3. Der Weg in die Mathematik mit Computeralgebra-Systemen

Beschäftigt man sich mit der Geschichte der Mathematik oder mit Arbeiten von Wissenschaftstheoretikern, wie Popper oder Lakatos, so findet man immer wieder sehr dynamische Modelle von Wissenschaft im allgemeinen und speziell von Mathematik [vgl. Lakatos, 1982]. Laut Popper ist die Entwicklung von Wissenschaft ein asymptotischer Prozeß: Sie kommt im Laufe ihrer Geschichte der 'Wahrheit' immer näher, ohne sie jemals zu erreichen. Poppers heuristische Regel, 'Erfinde Vermutungen, die höheren empirischen Gehalt besitzen als ihre Vorläufer', kann auch für didaktische Konzepte des Mathematikunterrichts eine brauchbare Regel sein. Lakatos beschreibt die Entwicklung von Wissenschaft als eine Konkurrenz fortschreitender Forschungsprogramme, die an die Stelle degenerierender treten.

Wenn man dazu noch Piagets These akzeptiert, daß die Genese von Wissen in den Wissenschaften und im Individuum nach den gleichen Mechanismen erfolgt [Wittmann, 1981, S.59], so führt dies zu einem sehr dynamischen Modell für das Lernen von Mathematik.

Man kann sich das Vordringen in eine Wissenschaft als einen spralförmigen Weg vorstellen. Wittmann spezifiziert bei der Beschreibung des Spiralprinzips [Wittmann, 1981, S 9] drei Ebenen:

(1) Unterrichten auf einer naiven Basis

(2) Unterrichten auf einer intuitiven Basis

(3) Unterrichten auf einer systematischen Basis

3.1. Die Kreativitätsspirale

Eine sehr anschauliche Darstellung dieses *Wegs in die Mathematik* stammt von Bruno Buchberger [Buchberger, 1993]. Seine Überlegungen gehen davon aus, wie sich Mathematik als Wissenschaft entwickelt hat, und auch er kommt zum Modell der Spirale. Wir nennen sie nach ihrem Schöpfer die *Buchbergersche Kreativitätsspirale*. Die Phasen, die bei ihm durchlaufen werden, sehen etwas anders aus als bei Wittmann, die Verwandtschaft ist aber deutlich erkennbar - letztlich eine Realisierung der oben zitierten Piagetschen These.

Uns erscheint die Buchbergersche Spirale eine anschauliche Leitlinie für ein Konzept des Mathematiklernens zu sein. Vor allem aber beschreibt dieses Modell besonders gut den Weg des computerunterstützten Lernens.

Die Antriebskraft, die die Bewegung auf der Spirale in Gang setzt und aufrechterhält, ist entweder Wissensgewinnung, also Begriffe zu entwickeln, Theoreme zu formulieren und zu beweisen, oder das Lösen von Problemen. In der heutigen Bildungsdiskussion hat man oft den Eindruck, als handle es sich um ein Gegensatzpaar: "Weniger Wissenserwerb, dafür mehr Schlüsselqualifikationen, wie etwa Problemlösefähigkeit, Teamfähigkeit usw." wird immer wieder gefordert. Dabei handelt es sich eher um die zwei Seiten einer Medaille: Um Probleme lösen zu können, muß man auch das nötige Wissen haben oder erwerben. Und schließlich sollte ja Wissenserwerb auch nicht nur das Speichern von Daten und Fakten sein, die auf Knopfdruck unreflektiert abgerufen werden können, sondern ein Vernetzen mit schon gefestigtem Wissen, das Absichern durch Begründen und Beweisen und ein verstehendes Nutzen dieses Wissens. Kurz gesagt: Wissenserwerb verlangt auch Problemlösefähigkeit.

3.1.1. Die Buchbergersche Kreativitätsspirale

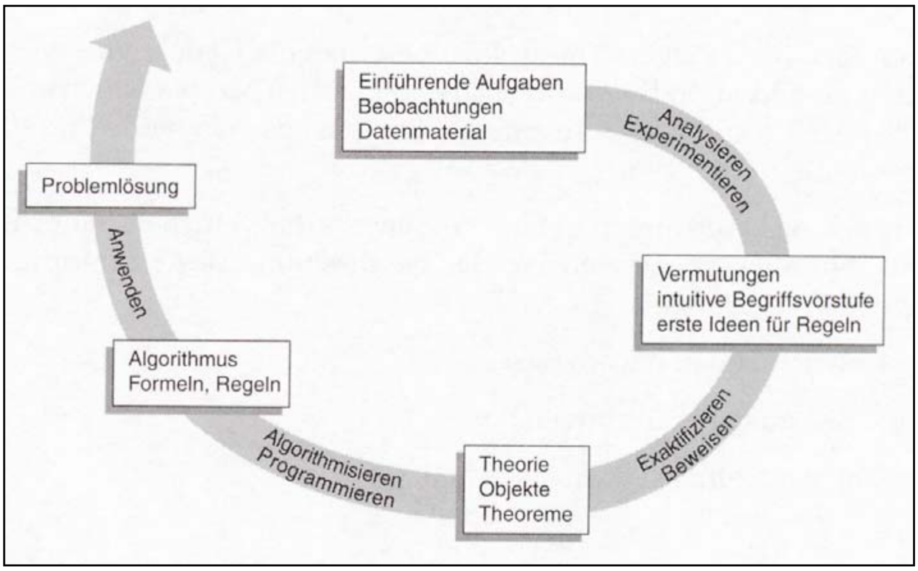

Abb.3.1: Buchbergersche Kreativitätsspirale

Ausgangspunkt eines Spiraldurchlaufs sind Beobachtungen, Datenmaterial oder Probleme, zu deren Lösung die Entwicklung von Algorithmen nötig ist oder neue Begriffe geschaffen werden müssen.

Durch Analysieren, Experimentieren oder allgemeiner durch heuristische Strategien werden Vermutungen gefunden, Sätze formuliert und erste Beweisideen gesucht.

Durch Beweisen und Begründen, also durch Exaktzifizieren erreicht man die nächste Station auf der Spirale: Theoreme und Sätze, die nun als gesichert angesehen werden.

Nun gilt es, gestützt auf das erworbene Wissen, Algorithmen oder Programme zu entwikeln, die für die Problemlösung notwendig sind. Testen und Festigen des entwickelten Algorithmus durch Üben gehört auch zu dieser Phase.

Mit dem nächsten Schritt wird der Spiraldurchlauf abgeschlossen. Die erworbenen Kenntnisse und Strategien werden beim Lösen des Ausgangsproblems oder verwandter Probleme angewendet.

Bei Auftreten neuer Probleme kann es passieren, daß neues Wissen notwendig ist, neue Algorithmen entwickelt werden müssen - neue Schleifen werden durchlaufen.

Spiralförmig bewegt sich also der Lernende, die Erfahrungen früherer Spiraldurchläufe nutzend, immer weiter in die Mathematik hinein. Natürlich wird es in der Unterrichtsrealität manchmal nötig sein, von diesem für die Mathematik als Wissenschaft charakteristischen Weg abzuweichen.

3.1.2. Die Kreativitätsspirale in der Unterrichtspraxis

Wie schon an einigen Stellen diese Buchs ausgeführt, ist die Schulmathematik immer wieder Modetrends ausgesetzt. Man denke nur an die New-Math-Bewegung in den siebziger Jahren oder an die Gegenströmung, die durch das genetische Konzept beziehungsweise durch stärkere Anwendungsorientierung gekennzeichnet ist. Ein weiterer Einfluß kommt von der Zahl der zur Verfügung stehenden Wochenstunden und von der Forderung verschiedenster Instituitionen nach neuen, aktuellen Lerninhalten. Nicht zuletzt - das ist ja Thema dieses Buchs - sind es die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel, die den Weg der Lernenden in die Mathematik beeinflussen.

Betrachtet man, auch unter Berücksichtigung der altersgemäßen Behandlung der Lerninhalte, die Buchbergersche Kreativitätsspirale, so stellt man fest, daß in der Schulmathematik häufig je nach Modetrend, Inhalt, Alter der Schüler und Medium die Spirale mehr oder weniger abgeändert wird.

Solche 'Abweichungen' von der Kreativitätsspirale im Bereich des Analysisunterrichts hat M. Kronfellner von der Technischen Universität Wien untersucht. Vieles, was er in der Analysis konstatierte, kann aber auch auf andere Bereiche des Mathematikunterrichts übertragen werden.

Folgende Abweichungen sind zu beobachten, oder könnten bei Nutzung des Computers auftreten:

Es wird entweder die heuristische oder die exakte Phase stärker betont.

(1) Die *New-Math-Spirale*:

In der New-Math-Zeit lag der Schwerpunkt beim Wissenserwerb im Bereich der exaktifizierenden Phase. Der Anwendungsaspekt, insbesondere Anwendungen aus der Erfahrungswelt der Schüler, hatte nur geringe Bedeutung. Oft wurde die heuristische Phase bei Vorgehen nach einem axiomatischen Konzept vollkommen weggelassen. So wurden etwa in einem Schulbuch der siebziger Jahre zum Thema Analysis 39 Definitionen und 65 Sätze vor dem ersten Anwendungsbeispiel gezählt.

