathematik betrieben, um ein CAS verwenden zu können, sondern ein CAS wird verwendet, wenn es bei der Lösung mathematischer Probleme hilft. Im Unterricht sollte das CAS immer mehr in den Hintergrund treten, also selbst nicht Thema sein, und der mathematische Inhalt im Zentrum der Betrachtungen stehen. Der Schwerpunkt der bei dieser einstündigen Arbeit zur Überprüfung gelangten Lernziele stammt aus dem Themenbereich Trigonometrie, und es wurde ein Zugang zum Anlegen von Kapitalien befragt. Die Schüler waren zu diesem Zeitpunkt damit beschäftigt, ein eigenes UTILITY-File für häufig durchgeführte Berechnungen anzulegen. Zum Zeitpunkt der Schularbeit waren die Funktionen zum Umwandeln von Polarkoordinaten in cartesische Koordinaten und umgekehrt bereits ferstiggestellt und getestet, jedoch Auflösungsfunktionen im allgemeinen Dreieck waren nur von einigen Schülern fertig definiert. Den Schülern war freigestellt, ob sie das UTILITY-File UTRIGO (Auszug siehe Bearbeitung Beispiel 4) verwenden wollten oder nicht. Fehler die durch ungenügend definierte Funktionen auftreten konnten, wurden bei der Schularbeit als Fehler gewertet. Kurzum, 8 Schüler hatten dieses UTILITY-File vor der Schularbeit abgegeben und hätten es bei der Schularbeit verwenden können.

Beispiel 5.24: Prüfungsarbeit einer 10.Schulstufe

Die untersuchte Schularbeit war einstündig und fand am 18.1.1995 im Computerraum des Gymnasiums statt.

(Aufgabenstellung der Gruppe Gruppe B)

---

3. Schularbeit 6.C/GRubBdI 18.1.1995 Gruppe B Name: ....

1) a) Leite eine Formel zur Berechnung des Winkelmaßes α zwischen zwei Vektoren bei gegebenen Vektoren allgemein her (Skizze und Herleitung)!

1) b) Wie hängt das Vorzeichen des skalaren Produkts zweier Vektoren mit dem Winkelmaß dieser beiden Vektoren zusammen?

1) c) Gegeben sind zwei einander schneidende Geraden a und b.

   Berechne den Winkel, den diese beiden Geraden einschließen!

2) a) In einem Dreieck sind 2 Seiten (a,b) und ein Winkel α, der der Seite a gegenüber liegt, gegeben:

   Beschreibe genau alle Anwendungsfälle des Sinussatzes, die bei der Berechnung des Winkels β auftreten können und begründe die Anzahl der Lösungen durch genaue mathematische Beziehungen!

2) b) Untersuche und begründe möglichst schnell, ob bei den gegebenen Dreiecken eine, keine oder zwei Lösungen auftreten können (α liegt a und γ der Seite c gegenüber)!

   α) a = 7, b = 10, $\alpha = 40^0$

   β) b = 4, c = 510, $\gamma = 154^0$

   γ) b = 9, c = 8, $\gamma = 100^0$

3) Zwillingen wird durch deren Patenonkel jeweils bis zum 12. Lebensjahr nach einem Plan Geld angelegt!

   1. Patenonkel: Legt ab dem Anfang des vierten Lebensjahres sieben Jahre hindurch 45000 Schilling an.

   2. Patenonkel: Legt ab der Geburt jedes Jahr 25000 Schilling an. Dieser Betrag wird zwölf mal eingezahlt!

   Wieviel Geld hat jeder Patenonkel bis zur Beendigung des zwölften Lebensjahres der Zwillinge angelegt, wenn man einen gleichbleibenden Zinssatz von 8% annimmt?

4) In einem Raum eines Hauses muß nachträglich eine Abflußleitung verlegt werden. Die Auslaufstelle P am Boden des Raums hat von einer Ecke des Raums aus folgende Lage: Entlang der Mauerwand 4 m und in den Raum 5 m (siehe Skizze).

   Aus baulichen Gegebenheiten kann die Leitung von der Ecke des Raums nicht direkt gelegt werden, sondern es müssen zwei Leitungsrohre mit den Längen a = 4 m und b = 3 m verwendet werden. Das längere Leitungsrohr wird von der Ecke aus verlegt, das kürzere an dieses angefügt und bis zur Abflußstelle verlegt.

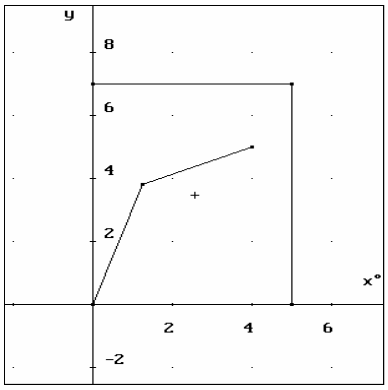
   a) Berechne den Winkel α, den die beiden Leitungsrohre miteinander einschließen.

   b) Berechne die Stelle K (in cartesischen Koordinaten) an der sich der Knick befindet.

   (Bei der Berechnung wird die Tiefe und der Neigungswinkel der verlegten Abflußrohre nicht berücksichtigt.)

5 Zusatzpunkte: Definiere eine Funktion KNICKSTELLE, die für eine beliebige Abflußstelle P und beliebige Leitungslängen a und b die cartesischen Koordinaten der Knickstelle der Leitung ausgibt. Teste diese Funktion am Beispiel 4).