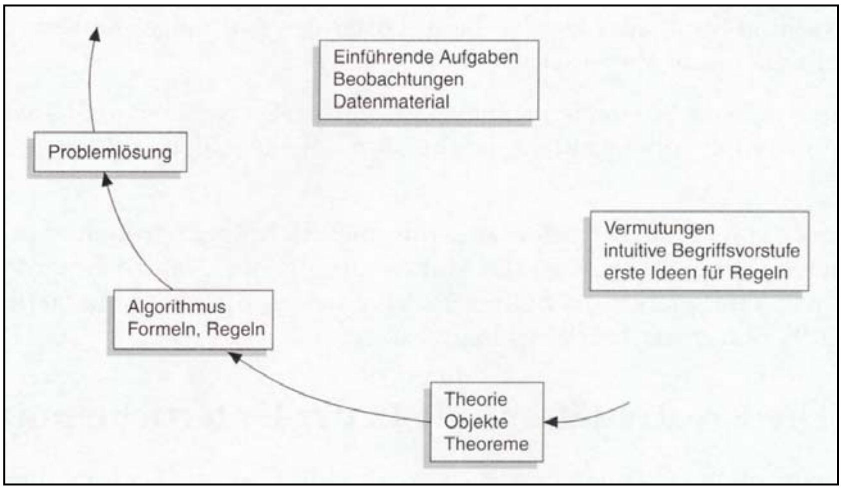

Abb. 3.26: Die New-Math-Spirale

(2) Die *Rechenfertigkeitsschleife*:

Im traditionellen Mathematikunterricht liegt der Schwerpunkt der Schülertätigkeiten sehr stark bei Kalkülfertigkeiten. Lehrer- und lehrplanabhängig wurde der Herleitung der Algorithmen und der Anwendung in der Praxis machmal mehr, eher aber weniger Raum gewidmet. Der wesentlichste Teil der Unterrichtszeit wurde für das Einüben von Fertigkeiten beim Operieren mit den Algorithmen verwendet, die Anwendung von Rezepten dominierte gegenüber dem Weg zu den Rezepten. In der Grafik der Kreativitätsspirale könnte dies durch Nebenspiralen beim neuen Algorithmus veranschaulicht werden

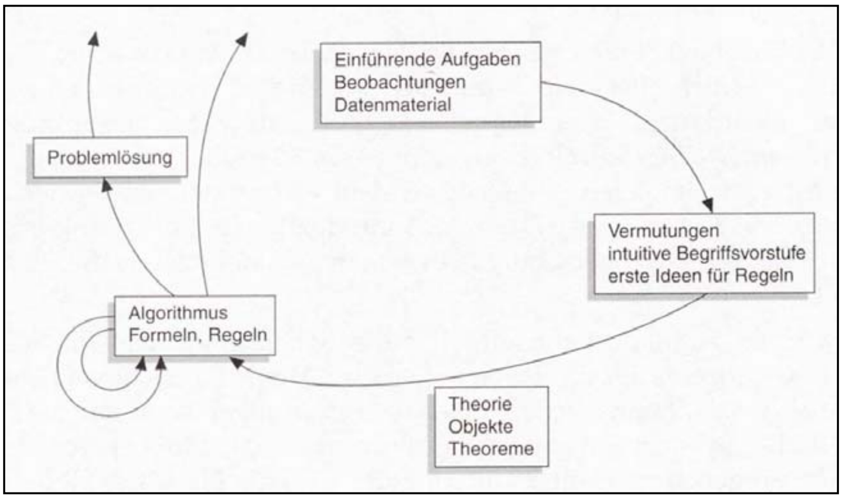

Abb. 3.27: Die Rechenfertigkeitsspirale

(3) Die *genetische Spirale*:

In der genetischen Zeit dagegen betont man besonders den naiven bzw. intuitiven Zugang zu neuen Problemen oder Begriffen. Die nächsten Phasen wären: Hinführen zu strengeren ganzheitlichen Überlegungen, Standpunktsverlagerung (d.h. auch Abstraktion vom Anlaßproblem) - also eigentlich ein Weg gemäß der Buchbergerschen Spirale. Problemlösen steht mehr im Mittelpunkt, der Wissenserwerb ergibt sich notwendigerweise aus dem Probleme.

Wie so oft bei Gegenbewegungen gibt es auch hier überzogene Ausprägungen. Man begnügt sich mit naiven Deutungen von Begriffen oder mit dem Plausibelmachen von Algorithmen, vergißt aber die Einbettung in größere ganzheitliche Problemkontexte und die theoretische Absicherung.

Ein möglicher didaktischer Ansatz wäre eine Doppelschleife: Intuitiver Zugang - intuitiv erarbeiteter Algorithmus - Anwenden dieses Algorithmus - Hinterfragen - Absichern der Vermutung in der exaktifizierenden Phase erst im zweiten Schleifendurchlauf. Im Sinne von Wittmann würde das bedeuten: Erster Schleifendurchlauf: Lernen auf intuitiver Basis. Zweiter Schleifendurchlauf: Lernen auf systematischer Basis.

Eine wirkliche Realisation des genetischen Prinzips wäre nur dann gegeben, wenn sowohl die intuitive als auch die systematische Schleife durchlaufen würde.

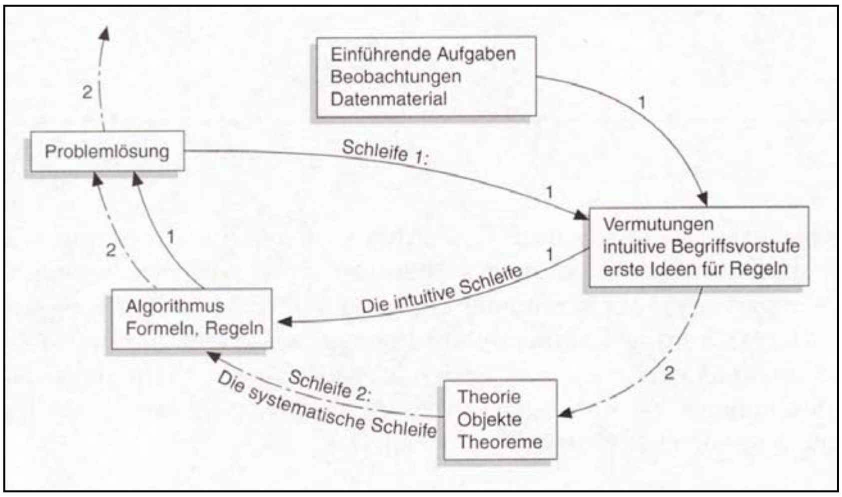

Abb. 3.28: Die genetische Spirale

(4) Die *CAS-unterstütze Spirale*:

Das CAS bietet dabei die Chance, alle Phasen der Kreativitätsspirale zu durchlaufen - natürlich altersgemäß und den Zielen der Schulform entsprechend. Manchmal wird dieser Weg entsprechend der Buchbergerschen Spirale gewählt werden - auch 'CAS-Spirale 1' genannt (Abb. 3.1). Oder aber man entscheidet sich für den zweimaligen Schleifendurchlauf wie bei der genetischen Spirale - 'CAS-Spirale 2' (Abb. 3.4). Das CAS kann dazu beitragen, daß *Wissenserwerb und Problemlösen* gleichberechtigt nebeneinander, oder noch besser füreinander da sind.

CAS würden zumindest theoretisch die Möglichkeit bieten, im Sinne eines Black Box-Konzepts auf das Beherrschen von Algorithmen zu verzichten. Man könnte also in der heuristischen Phase zu Vermutungen kommen, die Phase der theoretischen Absicherung von Algorithmen und das Einüben von Rechenfertigkeiten umgehen und unter Nutzung des CAS als Black Box sich sofort den Anwendungen zuwenden.

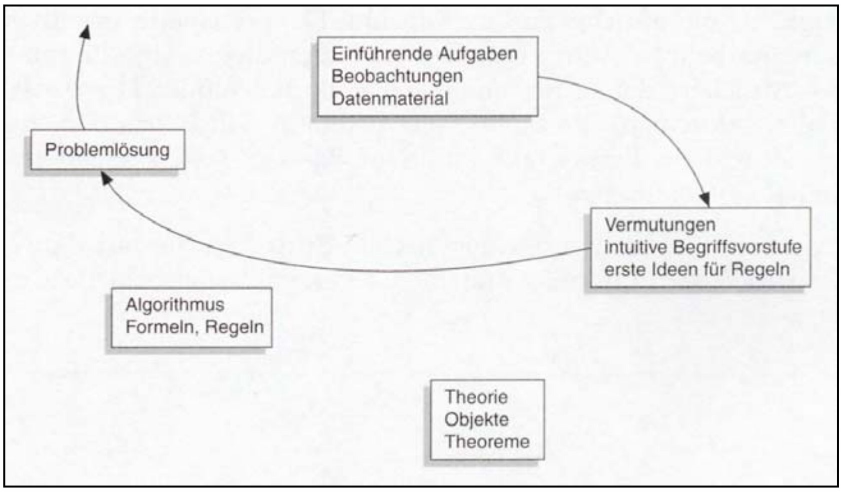

Abb. 3.29: Die 'negative' CAS-Spirale

Aus dem bisherigen sollte deutlich geworden sein, daß die weder unser Ansatz für den Mathematikunterricht ist, noch halten wir einen solchen Weg nach unseren Untersuchungen für gangbar. Erstens gibt es keine Modellbildungskompetenz ohne Strukturerkennungskompetenz und eine gewisse elementare Kalkülkompetenz, und zweitens gehört es zum Erziehungsauftrag des Mathematikunterrichts, intuitiv gewonnene Vermutungen durch Absicherung in der exaktifizierenden Phase auf eine gesicherte Grundlage zu stellen.

Es wird auch in der CAS-Zeit je nach Schulart, Lernzielschwerpunkt oder Alter manchmal notwendig sein, sich mit einer naiven Begriffsvorstufe zu begnügen oder einen Algorithmus nur plausibel zu machen. Zumindest sollte die exaktifizierende Phase thematisiert werden, etwa unter der Devise: "Wenn schon nicht beweisen, dann wenigstens Beweis- oder Begründungsbedürfnis wecken". Im Sinne des Black Box/White Box-Prinzips (siehe Kapitel 4.2) wird ein Teil der Spirale vielleicht auch in der Gegenrichtung durchlaufen. Wesentlich ist, daß dem Lehrer bei der Planung des Unterrichts die einzelnen Stationen der Spirale bewußt sind und daß er möglichst oft versucht, alle Phasen zu berücksichtigen. Es ist unserer Ansicht nach besser statt zu vielen zu hektisch durchlaufenen Spiralen weniger, aber dafür bewußt durchlaufene Spiralen zu planen.

Ein solches Konzept entspricht viel eher dem Bildungsauftrag des Faches Mathematik. Im Lehrplan des Faches Mathematik in Österreich [Leitner, 1991, S.29-S.31] heißt es bei der Bildungs- und Lehraufgabe unter anderem:

"Die Schüler sollen ein Bild der Mathematik gewinnen, das Verfahrens-, Problem-, Anwendungs- und Theorieaspekte ausgewogen repräsentiert.

Die Schüler sollen ihr mathematisches Wissen und Können in verschiedenen Bereichen, insbesondere in solchen, die zur Lebens- und Wissenswelt Bezug haben, anwenden können.

Folgende Lernziele sind anzustreben: Argumentieren und exaktes Arbeiten: Darstellen und Interpretieren; produktives geistiges Arbeiten; kritisches Denken."

Thema dieses Buchs ist, zu zeigen, daß dieser Bildungsauftrag mit Unterstützung von CAS leichter und besser zu realisieren ist.

Beim Durchlaufen einer Schleife der Kreativitätsspirale kann man *3 wichtige Tätigkeitsbereiche* im Lernprozeß unterscheiden, wobei natürlich nicht immer eine scharfe Trennung möglich ist:

Phase (1) *Die heuristische, experimentelle Phase*

Entwickeln von Vermutungen, Formulieren von Hypothesen, Entwikeln von Beweis- und Lösungsstrategien, Entwickeln naiver Begriffsvorstellungen usw.

Phase (2) *Die exaktifizierende Phase*

Absichern der Vermutungen, Beweisen der Hypothesen, Programmieren (inklusive Testen), Exaktifizierung von Begriffen usw.

Phase (3) *Die Anwendungsphase*

Nutzen der in Phase (1) und in Phase (2) entwickelten Begriffe und Algorithmen beim Problemlösen: Modellbilden, Operieren, Interpretieren.

Wesentlich ist dabei nicht Reihenfolge. Insbesondere die Phasen (2) und (3) können auchin umgekehrter Reihenfolge oder parallel durchlaufen werden.

3.2. Phase 1: Heuristische, experimentelle Phase

Im Lexikon liest man beim Begriff Heuristik: "Findungskunst, Lehre von den Wegen zur Gewinnung wissenschaftlicher Erkenntnis"

Schon der Titel des vorigen Kapitels "Weg in die Mathematik" soll ausdrücken, daß es nicht um jene 'fertige Mathematik' geht, die Studenten häufig an der Universität erleben, sondern um Mathematik *in statu nascendi*. Am Anfang neuer mathematischer Entwicklungen standen aber nie ein Axiomensystem und Theoreme, die nach den Gesetzen der mathematischen Logik zu beweisen sind. Kennzeichnend für den Einstieg in eine solche mathematische Schleife ist immer wieder eine heuristische Phase.

Im Unterricht sollte diese für den Lernprozeß so wichtige Phase mehr als bisher berücksichtigt werden. Der Schüler soll nicht immer sofort einen eindeutigen Weg vorgegeben bekommen, den er an der Hand des Lehrers zu gehen hat oder auf dem er vielleicht sogar größtenteils getragen wird. Er soll auch dazu angehalten werden, Wege auszuprobieren und sich für Wege zu entscheiden. Nicht nur das, was am Ende des Wegs steht - also das Rezept - ist wichtig, sondern die Wegfindungskunst.

Mit Mathematik verbindet man immer die Methode des logisch deduktiven Schließens. Das Gewinnen von Einsichten, das Finden der Komponenten für das logische Schließen erfolgt aber meist nicht nach den Gesetzen der zweiwertigen Logik.

Charakteristisch für diese Phase sind:

-Plausibles, induktives Schließen

-Experimentelles Arbeiten (systematisches Probieren)

-Versuch - Irrtumsmethode

Ziel dieser Phase ist:

-Finden einer Vermutung oder einer Deutung

-Entwickeln von Problemlösestrategien

Wenn wir aber die Absicht haben, daß der Schüler selbst zu Vermutungen kommt und Problemlösestrategien entwickelt, und nicht nur das mathematische Ergebnis, sondern die Strategie zum Gegenstand seines Denkens macht, muß er sich dieses Wissen aktiv erwerben.

Comenius sagt: "Am besten lehrt man eine Tätigkeit, indem man sie vorführt."

Freudenthal sagt: "Am besten lernt man eine Tätigkeit, indem man sie ausführt."

Wir sagen: "Wenn der Schüler den Weg in die Mathematik selber gehen soll, darf er die Tätigkeit vor der Ausführung nicht vorgeführt bekommen."

Daß der heuristischen Phase des Mathematiklernens in diesem Buch so breiter Raum gewidmet wird, ist mit einem Ergebnis des österreichischen CAS-Projektes erklärbar: Das CAS ermöglicht vielfach erst echtes Experimentieren und fördert damit in besonderer Weise den Erwerb heuristischer Strategien.

Gerade beim Arbeiten mit dem CAS erkennt der Schüler sehr schnell: Experimentieren heißt Beobachten unter kontrollierten Bedingungen. Zielloses Probieren bringt selten Erfolg.

Ausgangspunkt für Tätigkeiten in dieser Phase: Ein Problem, experimentelles Material, Daten.

Typische Denk- und Arbeitsweisen bei der Problemanalyse sind plausibles Schließen und Experimentieren. Daten müssen geordnet, Fragen präziser formuliert werden. Bei offenen Aufgaben müssen Fragen häufig erst gefunden werden.

Ziel dieser Phase: Finden einer Vermutung.

Danach wird häufig versucht, die Vermutung durch Tests zu erhärten.

In der didaktischen Literatur werden verschiedene heuristische Strategien angeführt, die typische und erfolgversprechende Denk- und Vorgangsweisen des Lernenden in dieser heuristischen Phase beschreiben. (Siehe etwa Polya, Fischer, Freudenthal, Papert, Van der Waerden.) Beispiele: Spezialisieren, Generalisieren, Analogisieren, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten usw. [Fischer, 1985, S. 205-220]

Wir wollen hier einige Regeln - erläutert an Beispielen - anbieten, die besonders auf den Einsatz des Computers abgestimmt sind:

3.2.1. Heuristische Regeln für das Arbeiten mit CAS

(1) Experimentieren

Man sucht eine Vermutung durch systematisches Probieren. Ein vermutetes Modell 1 wird getestet, als brauchbar akzeptiert, verbessert oder verworfen. Im nächsten Schritt operiert man mit dem getesteten Modell oder man entwickelt ein verbessertes Modell 2, testet wieder usw. Testen bedeutet: Überprüfen, ob das vermutete Modell die Eingabebedingung erfüllt und für beliebige Eingabegrößen brauchbare Ergebnisse liefert.

Die Regeln (2) bis (6) handeln von den vielfältigen Möglichkeiten, mit Hilfe des CAS zu *testen,* um gesichertere Ergebnisse zu erzielen und besseres Verständnis zu erreichen:

(2) Mache mit Hilfe von CAS Proben machen

Numerische Proben waren auch schon mit numerischen Rechnern üblich, können aber mit dem CAS viel effektiver und rascher durchgeführt werden. Völlig neue Möglichkeiten ergeben sich aber beim algebraischen und grafischen Überprüfen der Richtigkeit und Brauchbarkeit von Ergebnissen.

(3) Definitionsbereich testen

Untersuche, ob das Modell auch in einem erweiterten Definitionsbereich gültig ist und ob es auch für Spezialfälle gilt. Eine häufige Fehlerquelle ist die Entwicklung eines Modells in einem engeren Definitionsbereich und der falsche Schluß, die Gültigkeit wäre dann auch für größrere Bereiche gegeben.

(4) Spezialfälle untersuchen

Eine typische Arbeitsweise sowohl in der Mathematik als auch in den Naturwissenschaften ist es, von einem Sonderfall ausgehend immer weiter zu generalisieren, an Sonderfällen Strategien zu entwickeln, die das Vordringen zu allgemeineren Fällen erst ermöglichen.

(5) Brauchbarkeit der Lösungen überprüfen

Überprüfe, welche Lösungen des Modells für das gestellte Problem brauchbar sind. Manchesmal bietet das mathematische Modell - insbesondere bei Lösung mit dem "gewissenhaften" CAS - mehr Lösungen an, als für das gestellte Problem gültig sind.

(6) Auswirkung von Parametern untersuchen

Untersuche die Auswirkung einzelner Parameter auf das Modell bzw. auf die Lösung. Diese Tätigkeit ist vor allem beim Interpretieren von Ergebnissen von großer Bedeutung und kann eigentlich erst mit Unterstützung des Computers realisiert werden.

Die folgenden Regeln sollen Hilfestellungen des CAS für ein besseres Verständnis und auch neue Lösungsmöglichkeiten aufzeigen.

(7) Durch schrittweises Vorgehen hinterfragen

Das CAS liefert oft direkt, also ohne Zwischenergebnisse ein Resultat. Versuche die Lösung des CAS durch schrittweises Vorgehen nachzuvollziehen ("was der Computer kann, können wir auch"). In Kapitel 4 wird diese Strategie als typische Abeitsweise beim Vorgehen nach dem didaktischen Black Box/White Box-Prinzip erkennbar.

(8) Darstellungsart wechseln

Auch im traditionellen Unterricht wurden den Schülern solche Regeln empfohlen, wie etwa die Regel in der analytischen Geometrie: "Überlege, wie du es konstruierst, dann kannst du es auch rechnen." Mit Hilfe des CAS ist dieser Wechsel der Darstellungsart besonders leicht möglich geworden. So ist z.B. bei Funktionen der Wechsel von der algebraischen zur grafischen Darstellung oder zur Tabelle rasch und ohne größere Probleme möglich.