SKIZZE ZU BEISPIEL 4) GRUPPE B: Raum mit verlegten Abflußleitungen



Beschriftung:

P = (4,5) ... Auslaufstelle

K .... Knickstelle

α .... Winkel, den die Leitungen einschließen

0 .... Ecke des Raumes, von dem die Leitung weggeht

Jeder der 18 teilnehmenden Schüler hatte einen eigenen Computer zur Verfügung.
Bei der Untersuchung wurden drei Schwerpunkte gesetzt:

(1) Wann und wofür wird DERIVE eingesetzt?

(2) Welche Rechenhilfe wird bevorzugt: Taschenrechner oder DERIVE?

(3) Wurde das mitgebrachte Modul verwendet? Wenn ja wofür?

Zu (1):

Hier wurden drei Kategorien bei der Verwendung von DERIVE untersucht:

- Verwendung von DERIVE beim Modellbilden
- Verwendung von DERIVE als Testinstrument
- Verwendung von DERIVE als Rechenhilfe

Die Auswertung ergab folgendes Bild:

Schularbeits-beispiele Gruppe B	DERIVE zum Modellbilden verwendet	DERIVE als Testinstrument eingesetzt	DERIVE als Rechenhilfe eingesetzt
1a			
1b			
1c		1	8
2a			
2b	1	6	1
3	1		7
4a	3		5
4b	4		5
Summe Gruppe A	9	7	26
Summe beider Gruppen	14	15	50

Natürlich ist diese Verteilung abhängig von den Lernzielen, die bei den Aufgabenstellungen überprüft werden sollen. Acht Schüler haben mehr oder weniger erfolgreich das CAS als Testinstrument und für Modellbildungsvorgänge verwendet. Eine Schülerin, die sonst das CAS fast nicht verwendet hat, hat den gefragten Beweis mit DERIVE vollständig gelöst. Ihr Argument war, daß sie keine Zeit mehr hatte, das Beispiel händisch zu lösen. Ein Drittel der Schüler verwendete DERIVE für das Modellbilden, d.h., sie haben die Beantwortung der Aufgabenstellung mit dem CAS strukturiert und gelöst.

Wie schon erwähnt ist der Einsatz eines Hilfsmittels von der Problemstellung abhängig. Bei Beweisen, Herleitungen, Beschreibungen, Analysen und Erklärungen ist die Verwendung eines CAS eher unüblich (z.B. Beispiele der Gruppe A: 1a, Beispiele der Gruppe B: 1a, 1b, 2a). Fast alle Schüler haben die oben angegebenen Aufgaben 'händisch' bearbeitet.

Zu (2): Der Taschenrechner (nicht programmierbar) wurde in dieser Klasse in der 7. Schulstufe eingeführt, DERIVE in der 8.. Diese Untersuchung ist natürlich wegen der geringen Stichprobe nicht repräsentativ, doch gibt sie einen interessanten Einblick.

Schularbeits-beipiele Gruppe B	DERIVE als Rechenhilfe eingesetzt	Taschenrechner als Rechenhilfe eingesetzt
1a		
1b		
1c	8	1
2a		
2b	1	2
3	7	2
4a	5	
4b	5	
Summe	26	5
Summe beider Gruppen	50	24

Es wurden also als Hilfsmittel zu 68 % DERIVE und der Taschenrechner zu 32 % verwendet. 10 Schüler (55%) haben ausschließlich DERIVE für Nebenrechnungen verwendet, drei nur den Taschenrechner und fünf (27,5%) haben den Gebrauch beider Rechenhilfen bevorzugt.

Zu (3): Nur fünf Schüler verwendeten das UTILITY-File. Nicht nur "Sehr gute" Schüler verwendeten die vordefinierten Funktionen, sondern ein Schüler bekam die Note "Befriedigend", eine weiterer die Note "Genügend". Drei Schüler verwendeten ihre Module um ein neues zu erstellen, und einer verwendete es als Testinstrument beim Beipiel 2b der Gruppe B.

Die Zusatzpunkte galten für Schüler, die die 'normalen' Aufgabenstellungen bereits gelöst hatten. Von 5 Schülern, die die Zusatzaufgabe zu lösen versuchten, haben drei das alte mitgebrachte Modul zur Erstellung der gefragten Funktion 'Knickstelle' verwendet. Bei einem Schüler vebesserte sich die Note von "Gut" auf "Sehr gut". Sonst nahmen die erarbeiteten Punkte auf die Note keinen Einfluß.

Eine Bearbeitung des Beispieles 4: (Ein MTH-File ohne verwendetes Modul mit Zusatzpunkten)

```
#1:  Angle := Degree                                            User
#2:  "Ingo Nader"                                               User
#3:  "4"                                                        User
#4:  p := [5, 3]                                                User
#5:  c := |p|                                                   User
#6:  a := 4                                                     User
#7:  b := 3                                                     User
```

$$\#8:\quad \alpha := \mathrm{ACOS}\left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cdot b\cdot c}\right] \qquad \text{User}$$

```
#9:  α := 39.4892                                         Approx(#8')
```

$$\#10:\quad ß := \mathrm{ATAN}\left[\frac{p_2}{p_1}\right] \qquad \text{User}$$

```
#11: ß := 30.9637                                        Approx(#10')
```

$$\#12:\quad \varepsilon := \mathrm{ACOS}\left[\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\cdot a\cdot c}\right] \qquad \text{User}$$

```
#13: ε := 28.4863                                        Approx(#12')
#14: k := a·[COS(ε + ß), SIN(ε + ß)]                             User
#15: k := [2.03315, 3.44474]                             Approx(#14')
#16: InputMode := Word                                           User
User
```