(9) Mit Hilfe des CAS Fehler suchen

Entwickle Strategien zum Erkennen von und Umgang mit Fehlern. Verfolge mit Hilfe des CAS den Lösungsweg zurück (Debugging mit dem CAS). Im traditionellen Mathematikunterricht werden Kinder oft gehemmt, weil sie ein Lernmodell haben, in dem man etwas entweder 'richtig' oder 'falsch' macht. Dies führt vielfach - zum Teil auch durch den ständigen Druck, überprüft zu werden - zu einer Fehlervermeidungs-strategie. Wie soll aber dann ein Lehrer Therapien gegen Schülerfehler entwikeln? Es ist also für den Lernprozeß sehr wichtig, den Schülern ein Arbeitsklima anzubieten, in dem sie Fehler machen dürfen. Doch nur das Hinweisen auf Fehler seitens des Lehrers in so einer angstfreien Atmosphäre ist zu wenig. Damit passiert im Denkprozeß des Schülers noch nicht viel.

Wichtiger wäre die *aktive Fehlersuche des Schülers*. Er wird dann viel eher 'ein'- sehen und eine Korrektur seines falschen Denkmodells vornehmen, die auch Bestand hat. Wir wollen versuchen, an einigen der folgenden Beispiele aufzuzeigen, welche Hilfen das CAS den Schülern bei dieser aktiven Fehlersuche anbieten kann und wie sie eigenständige Debuggingstrategien entwikeln können.

In den folgenden Beispielen soll auch gezeigt werden, daß das CAS nicht nur beim Aufspüren und Bekämpfen von Fehlern wichtig ist, sondern auch helfen kann, Strategien zur Vermeidung von Fehlern zu entwikeln, also schon von vorneherein die Fehleranfälligkeit zu bekämpfen.

(10) Visualisieren

Eine besondere Qualität der Mathematik ist die Möglichkeit der visuellen Darstellung abstrakter Sachverhalte. Abgesehen von Freihandskizzen ist es ohne Computer sehr schwierig, Grafiken zu entwerfen. So ist ja etwa Ziel der Kurvendiskussionen in der Analysis, die wichtigsten Punkte und Eigenschaften der Funktion zu er-mitteln, um den Graphen zeichnen zu können. Mit dem CAS ergibt sich der Graph in der Regel schneller und direkter als die Daten, die die Kurvendiskussion liefert. Visualisieren ist also einer der wichtigsten Beiträge des CAS für ein besseres Verständnis abstrakter Probleme. Außerdem zeigte sich bei der Beobachtung der Schüler im EDV-Raum, daß vor allem bei Partnerarbeit die visuelle Kommunikation eine wichtige Voraussetzung und Unterstützung der sprachlichen und schriftlichen Kommunikation darstellt.

(11) Zoomen

Das Angebot, Graphen zu vergrößern und zu verkleinern, sowie die Möglichkeit, den Cursor entlang eines Graphen zu bewegen, sind wichtige Bereicherungen beim Visualisieren.

(12) Simulieren

Durch den Computer wurde der Lösbarkeitsbegriff erweitert. Galten bisher Probleme als lösbar, wenn man Zahlen oder termdarstellbare Funktionen angeben konnte, gilt dank der Möglichkeiten des Computers auch die Simulation eines Prozesses (etwa auf Grund eines iterativen oder rekursiven Modells) als akzeptable Lösung. Solche Aufgaben, bei denen nur ein iteratives Modell gefunden werden konnte, waren ohne Computer kaum zu lösen. Zu dieser so wichtigen, völlig neuen Möglichkeit werden in den folgenden Kapiteln noch einige Beispiele angeboten (siehe etwa Kap. 3.5).

Beispiel 3.1: Extremwertaufgaben ohne Differentialrechnung

(Experimentieren, Visualisieren)

Von einem rechteckigen Stück Pappe mit 10 dm Länge und 8 dm Breite werden an den Ecken kongruente Quadrate ausgeschnitten. Aus dem Rest wird eine quaderförmige Schachtel gebildet. Welche Seitenlänge müssen die auszuschneidenden Quadrate haben, damit das Volumen dieser Schachtel maximal wird.

Dieses Standardbeispiel findet man in verschiedenen Lehrbüchern beim Kapitel Differentialrechnung (in Österreich in der 11. Schulstufe). Die Schüler lösen es mehr oder weniger automatisch, indem sie die erste Ableitung gleich 0 setzen und eventuell noch mit Hilfe der zweiten Ableitung das relative Maximum bestätigen. Vor lauter Rechnen verlieren sie oft das eigentliche Ziel aus den Augen, nämlich etwas zu optimieren.

Mit Hilfe des CAS kann der Schüler im Grafikfenster auf Entdeckungsreisen gehen (siehe Abb. 3.6). Ein sinnvoller Definitionsbereich kann gefunden werden, die Sinnhaftigkeit der Nullstellen der Volumsfunktion kann diskutiert werden, vor allem kann man sich aber mit dem Cursor auf die Suche nach dem Maximum machen. Dazu ist die Differentialrechnung aber gar nicht erforderlich. Solche Optimierungsaufgaben könnte man schon in der 9. Schulstufe beim Kapitel Funktionen behandeln.

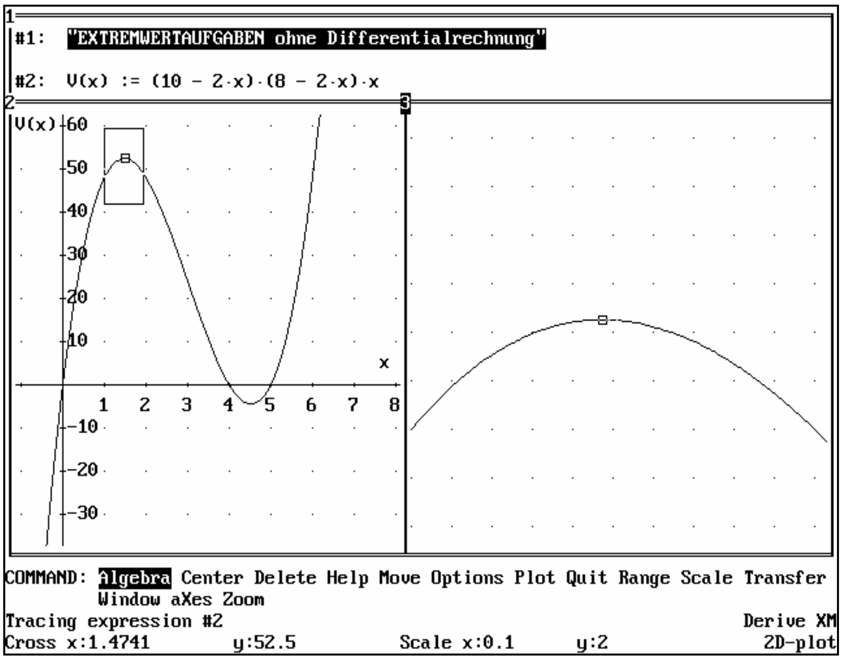

Abb. 3.30:Extremum durch Visualisieren

DERIVE bietet im *TRACE*-Modus auch die Möglichkeit, den Cursor die Kurve entlang wandern zu lassen. Mit Hilfe des Befehls **RANGE** oder **ZOOM** kann der interessante Bereich beliebig vergrößert werden, um den gesuchten Punkt möglichst genau zu finden. Dabei lernt der Schüler typische Probleme einer anwendungsorientierten Mathematik kennen, wie etwa: Bei Überprüfung der Cursorkoordinaten beobachtet man, daß der maximale Funktionswert zwischen 1,4258 und 1,5193 angezeigt wird. Die Frage ob der Mittelwert eine sinnvolle Lösung ist könnte Ausgangspunkt für eine Exaktifizierung sein. Die Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung ergibt den Wert 1,47247, wobei man natürlich noch über die Sinnhaftigkeit dieser Genauigkeit beim Schachtelbeispiel diskutieren müßte.

Beispiel 3.2: Ableitung der Sinusfunktion

(Experimentieren, Spezialfälle untersuchen, Visualisieren)

Voraussetzungen: Grenzwert für Zahlenfolgen und für reelle Funktionen. Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten. Deutung als Tangentensteigung.

Schritt 1: Untersuchung des Sonderfalls x=0. Vermutungen aus dem Graphen über die Tangentensteigung.

Es werden einige lineare homogene Funktionen getestet. Dies kann enweder durch die Eingabe mehrerer linearer Funktionen mit verschiedenen Steigungen erfolgen oder aber, wie etwa bei DERIVE, mit der **VECTOR**-Funktion (siehe Zeile #2 in Abb.3.7). Die Steigung k durchläuft dabei die im vorgegebenen Vektor angegebenen Zahlen 0.8, 1 und 1.2. Schon aus dem Fenster 2 und erst recht durch Zoomen im Fenster 3 ergibt sich für die Tangentensteigung die Vermutung k=1.

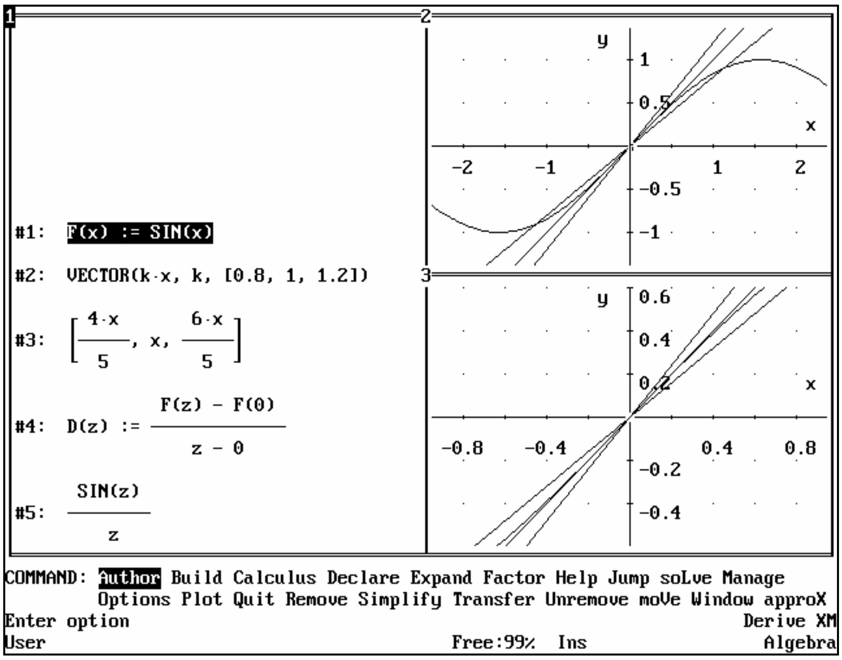

Abb. 3.31:Ableitung der Sinusfunktion

Schritt 2: Ermitteln der ersten Ableitung an der Stelle 0 als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Wie im Fenster 1 (Zeile #4) zu sehen ist, wird der Differenzenquotient an der Stelle $x = 0$ gebildet.

$$\#4: \quad F(x) := SIN(x)$$

$$\#5: \quad D(z) := \frac{F(z) - F(0)}{z - 0}$$

Mit **Simplify** erhält man den entsprechenden Term:

$$\#6: \quad \frac{SIN(z)}{z}$$

Mit den bisherigen Voraussetzungen der Schüler ist der Grenzwert nicht zu ermitteln. Entsprechend der Idee der heuristischen Phase versuchen wir nun durch Experimentieren die Vermutung zu erhärten. Wir nähern uns von beiden Seiten zuerst in diskreten Schritten.

Wieder hilft dabei die **VECTOR**-Funktion, um rasch und ohne Rechenaufwand zu Tabellen zu kommen.

Zuerst nähern wir uns von links:

```
#7:  VECTOR([z, D(z)], z, [-1,-0.5,-0.2,-0.1,-0.05,-0.01, 0])
```

Simplify ergibt die Wertetabelle:

```
       ┌  -1     0.841470 ┐
       │ -0.5    0.958851 │
       │ -0.2    0.993346 │
#8:    │ -0.1    0.998333 │
       │ -0.05   0.999583 │
       │ -0.01   0.999983 │
       └   0        ?     ┘
```

Analog erfolgt die Näherung von rechts:

```
#9:  VECTOR([z, D(z)], z, [1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01, 0])
```

```
       ┌   1    0.841470 ┐
       │  0.5   0.958851 │
       │  0.2   0.993346 │
#10:   │  0.1   0.998333 │
       │ 0.05   0.999583 │
       │ 0.01   0.999983 │
       └   0       ?     ┘
```

Besonders wichtig ist das Fragezeichen in Zeile #10. Aber eigentlich dürfte es die Schüler nicht überraschen, daß der Wert des Differenzenquotienten an der Stelle 0 nicht existiert.

Nun kann der Grenzwert bei Näherung von links und von rechts mit Hilfe des CAS als Black Box ermittelt werden. Dabei liefert das CAS sowohl bei Näherung von links ('0-') als auch von rechts ('0+') den Wert 1.

#11: $\lim\limits_{z \to 0-} \frac{SIN(z)}{z}$

#12: 1

#13: $\lim\limits_{z \to 0+} \frac{SIN(z)}{z}$

#14: 1

Schritt 3: Nach dem Spezialfall versucht man mit Hilfe des CAS den Grenzwert des Differenzenquotienten an einer beliebigen Stelle *x* zu ermitteln.

#2: $D(z, x) := \frac{F(z) - F(x)}{z - x}$

#3: $D(z, 0) = \frac{SIN(z)}{z}$

ist der obige Sonderfall. Allgemein ergibt **Simplify**:

$$\#4:\quad \frac{\mathrm{SIN}(x) - \mathrm{SIN}(z)}{x - z}$$

Wieder nähern wir uns von links ('*x*-') und von rechts ('*x*+') und erhalten:

$$\#5:\quad \lim_{z \to x-} \frac{\mathrm{SIN}(x) - \mathrm{SIN}(z)}{x - z}$$

$$\#6:\quad \mathrm{COS}(x)$$

$$\#7:\quad \lim_{z \to x+} \frac{\mathrm{SIN}(x) - \mathrm{SIN}(z)}{x - z}$$

$$\#8:\quad \mathrm{COS}(x)$$

Schritt 4: Für den Begriffsbildungsprozeß ist die Visualisierung immer wieder von großer Bedeutung:

Man könnte im Grafikfenster noch die Beziehung zwischen der Differenzenquotientenfunktion an der Stelle $x = 0$ ($D(z,0)$) und der Ableitungsfunktion COS(x) erforschen und beobachten, daß sich in einer Umgebung von 0 $D(z,0)$ sehr gut an die Ableitungsfunktion anschmiegt (Abb. 3.8).

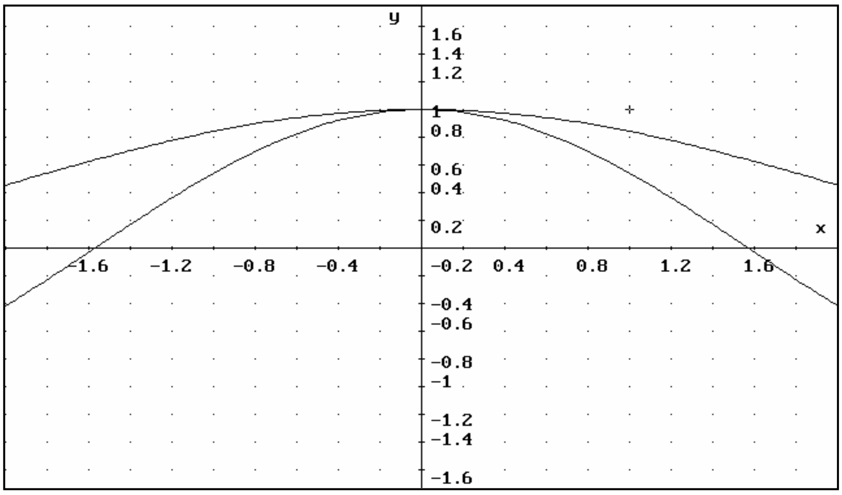

Abb. 3.32:Differenzenquotienten- und Ableitungsfunktion

Interessant für das Verständnis des Differenzenquotienten und des Differentialquotienten ist auch noch folgendes Experiment: Wenn man im *TRACE*-Modus mit dem Cursor den Graphen von $D(z,0)$ entlang wandert, ertönt an der Stelle $x = 0$ ein Piepston, die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert. Wandert man dagegen auf der Cosinuskurve, gibt es an der Stelle $x = 0$ keine Probleme. Die Diskussion zwischen den Schülern bei solchen Experimenten - oft arbeiten sie ja im EDV-Raum in Partnerarbeit - ist für den Lernprozeß viel ertragreicher als jeder noch so gute Lehrervortrag über 'stetige Fortsetzung'.

Für Schulformen mit wenig Mathematikstunden genügt unserer Meinung nach diese heuristische Phase, allerdings zumindest verbunden mit einer Diskussion über notwendige Exaktifizierungsschritte. Wenn möglich sollte in einer nachfolgenden exaktifizierenden Phase eine präzisere Herleitung auch ausgeführt werden. Nach ausreichend vielen Übungen zur Festigung einer gewissen Rechenfertigkeit, könnte das CAS als Black Box bei der Ermittlung der Ableitungen von Winkelfunktionen verwendet werden (siehe Kapitel 4.1).

$$\#9:\quad \frac{d}{dx}\, \mathrm{SIN}(x)$$

```
#10: COS(x)

#11: F1(x) := COS(x)
```

Für den Sonderfall ergibt sich:

```
#12: F1(0) = 1
```

Beispiel 3.3: Erforschen der Sinusfunktion

(Spezialfälle, Auswirkung von Parametern untersuchen)

Gegeben ist die Funktion F(t): = A. SIN(B.t + C). Untersuche die Auswirkung der Parameter A,B und C.

Die Untersuchung erfolgt durch Experimentieren im Grafikfenster. Entsprechend der Regel (4) geht man systematisch vor und untersucht Sonderfälle.

Schritt 1: Zuerst untersucht man etwa die Auswirkung des Parameters *B*, wobei für *A* und *C* die Werte 1 bzw. 0 eingesetzt werden.

```
#1:  F(t) := A·SIN(B·t + C)
```

Die Belegung der Parmeter mit bestimmten Werten erfolgt entweder mit **Manage Substitute** oder man gibt in der Authorzeile einen 'Zuweisungsvektor' ein.

```
#2:  [A := 1, C := 0]

#3:  SIN(B·t)
```

Mit Hilfe der VECTOR-Funktion können für B rasch verschiedene Werte eingesetzt werden. Ein direktes Plotten des entstehenden Vektors ist nicht empfehlenswert, da bei gleichzeitigem Einzeichnen aller Funktionen in einem Fenster wohl keine Eigenschaften mehr erkennbar sind. Besser ist es, jede einzelne Funktion mit SIN(t) zu vergleichen (Abb. 3.9 bis 3.14).

```
#4:  VECTOR(SIN(B·t), B, [1, 2, 3, 0.5, -1, -2, π, 2·π])
```

#5: $\left[\mathrm{SIN}(t),\ \mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \mathrm{SIN}(3\cdot t),\ \mathrm{SIN}\left[\dfrac{t}{2}\right],\ -\ \mathrm{SIN}(t),\ -\ \mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \mathrm{SIN}(\pi\cdot t),\ \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right]$

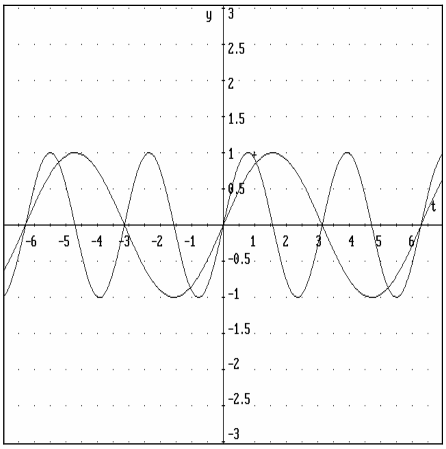

Abb. 3.33: SIN(t), SIN(2.t)