$$\#17:\quad \mathrm{KNICKSTELLE}(p, a, b) := a\cdot\left[\mathrm{COS}\left[\mathrm{ATAN}\left[\frac{p_2}{p_1}\right] + \mathrm{ACOS}\left[\frac{a^2 + |p|^2 - b^2}{2\cdot a\cdot |p|}\right]\right], \mathrm{SIN}\left[\mathrm{ATAN}\left[\frac{p_2}{p_1}\right] + \mathrm{ACOS}\left[\frac{a^2 + |p|^2 - b^2}{2\cdot a\cdot |p|}\right]\right]\right]$$

```
#18: KNICKSTELLE([5, 3], 4, 3)                                   User
#19: [2.03315, 3.44474]                                   Approx(#18)
#20: "Nur für 1. Quadranten getestet."                           User
#21: "Schritte:"                                                 User
#22: "1.) Winkel von a ausrechnen (= ß + ε)"                     User
User

#23: "2.) Mithilfe des Winkels und a die Cart.Koordinaten
 ausrechnen (nach altbewährter Formel)"
```

Schülermeinungen zu dieser Schularbeit [Zeiler.D, 1995, S.113]:

"Bei einem Gruppengespräch nach der Schularbeit meinten die Schüler/innen, daß die Schularbeit nicht zu lang und nicht zu schwer war. Als Begründung für schlechte Noten wurde angegeben, daß zu wenig gelernt worden war. Der Einsatz von DERIVE war abhängig von der Vorbereitung für die Schularbeit zu Hause. Manche Schüler/innen haben bereits daheim gewisse Beispiele gar nicht mit DERIVE zu lösen versucht. Die Schüler/innen sagen, daß sie je nach Thenma abwägen, welches Hilfsmittel eingesetzt wird. Einige Schüler meinen, daß beim Kapitel Trigonometrie DERIVE nicht so gerne verwendet wird. Die These, daß der Computer von 'schlechteren' Schüler/innen nicht so häufig eingesetzt wird, konnte das Gespräch nicht bestätigen. Zwei widersprüchliche Aussagen standen gegenüber. Eine Schülerin erklärte, daß ihr der Umgang mit dem PC wirklich zu kompliziert ist und sie sich deshalb meist ohne wohler fühle. Ein 'schlechter' Schüler beschrieb das computerunterstützte Arbeiten als Vereinfachung, die er nützt."

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Korrektur der Arbeiten mehr Zeit benötigt als bei herkömmlichen Schularbeiten. Die Anzahl der Lösungswege ist größer geworden. Die Kreativität, auch in der Prüfungssituation, nimmt durch die technische Unterstützung auch andere Ausmaße zu.

5.4.4. Prüfungssituation in der 11. und 12. Schulstufe - Veränderung der Aufgabenstellung?

Die im Folgenden dargestellte schriftliche Reifeprüfung wurde am BG Amstetten unter Verwendung von CAS in einer Klasse geschrieben, die seit etwa der Mitte der 11.Schulstufe bis zur Matura (Ende der 12.Schulstufe) DERIVE in jeder Unterrichtssituation zur Verfügung hatte. Bis zu dieser Abschlußprüfung hatte die Klasse bereits 5 Schularbeiten mit DERIVE-Einsatz absolviert und dabei entsprechende Erfahrungen gesammelt. Durch die Verwendung von DERIVE wurde es möglich, die Prüfungsarbeit - die ansonsten den Rahmenbedingungen einer „herkömmlichen" Matura entsprach -, stärker anwendungsorientiert zu gestalten und Aufgabenstellungen aus der Systemdynamik zu integrieren (Aufgabe 4).

Den Schülern wurde es - so wie bei den vorangegangenen Schularbeiten -, wenn nicht extra in einem Beispiel vermerkt, freigestellt, eine Aufgabe mit oder ohne DERIVE-Unterstützung zu behandeln. Des weiteren wurde die Arbeitsweise freigestellt: Einsatz des CAS als 'Taschenrechner' mit entsprechenden Hinweisen in der handschriftlichen Bearbeitung, Bearbeitung mit dem System, Ausdruck und anschließender Kommentierung und schließlich vollständige Bearbeitung mit DERIVE inklusive Kommentierung im File mit anschließendem Ausdruck.

Organisatorische Voraussetzungen: Jedem der 16 Schüler (1 Schülerin und 15 Schüler) und dem Lehrer wurde im Rahmen des österreichischen DERIVE-Projekts ein Mini-Notebook (Olivetti Quaderno) zur Verfügung gestellt. Die Abschlußarbeit wurde aber unter Verwendung von 14 wesentlich leistungsfähigeren Laptops (486, 25MHz) geschrieben, mit deren Umgang die Schülern aus dem Informatikunterricht vertraut waren. Zwei Schüler arbeiteten auf einen Desktop-Gerät mit vergleichbarer Leistung. Vor der Arbeit wurden alle Geräte getestet und neu formatiert und nur mit den entsprechenden Programmen und vereinbarten Utiltiy-Files zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Systemdynamik (vgl. Kap. 4.1.3, Bsp. 4.12) versehen. Die Berabeitungszeit umfaßte vier Unterrichtsstunden (= 4 x 50 Minuten). Dabei befanden sich je acht Schüler in zwei aneinandergrenzenden Räumen. In jedem Raum stand je ein Drucker und ein Reservegerät zur Verfügung. Lediglich beim 4. Beispiel war ein Ausdruck gefordert. Von der Schülern wurden aber auch bei anderen Beispielen Ausdrucke angefertigt. Dennoch kam es zu keinen Engpässen beim Drucken.