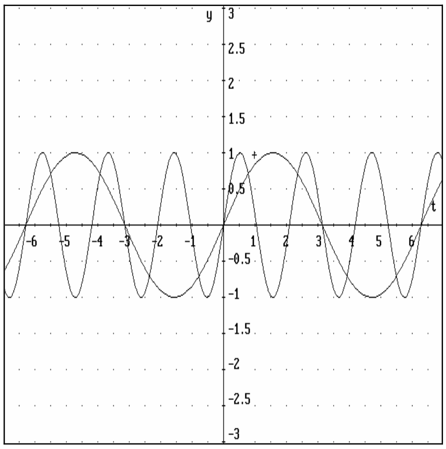

Abb. 3.34: SIN(t), SIN(3.t)

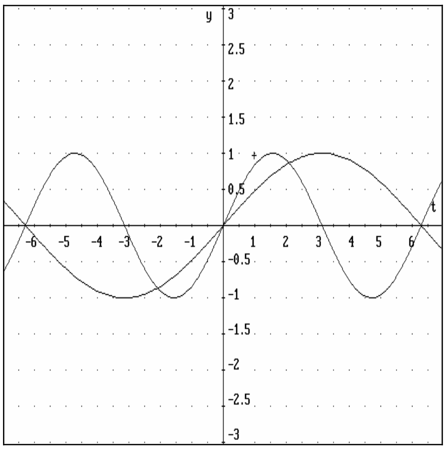

Abb. 3.35: SIN(t), SIN(t/2)

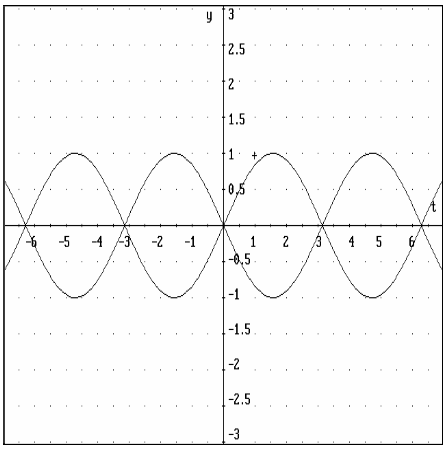

Abb. 3.36: SIN(t), SIN(-t)

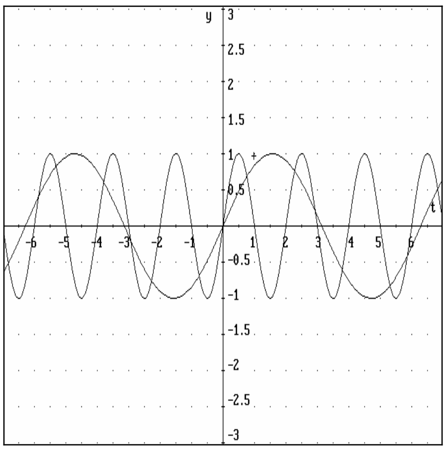

Abb. 3.37: SIN(t), SIN(π.t)

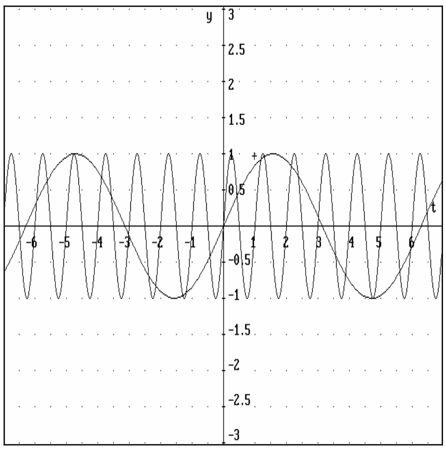

Abb. 3.38: SIN(t), SIN(2.π.t)

Bei solchen experimentellen Phasen, wo die Schüler selbsttätig am Computer 'forschen' sollen, ist es ratsam, gezielte Arbeitsaufträge, eventuell in Form von Schülerarbeitsblättern, vorzugeben und Ergebnisprotokolle zu verlangen.

Schritt 2: Nun wird der Parameter A untersucht (siehe Abb. 3.15).

```
#6:   [A := A, B := 1, C := 0]

#7:   A·SIN(t)

#8:   VECTOR(A·SIN(t), A, [1, 2, 3, 0.5, -1])

                                        SIN(t)
#9:   [SIN(t), 2·SIN(t), 3·SIN(t), ────────, - SIN(t)]
                                          2
```

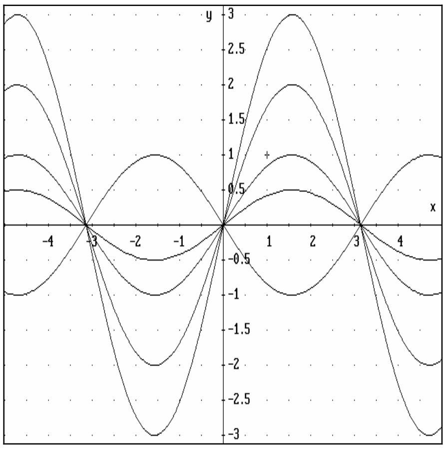

Abb. 3.39: SIN(t), 2.SIN(t)..

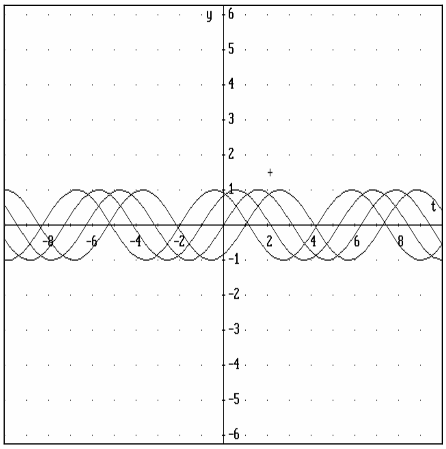

Abb. 3.40: SIN(t), SIN(t+1)..

Schritt 3: Untersuchung des Parameters C (siehe Abb. 3.16).

```
#10: [A := 1, B := 1, C := C]

#11: SIN(t + C)

#12: VECTOR(SIN(t + C), C, [0, 1, 2, -1])

#13: [SIN(t), SIN(t + 1), SIN(t + 2), SIN(t - 1)]
```

Besonders interessant ist diese experimentelle Phase für einen fächerübergreifenden Unterricht mit dem Fach Physik im Zusammenhang mit dem Kapitel '*Harmonische Schwinngungen*'.

In Physikbüchern findet man die Gleichung $y(t) = R.\mathrm{SIN}(\omega.t+\Phi)$. Für die Beschreibung des Schwingungsvorgangs sind folgende Größen von Bedeutung:

Die Elongation $y(t)$ ist der Abstand von der Ruhelage zur Zeit t.

Die Amplitude R ist der maximale Abstand von der Ruhelage.

Die Schwingungsdauer T ist die Zeit für eine volle Schwingung.

Die Frequenz f ist die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde.

Die Phasenverschiebung Φ ist die Zeitverschiebung, um die eine Schwingung früher oder später beginnt.

Ein Arbeitsauftrag in dieser Phase könnte also sein, einen Zusammenhang zwischen den Parametern *A, B* und *C* und diesen physikalischen Größen zu suchen, also experimentell zu ermitteln, daß $A = R$, $\omega = 2\pi/T$ bzw. $\omega = 2\pi f$ und $C = \Phi$ ist. Der Parameter A ist also gleich der Amplitude, B beeinflußt die Frequenz bzw. die Schwingungsdauer, und C ergibt die Phasenverschiebung.

Beispiel 3.4: Überlagerung von Schwingungen mit gleicher Schwingungsrichtung

Man untersucht schrittweise verschiedene Fälle, etwa die Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Frequenz. Immer wieder kann man in der experimentellen Phase mit Hilfe der Graphen zu Vermutungen kommen und dann in der exaktifizierenden Phase mit verschiedensten Modellen Formeln herleiten (trigonometrische bzw. vektorielle modelle oder mit Hilfe von komplexen Zahlen).

Wir wollen die Überlagerung zweier Schwingungen mit verschiedener Ferquenz untersuchen, wobei die Amplituden 1 und der Phasenunterschied 0 gewählt werden sollen:

$y_1 = \mathrm{SIN}(22.t)$ und $y_2 = \mathrm{SIN}(20.t)$

Überlagerung bedeutet mathematisch Addition der Funktionswerte:

$y_1 + y_2 = \mathrm{SIN}(22.t) + \mathrm{SIN}(20.t)$

In den 3 Fenstern können die Graphen verglichen werden (Abb. 3.17):

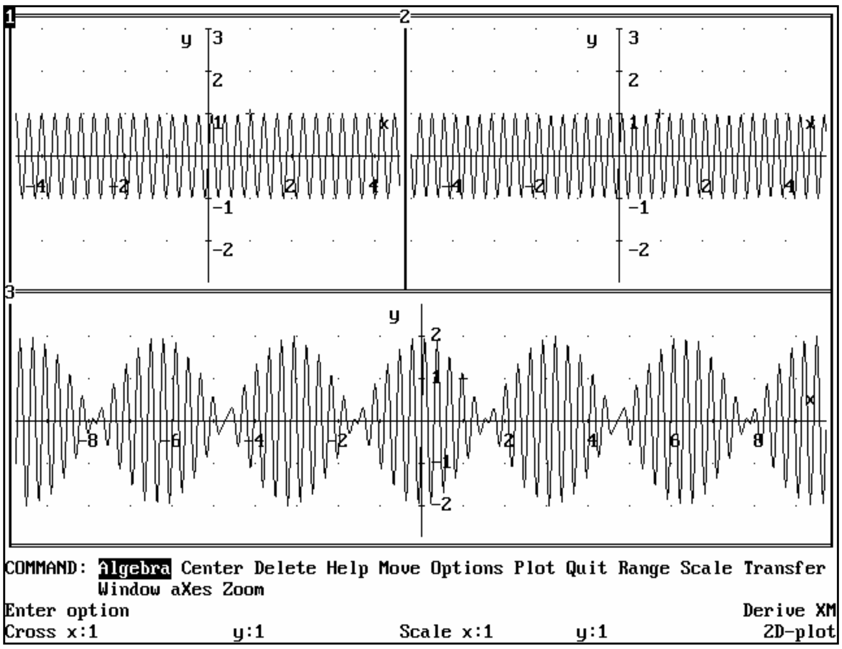

Abb. 3.41: Überlagerung von Schwingungen

Eine mögliche Interpretation wäre: Es ergibt sich eine Schwingung, deren Amplitude zwischen 0 und 2 periodisch schwankt.