Beispiel 5.25: Aufgabenstellung einer schriftlichen Reifeprüfung

Beispieltext der schriftlichen Reifeprüfung (schriftlicher Teil des Abiturs)

1) a) Als Folge der Transitproblematik ist ein rascher Ausbau der bestehenden Bahnverbindungen erforderlich. Dazu soll durch einen Bergrücken ein Tunnel gebohrt werden. Tunneleingang A und -ausgang B befinden sich in gleicher Seehöhe. Von einem Punkt P am Bergrücken ist A unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 25{,}5°$, B unter einem Tiefenwinkel $ß = 31{,}3°$ sichtbar, für $\triangle$APB wird $\gamma = 118{,}4°$ gemessen. Die Seehöhe des Vermessungspunkts P ist um h = 460m größer als die von A und B.

   Gib eine Formel zur Berechnung der Tunnellänge $\overline{AB}$ 39 in Abhängigkeit von h,α,ß und γ an und berechne sie!

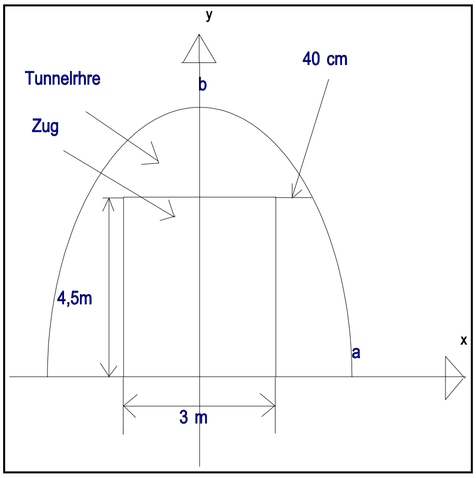
   b) Genau senkrecht über dem geplanten Tunnel soll eine Probebohrung bis zum Tunnelniveau durchgeführt werden, um Aufschluß über das vorhandene Gestein zu erlangen. Die Bohrstelle ist vom Vermessungspunkt P aus unter einem Tiefenwinkel $\mu = 27.1°$ zu sehen. Nähert man sich bei gleichbleibender Höhe um d = 100m, so erscheint diese Stelle unter einem Tiefenwinkel von $v = 30{,}6°$. Wie tief muß man bohren, um bis zum Tunnelniveau vorzustoßen?

c) Der Querschnitt der Tunnelröhre läßt sich durch eine Ellipse beschreiben, die entlang einer Hauptachse abgeschnitten ist. Die Röhre soll so geplant werden, daß bei kleinster Querschnittsfläche Züge bis 3m Breite und bis 4.5m Höhe passieren können und in Höhe der Zugoberkante zur Wand mindestens 40cm Abstand bleiben. Gib die Breite des Tunnels, seine größte Höhe und die minimale Querschnittsfläche an!

2) Die Gleichung (v in m/s)

$$v(t)=\begin{cases} \dfrac{3t^2}{80}-\dfrac{t^3}{1600}\ , & für 0 \le t \le 40 \\ 10 - 10.\cos(\dfrac{t\pi}{40})\ , & für 40 < t \le t_{\max} \end{cases}$$

beschreibt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf bei einer Fahrt mit der Wiener U-Bahnlinie 2 zwischen den Stationen Schottenring und Universität. (Zur Zeit tmax ist die U-Bahngarnitur in der Station Universität wieder zum Stillstand gekommen).



a) Gib eine Funktion s(t) an, die den zwischen den beiden Stationen zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Welcher Weg wird zwischen den beiden Stationen zurückgelegt?

b) Wann erreicht die die U-Bahngarnitur ihre größte Geschwindigkeit? Wie groß ist sie? Mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) fährt der U-Bahnzug in den 92m langen Haltestellenbereich bei der Universität ein?

c) Wie lange dauert die Beschleunigungsphase? Welche Kraftfunktion während der Beschleunigungsphase muß dabei aufgewendet werden, wenn angenommen wird, daß die U-Bahngarnitur aus 3 Doppeltriebwägen mit einer Masse von je 52600kg besteht? Kann man während der Fahrt ungestört Zeitung lesen oder tritt ein Ruck auf? Was ist ein Ruck? Interpretiere im mathematischen Modell.

d) Zwischen den Stationen Schottentor und Schottenring ist die erreichte Höchstgeschwindigkeit um 25% geringer (als bei b). Gib mit Hilfe eines Polynoms 4. Grads die Geschwindigkeitsfunktion derart an, daß bei gleicher Fahrzeit wie oben wieder zur gleichen Zeit die Höchstgeschwindigkeit erreicht wird.

Bonusaufgabe

(e) Die beiden ursprünglichen Funktionen, die den Geschwindigkeitsverlauf beschreiben, weisen im Intervall [0s;40s] eine merkwürdige Übereinstimmung auf. Ist das Polynom 3. Grads das Taylorsche Näherungspolynom 3. Grads? Was versteht man unter einem Taylorschen Näherungspolynom n.Grades?

Wie weit unterscheiden sich in diesem Intervall die Funktionswerte (der beiden Teile der angegebenen Geschwindigkeitsfunktion) höchstens? An welchen Stellen ist der Fehler am größten? (Verwende bei Derive die Einstellung Mode: Approximate.)

---

3) Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der Autolenker, die während der Fahrt keinen Sicherheitsgurt tragen, 15% (Diese Fahrer werden im Folgenden als "Gurtmuffel" bezeichnet). Man darf annehmen, daß die Autofahrer unabhängig voneinander den Gurt anlegen oder nicht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 12 vorbeifahrenden Autos a1) genau vier, a2) mindestens zwei von einem Gurtmuffel gelenkt werden?

b) Wie viele Autos muß man überprüfen, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gurtmuffel zu finden?

c) Unter 3000 überprüften Autolenkern hat man 375 Gurtmuffel entdeckt. Schätze daraus den relativen Anteil der Gurtmuffel mit 95%iger Sicherheit.

d) Um den Anteil der Gurtmuffel zu senken, wird eine groß angelegte Aufklärungskampagne des Kuratoriums für Verkehrssicherheit durchgeführt. Ein pessimistischer Gendarm ist der Meinung, daß selbst solche Anstrengungen nicht zu einer Verbesserung der Situation führen.

Er überprüft nach Ablauf der Kampagne 100 Autolenker und stellt fest, daß 93 angeschnallt sind. Kann er daraufhin seine Nullhypothese H0: "Nur 85% der Autolenker sind angegurtet" mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% verwerfen? Ab wie vielen unter 100 angeschnallten Lenkern läßt sich überhaupt die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% verwerfen?

4) Ein Biotop wird von Katzen und Mäusen bevölkert.

a) Grundmodell:

Die Zahl der Mäuse ist bestimmt durch ihren natürlichen Zuwachs von jährlich 18% und ihre Abnahme durch ihre Feinde, die Katzen. Diese Abnahme ist proportional zur Anzahl der Katzen und zur Anzahl der Mäuse (Proportionalitätsfaktor b=0.005). Der Zuwachs der Katzen ist proportional zur Zahl der Mäuse und zur Zahl der Katzen (Proportionalitätsfaktor d=0.0001). Die natürliche jährliche Abnahme betrage 15%. Anfangs gibt es 1500 Mäuse und 25 Katzen im betrachteten Biotop.

Stelle die entstrechenden Differenzengleichungen auf und untersuche die Langzeitentwicklung der Mäuse- und Katzenpopulation. Führe mittels Derive eine Simulation durch (mind. 50 Schritte). Beschreibe die Entwicklung beider Populationenen.

b) Verbessertes Modell:

Da jede Katze ein bestimmtes Revier beansprucht, können im Biotop maximal 120 Katzen leben. Daher ist der Zuwachs der Katzen proportional zur Zahl der Mäuse und zum vorhandenen Wachstumspotential.

Schreibe wieder die entsprechenden Differenzengleichungen an und führe wie oben eine Simulation aus. Beschreibe wieder die Langzeitentwicklungen beider Populationen.

Stellt sich ein Gleichgewicht ein? Wenn ja, berechne es und erkläre, warum es sich einstellt.

c) Gib eine Darstellung der Populationsentwicklungen des Grund- und des verbesserten Modells in einem Phasendiagramm. (Ordinate: Mäusepopulation, Abszisse: Katzenpopulation)

Was bedeuten im Phasendiagramm geschlossene Kurven, wie sind spiralförmige nach innen laufende Gebilde, wie nach außen laufende Spiralen zu interpretieren?

[Erstelle eine Grafik mit beiden Phasendiagrammen und drucke.]

[Speichere deine Arbeiten in Derive zu diesem Beispiel unter KATZMAUS.MTH]

Hinweis: Zur Bearbeitung dieser Beispiele steht Derive als Hilfsmittel zur Verfügung. Dabei sind alle Ergebnisse und nichttrivialen Zwischenergebnisse niederzuschreiben oder auszudrucken. Alle mit Derive ausgeführten Umformungen sind so ausführlich zu beschreiben, daß diese einwandfrei nachvollzogen werden können.

---

(1) Wie kamen die Schüler mit dem - im Vergleich zu traditionellen Klausuraufgabenstellungen - doch deutlich größeren Umfang der Arbeit zurecht?

Die veränderte Rolle der Kalküle (vgl. 5.3. bzw. Einleitung zu diesem Kapitel) läßt den Umfang der Arbeiten ansteigen. Dies darf natürlich nicht dazu führen, daß die Schüler überfordert werden. Vielmehr hat dies im Einklang mit ihren mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit dem CAS zu erfolgen. Es ist aber sicher eine Verlagerung von handschriftlichen Ferigkeiten zu Strategiefertigkeiten zu beobachten. (Wobei dies natürlich aufgrund der wenigen zur Verfügung stehenden Klausur- und Klassenarbeiten, die bisher mit CA-Einsatz geschrieben werden, nur mit Vorsicht gesagt werden kann).

Ein typisches Beispiel für diese Verschiebung vom Operativen hin zum Mathematisieren in dieser Arbeit ist Aufgabe 2d), die von den Schülern etwa so gelöst wurde:

#1: $V(t) := a4 \cdot t^4 + a3 \cdot t^3 + a2 \cdot t^2 + a1 \cdot t + a0$ User

#2: $A(t) := \frac{d}{dt} V(t)$ User

#3: $A(t) := a1 + 2 \cdot a2 \cdot t + 3 \cdot a3 \cdot t^2 + 4 \cdot a4 \cdot t^3$ Simp(#33')

User
#4: [V(0) = 0, V(40) = 15, V(80) = 0, A(0) = 0, A(40) = 0]

Solve(#35)
#5: $\left[a0 = 0,\ a1 = 0,\ a2 = \frac{3}{80},\ a3 = -\frac{3}{3200},\ a4 = \frac{3}{512000}\right]$

Hier zeigt sich auch, daß im Vergleich zu einer handschriftlichen Ausführung die „Delegation der Berechnung" ans CAS keineswegs mit einem Verlust mathematischer Fähigkeiten einhergehen muß. Im Gegenteil, ein kompetenter Einsatz von CA ist erst bei entsprechenden mathematischen Fähigkeiten möglich.