Nun wird in einer exakten Phase mit Hilfe des 2. Summensatzes ein Modell entwickelt, das diesen Zustand besser beschreibt:

$$\#1: \quad \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(ß) = 2 \cdot \mathrm{SIN}\left[\frac{\alpha + ß}{2}\right] \cdot \mathrm{COS}\left[\frac{\alpha - ß}{2}\right]$$

Mit **Simplify** ist auch eine Überprüfung der Formel möglich:

$$\#2: \quad \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(ß) = \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(ß)$$

Mit **Mangage Substitute** kann man die gegebenen Argumente einsetzen:

$$\#3: \quad \mathrm{SIN}(22t) + \mathrm{SIN}(20t) = 2 \cdot \mathrm{SIN}\left[\frac{22t+20t}{2}\right] \cdot \mathrm{COS}\left[\frac{22t-20t}{2}\right]$$

$$\#4: \quad \mathrm{SIN}(22t) + \mathrm{SIN}(20t) = 2 \cdot \mathrm{COS}(t) \cdot \mathrm{SIN}(21t)$$

Eine mögliche Deutung: Es ergibt sich eine Schwingung mit $\omega = 21$, deren Amplitude $R(t) = 2.\mathrm{COS}(t)$ sich periodisch ändert ($\omega_R = 1$). Die Untersuchung der Graphen der einzelnen Terme und die experimentelle Ermittlung der Einhüllenden ($|2.\mathrm{COS}(t)|$ und $-|2.\mathrm{COS}(t)|$) erhärten diese Deutung (Abb. 3.18).

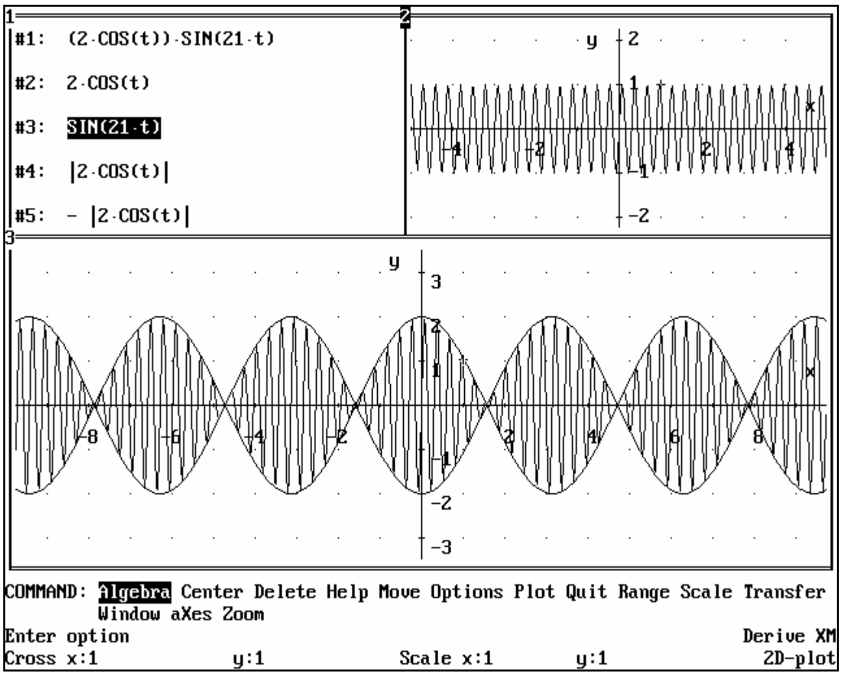

Abb. 3.42:Schwebung

Beispiel 3.5: Optimieren einer Lagerhalle

(Heuristische Regeln für das Testen, Darstellungsart wechseln)

Auf einem trapezförmigen Grundstück (Parallelseiten a und b, Höhe und gleichzeitig Länge eines Schenkels c, d.h. a⊥c) soll eine rechteckige Lagerhalle so errichtet werden, daß die Grundfläche der Halle möglichst groß ist.

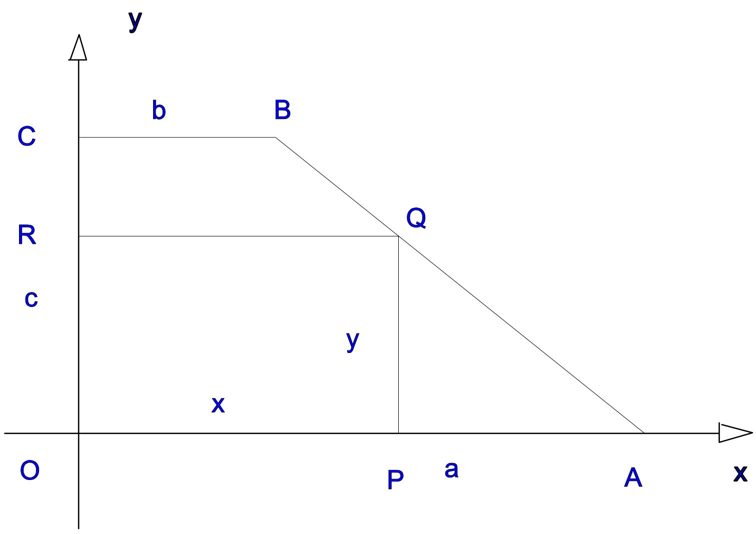

Abb. 3.43:Trapezförmiges Grundstück

Im traditionellen Mathematikunterricht wird diese Problem meist mit konkreten Maßen gestellt, und zwar häufig so, daß das mit Hilfe der Differentialrechnung ermittelte relative Extremum auch die brauchbare Lösung für das praktische Problem ist. Manchmal wird dieses Beispiel auch zum Anlaß genommen, um über Randextrema zu diskutieren.

Mit dem CAS ist es viel leichter möglich, solche Probleme allgemein zu behandeln.

#1: Precision := Approximate

Die Zielfunktion:

#2: $A(x, y) := x \cdot y$

Die Nebenbedingung:

#3: $\frac{a - b}{c} = \frac{a - x}{y}$

#4: $y = \frac{c \cdot (x - a)}{b - a}$

Nach dem Auflösen der Gleichung #3 wird der Wert für y in die Funktion #2 eingesetzt (**Manage Substitute**):

#5: $x \cdot \frac{c \cdot (x - a)}{b - a}$

Die Ableitung dieser Funktion und das Nullsetzen der Ableitung übernimmt das CAS

#6: $\frac{d}{dx} \left[x \cdot \frac{c \cdot (x - a)}{b - a} \right]$

#7: $\frac{c \cdot (2 \cdot x - a)}{b - a}$

#8: $x = \frac{a}{2}$

Die Tatsache, daß das Rezept 'erste Ableitung gleich 0 setzen' nicht immer funktioniert, könnte bei Unterstützung durch das CAS Anlaß für das Testen verschiedener Eingangsgrößen sein. Um für beliebige Eingangsgrößen a,b und c testen zu können, müssen Länge und Breite der Halle sowie der Flächeninhalt als Funktion von a,b,c definiert werden. Für das Testen ist das Ausrechnen (Zeilen #11 und #13) gar nicht notwendig, sehr wohl aber sinnvoll für das Interpretieren der Testergebnisse.

#9: $x(a, b, c) := \frac{a}{2}$

#10: $y(a, b, c) := \frac{c \cdot (x(a, b, c) - a)}{b - a}$

#11: $\frac{0.5 \cdot a \cdot c}{a - b}$

#12: A(a, b, c) := x(a, b, c)·y(a, b, c)

$$\#13: \quad \frac{a^2 \cdot c}{4 \cdot (a - b)}$$

Das Testen könnte durch Diskussion der numerischen Ergebnisse erfolgen.

#14: [a := 50, b := 20, c := 40]

Werden die Größen *a,b,c* mit Zahlen belegt, so ergibt sich bei Eingabe von *x*(*a,b,c*)=
in der Authorzeile direkt:

#15: x(a, b, c) = 25

Analog erhält man:

#16: y(a, b, c) = 33.3333

#17: A(a, b, c) = 833.333

Besser ist sicher die Untersuchung der Lage der Halle bezogen auf das Grundstück im Grafikfenster. Man definiert wie in den Zeilen #18 und #19 die Matrizen 'GRUND' und 'HALLE' als Funktionen der Eingangsgrößen *a*,*b* und *c*. Nachdem die Variablen mit konkreten Zahlen belegt sind (etwa wie in #14), können die Funktionen 'GRUND' und 'HALLE' direkt im Grafikfenster, wie in Abb.3.20 zu sehen ist, veranschaulicht werden (zu beachten ist die Einstellung **Option State** *Connected*). Es werden die Punkte [*a*,0], [*b,c*] und [0,*c*] miteinander verbunden. Die übrigen Seiten liegen auf den Achsen.

$$\#18: \quad \text{GRUND}(a, b, c) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\#19: \quad \text{HALLE}(a, b, c) := \begin{bmatrix} x(a, b, c) & 0 \\ x(a, b, c) & y(a, b, c) \\ 0 & y(a, b, c) \end{bmatrix}$$

Entsprechend wird für die nachfolgenden Eingangsgrößen vorgegangen: Die Variablenbelegung in Zeile #20 liefert bei Unterlegen von #18 und #19 die Abb. 3.21, mit #21 erhält man Abb. 3.22.