Zur Beantwortung der in (1) gestellten Frage kann hier nur angefügt werden, daß in der vorliegenden Arbeit nur zwei Schüler echte Zeitprobleme hatten, die aber ohne CA sicher noch größer gewesen wären.

(2) Zeigen die Schüler eine anderes Problemlöseverhalten bei herkömmlichen Beispielstellungen?

Ja, wenn es darum geht mit Funktionen oder Gleichungen zu arbeiten, wird fast immer zuerst ein grafischer Zugang gewählt, um sich einen besseren Überblick zur Aufgabenstellung zu verschaffen. Zur Möglichkeit, nichtlineare Gleichungen grafisch zu lösen, wird wesentlich häufiger gegriffen. Bei Aufgaben, bei denen dem Schüler keine entsprechenden Techniken im CAS bekannt sind (wie dies z.B. bei Aufgabe 1a, b der Fall war), wird allerdings eher die vertraute handschrifltiche Berechnung durchgeführt. Das CAS wird dann höchstens als Rechenhilfe eingesetzt.

(3) Wie gestaltet sich die Nutzung der im Lauf der Bearbeitung der entsprechenden Themengebiete erstellten Module?

Die Nutzung von Modulen gestaltet sich in der Prüfungssituation dann erfolgreich und problemlos, wenn sie von den Schülern, am besten selbst entwickelt, im Unterricht bereits intensiv verwendet und getestet wurden. Probleme hatte ein Schüler, der die Entwicklungsphase des (in Kap. 4.3 vorgestellten Moduls zur Systemdynamik) nicht miterlebt und nachträglich zu wenig Erfahrung damit aufgebaut hatte.

Beispiel 4) gestaltete sich unter Einsatz dieses Moduls etwa folgendermaßen:

ad α) Grundmodell:

geg.: $x_0 = 1500$ / $y_0=25$ / a=0,18 / b=0,005 / c = 0,15 / d = 0,0001

Iterationsgleichungen:

Zahl der Beutetiere $x_{n+1} = x_n + r_1(x_n, y_n) = x_n + a \cdot x_n - b \cdot x_n \cdot y_n$

Zahl der Räuber $y_{n+1} = y_n + r_2(x_n, y_n) = x_n - c \cdot y_n + d \cdot x_n \cdot y_n$

Simulation:

```
#1: "Integraphen für Systeme von Differenzengleichungen"
#2: SYSTEM_2(r1, r2, y1, y2, y10, y20, t0, δt, sz ):=
    ITERATES([t + δt, y1 + r1·δt, y2 + r2·δt],
                             [t, y1, y2],[t0, y10, y02], n)

#3: "Räuberpopulation mit einer Beutepopulation -
                                                 Grundmodell"
#4: r1 := 0.18·x - 0.005·x·y

#5: r2 := - 0.15·y + 0.0001·x·y

#6: SYSTEM2(r1,r2,x,y, 1500, 25, 0, 1, 80)

    ZWEISPALTEN(m, s1, s2) := ┌m`   , m`   ┐`
#7:                           └  s1     s2 ┘
```

- Mäuse- und Katzenpopulation schwanken mit steigender Amplitude (vgl. dazu Abschnitt 4.3, Beisp. 4.15).

  Bemerkung: Als numerisches Verfahren wurde lediglich das EULER-CAUCHY-Verfahren verwendet, was insbesondere bei α) als problematisch anzusehen ist. Es muß aber angemerkt werden, daß der Sinn dieses Beispiels hauptsächlich im Modellbilden lag.
- Die Maxima der Katzenpopulation sind gegenüber den Maxima der Mäusepopulation verschoben, sie „hinken nach".
- Die „Wellenlänge" liegt bei ca. 40 Zeitschritten.

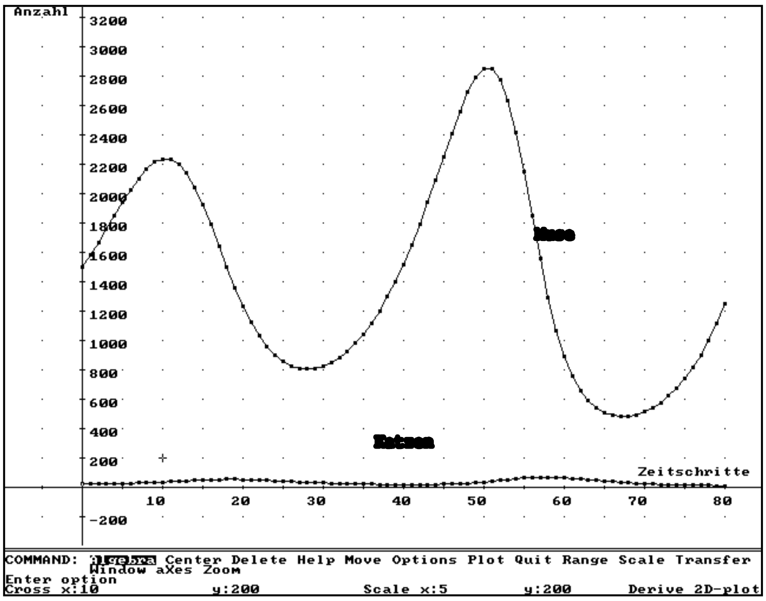


Abb. 5.24: Zeitliche Entwicklung, Grundmodell

ad β) Verbessertes Modell:

Iterationsgleichungen:

Zahl der Beutetiere $x_{n+1} = x_n + r_1(x_n, y_n) = x_n + a\cdot x_n - b\cdot x_n\cdot y_n$

Zahl der Räuber $y_{n+1} = y_n + r_2(x_n, y_n) = x_n - c\cdot y_n + d\cdot x_n\cdot(g - y_n)$

Simulation:

```
#8:  "Räuberpopulation mit einer Beutepopulation -
                                        verbessertes Modell"

#9:  r1 := 0.18·x - 0.005·x·y

#10: r2:= - 0.15·y + 0.0001·x·(120 - y)

#11: SYSTEM2(r1, r2, x, y, 0, 1500, 25, 1, 80)
```

- Es stellt sich nach ca. 40 Schritten ein Gleichgewichtszustand ein.
- Die Mäusepopulation sinkt anfangs stark, die Katzenpopulation nimmt leicht zu.

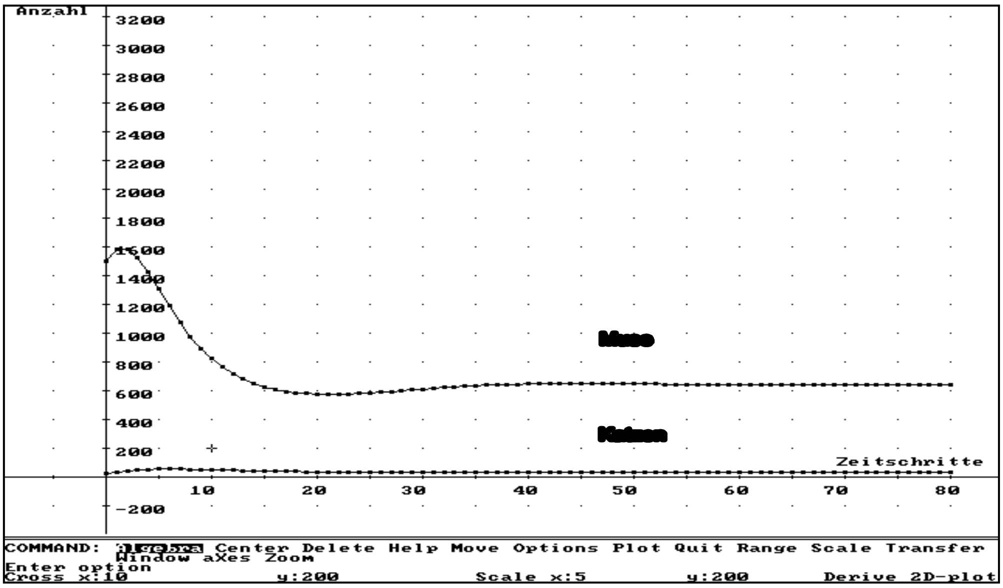


Abb. 5.25: Verbessertes Modell, zeitliche Entwicklung

Berechnung des Gleichgewichtszustands (Fixpunkts):

Das Gleichgewicht ist dann erreicht, wenn

$$x_{n+1} - x_n = 0 \Rightarrow a \cdot x_n - b \cdot x_n \cdot y_n = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{a}{b} = 36$$

$$y_{n+1} - y_n = 0 \Rightarrow -c \cdot y_n + d \cdot x_n \cdot (g - y_n) = 0 \Rightarrow \bar{x} \approx 643$$

Im Biotop herrscht dann ein Katzen-Mäuse-Gleichgewicht, wenn es von ca. 36 Katzen und 643 Mäusen bevölkert wird.

ad γ) Phasendiagramm:

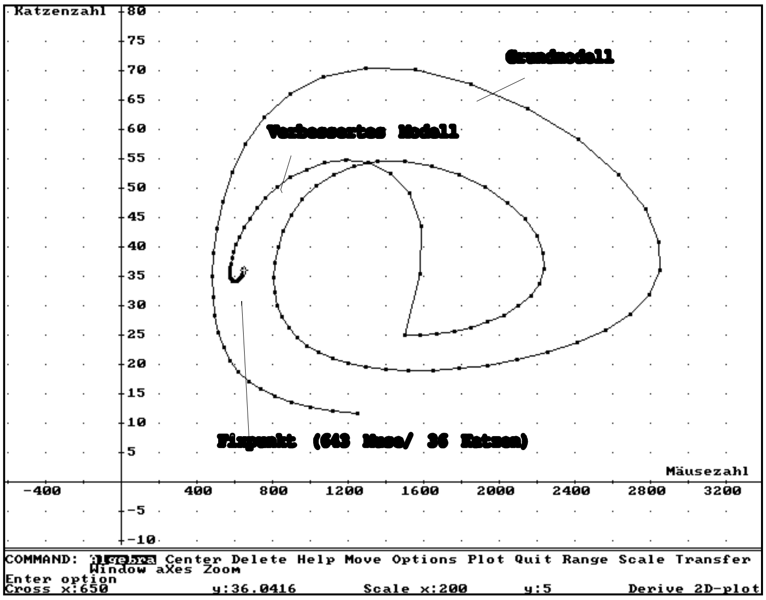


Abb. 5.26: Beisp.4 mit Euler-Cauchy-Verfahren

Im Phasendiagramm bedeuten:

- geschlossene Kurven: periodische Schwankungen
- spiralförmig nach innen laufende Kurven: Entwicklung zum Gleichgewicht
- spiralförmig nach außen laufende Kurven: Entwicklung zur Instabilität

Die Beobachtung, „daß erworbenes Wissen reflektiert und damit längerfristig verfügbar ist" [Steinberg, 1994 S.62], wird bei der Erarbeitung von CA-Modulen auf sehr praktische Art und Weise Wirklichkeit. Die vorangegangenen Anstrengungen stehen - in die Form von Modulen gegossen - dem Schüler nun als Werkzeuge für neue Problemlösungen zur Verfügung. Auf diese Weise werden - zumindest rechentechnisch aufwendigere - Aufgabenstellungen auch in der Prüfungssituation bewältigbar.

(4) Welche Anforderungen sind an die bei der Prüfung verwendeten Rechner zu stellen?

Die Rechenzeiten der verwendeten Geräte sollten sehr kurz sein, da nicht verlangt werden kann, daß ein Schüler in der Prüfungssituation länger als 1-2 Minuten auf ein Ergebnis beim Lösen einer Gleichung oder auf eine Langzeitentwicklung („Szenario") wartet und dann eventuell erkennen muß, daß seine Eingabe mit einem Fehler behaftet war, der sich erst zur Laufzeit (bei der Interpretation seiner Eingabe) bemerkbar macht. Überhaupt ist die Ungewißheit bei langen Wartezeiten („Ist die Eingabe falsch oder die Rechenzeit nur lang, wurde eine Funktion nur unschickt definiert?") für viele Schüler eine ernstzunehmende psychische Belastung. Außerdem sinkt natürlich bei langen Rechenzeiten die Bereitschaft, etwas auszuprobieren.

Die Bildschirmqualität spielt - im Gegensatz zum experimentellen Arbeiten, bei dem eine gute Auflösung und Farbe wünschenswert sind - kaum eine Rolle. Meist genügt auch eine schwache Auflösung, um eine Idee zu bekommen.

(5) Dokumentation der Rechenergebnisse

Klare Vereinbarungen zur Dokumentation der mit CAS bearbeiteten Aufgabenstellungen sind von großer Bedeutung. Hier ist es sehr erfreulich, anmerken zu können, daß DERIVE (auch auf Anregung unserer Projektgruppe hin) ab der Version 3.0 über Annotationen verfügt, die es gestatten, nachzuvollziehen, welche Schritte vom Benutzer an einer bestimmten Stelle seiner Arbeitssitzung mit dem CAS ausgeführt wurden.

Insbesondere muß dem Schüler klar sein, was unter „nichttrivialen Umformungsschritten“ vom Lehrer verstanden wird.

(6) Die Bedeutung von Arbeitsstrategien

Es ist wohl nicht möglich, sich an eine CAS-unterstützte Klassenarbeit heranzuwagen, ohne mit den Schülern vorher ausführlich Arbeitsstrategien das CAS betreffend erarbeitet zu haben, um unnötige Probleme zu vermeiden. In DERIVE ist es etwa sehr ratsam, nach Bearbeitung eines Beispiel mittels **Transfer Clear** eventuelle Variablenbelegungen zu beseitigen. Gerade in der Schularbeitssituation wäre eine - zur TI-92 Funktion VAR-Link analoge Funktion -, die es gestattet, auf einem Blick alle Variablenbelegungen einzusehen, sehr günstig.

Zu solchen Arbeitsstrategien gehören auch die folgenden Fragen: Wie kann man platzsparend und übersichtlich arbeiten, um nicht zuviel scrollen zu müssen und so den Überblick zu verlieren? Wie können zwei verschiedene Lösungen rasch verifiziert werden? Sind ausreichend Grundtechniken im Erstellen von Grafiken wie Zoomen, Bereichsvergrößerung, Skalieren vorhanden? Oder beim Lösen von Gleichungen: Wie läßt sich rasch zwischen exaktem und numerischem Lösen von Gleichungen hin- und herschalten? Wie sind im numerischen Fall die Grenzen vernünftigerweise zu wählen? Wie können unsinnige Lösungen ausgeschlossen werden?

Wie kann man grafische Darstellungen nutzen, um einen ersten Überblick bei einer Aufgabe zu erhalten?

Zusammenfassend kann festgestellt werden: Die Möglichkeiten des CAS können die Lehrer dazu verführen, zuviel in eine Klassenarbeit hineinzustopfen. Hier muß aber klargestellt werden: *Experimentiermöglichkeit ist wichtiger als Länge*! Schüler zeigen insbesondere im Zugang zu einer Problemstellung eine anderes Verhalten, wenn in der Aufgabe Funktionen oder Gleichungen auftreten. Module in der Prüfungssituation sind nur dann sinnvoll, wenn sie vom Schüler selbst erstellt wurden bzw. er aufgrund intensiver Beschäftigung genügend Erfahrungen gesammelt hat. Die Vertrautheit mit geeigneten Arbeitsstrategien und Übereinkünfte der Art, wie die Arbeit dokumentiert werden muß, sind unerläßlich.

Insgesamt muß festgestellt werden, daß die unter CA-Einsatz eher mögliche offene Aufgabenstellung die Diskussion braucht und daß Kreativität keinen Zeitdruck verträgt. Deshalb muß sicher auch über neue Prüfungsformen nachgedacht werden. Ansätze dazu sind auch verschiedenenorts bereits zu beobachten, z.B. themenbezogene Aufgabenstellungen, die individuell oder zu zweit gelöst werden [Baumann, 1995, H.70/S. 63ff], oder die Ausarbeitung und Präsentation mathematischer Projekte, wie sie W.Rohm beschrieben hat [AMMU, 1995, Beitrag8].