Damit ermöglicht das CAS ein rasches, umfangreiches Testen und Interpretieren. Von den Lernzielen her gesehen ist dies sicher höherwertiger als das rezepthafte Einsetzen in eine zweite Ableitung bei einem konkreten Zahlenbeispiel.

#20: [a := 50, b := 40, c := 40]

#21: [a := 50, b := 25, c := 40]

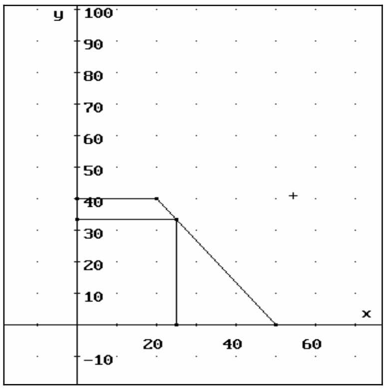

Abb. 3.44: b < a/2

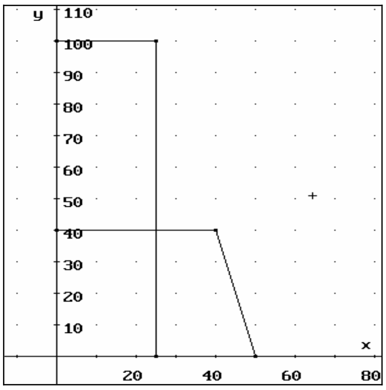

Abb. 3.45: b > a/2

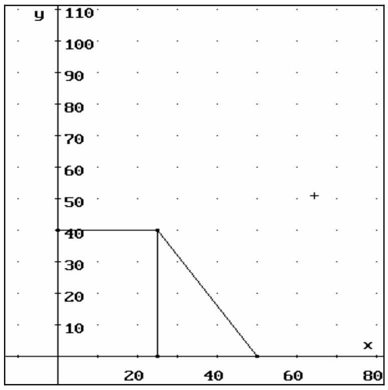

Abb. 3.46: b = a/2

Ergebnis: Das gewählte Modell liefert nur für $b \leq a/2$ eine brauchbare Lösung. Für $b > a/2$ liegt die ermittelte Halle gar nicht vollständig auf dem Grundstück.

Nun kann man natürlich auch die Brauchbarkeit des Modells für beliebige andere Eingabegrößen testen:

Modellannahme (2): b = 0

#22: [a := 50, b := 0, c := 40]

Die Visualisierung ergibt eine brauchbare Lösung innerhalb des Grundstücks (siehe Abb. 3.23).

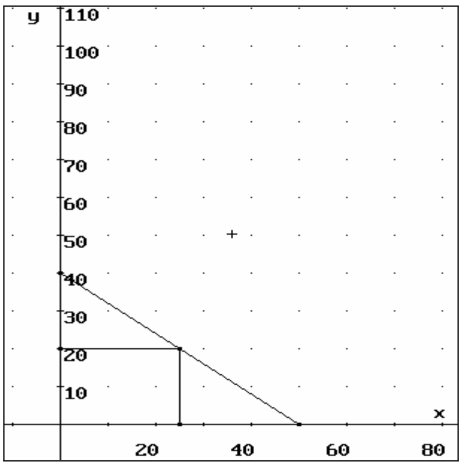

Abb. 3.47: b = 0

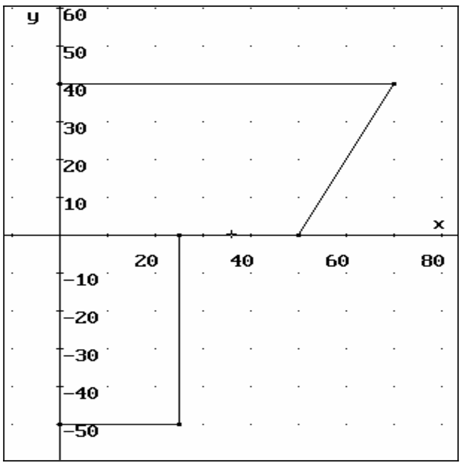

Abb. 3.48: b > a

Modellannahme (3): b > a

```
#23: [a := 50, b := 70, c := 40]
```

Hier zeigt sich überraschenderweise, daß die angebotene Halle überhaupt nicht auf dem Grundstück liegt (siehe Abb. 3.24). Die Überprüfung der Hallengröße und des Flächeninhalts bestätigt: Das gewählte Modell liefert negative Größen bei Breite und Flächeninhalt. Zum Interpretieren gehört auch die Diskussion darüber, warum dieses Modell in solchen Fällen zu sinnlosen Lösungen führt.

```
#24: x(a, b, c) = 25
```

```
#25: y(a, b, c) = -50
#26: A(a, b, c)= -1250
```

Modellannahme (4): b = a

```
#27: [a := 50, b := 50, c := 40]
```

Nun ergibt sich im Grafikfenster nur der Punkt [a/2,0]. Die Ermittlung der Hallendaten erklärt, warum.

```
#28: x(a, b, c) = 25
#29: y(a, b, c) = ±∞
#30: A(a, b, c) = ±∞
```

Die Deutung der Ergebnisse kann nun durch Interpretation der Terme $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$ und $A(a,b,c)$ für die einzelnen Modellannahmen erfolgen.

Mit dem CAS ist aber auch eine *Standpunktverlagerung* leicht möglich:

Wir betrachten die Flächeninhaltsfunktionen für die einzelnen Eingabeannahmen in Abhängigkeit von der Hallenlänge x und unter Berücksichtigung sinnvoller Definitionsbereiche.

Modellannahme (1): $b < a$ und $b \neq 0$ → Definitionsbereich: $b \leq x < a$

Modellannahme (2): $b = 0$ → Definitionsbereich: $0 < x < a$

Modellannahme (3): $b > a$ → Definitionsbereich: $a \leq x < b$

Modellannahme (4): $b = a$ → Definitionsbereich: $0 < x \leq a$

$$\#6:\quad F(x) := x\cdot\frac{c\cdot(x - a)}{b - a}$$

Die Verbindung der Punkte [b,0] und [b,$F(b)$] liefert die Intervallgrenze:

$$\#7:\quad \begin{bmatrix} b & 0 \\ b & F(b) \end{bmatrix}$$

Nun können die Graphen für die einzelnen Fälle wieder gezeichnet werden:

```
#8:  [a := 50, b := 20, c := 40]
#9:  [a := 50, b := 40, c := 40]
#10: [a := 50, b := 25, c := 40]
#11: [a := 50, b := 0, c := 40]
#12: [a := 50, b := 70, c := 40]
#13: [a := 50, b := 50, c := 40]
```

Die 3 Fälle mit Modellannahme (1) $b \le a$ (siehe Zeile #8, #9, #10) sind in Abb. 3.25 zusammengefaßt. Sie zeigen, daß das relative Maximum nur für $b < a/2$ innerhalb des Definitionsbereichs liegt, für $b = a/2$ am Rand und für $b > a/2$ außerhalb des Definitionsbereichs. Es muß also auch das Randextremum berücksichtigt werden.

Bei Modellannahme $b > a$ ergibt sich ein relatives Minimum mit negativem Funktionswert außerhalb des sinnvollen Definitionsbereichs (Abb. 3.26). Das Modell ist eben für diese Annahme nicht brauchbar.

Für die Modellannahme $b = 0$ liegt das relative Maximum wie erwartet genau in der Mitte des Intervalls (Abb. 3.27)

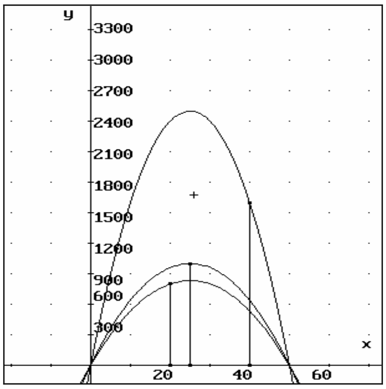

Abb. 3.49: b ≤ a

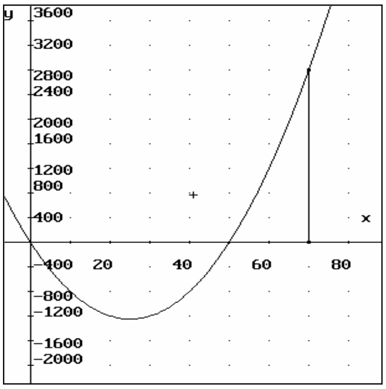

Abb. 3.50: b > a

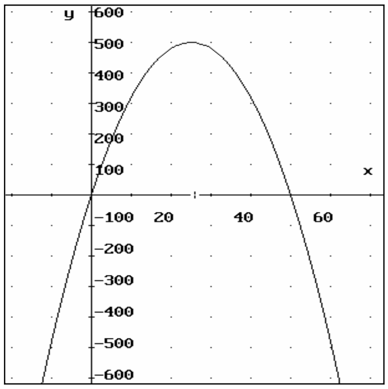

Abb. 3.51: b = 0

Der Graph für die Modellannahme $b = a$ läßt sich natürlich nicht zeichnen, da der Nenner 0 wird.

Beispiel 3.6: Experimentieren in der Prüfungssituation

(Experimentieren, Testen, Fehler suchen)

Bei einer Schularbeit (Klassenarbeit) in einer 7.Schulstufe hatten die Schüler die Aufgabe, auf vier verschiedenen Wegen eine Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Trapezes herzuleiten. Auf einem Arbeitsblatt waren vier Trapeze gezeichnet (Parallelseiten e und f, Schenkel c und Höhe m). Die aus der Zeichnung gefundenen Formeln sollten mit Hilfe von DERIVE überprüft und verglichen werden.

Über Veränderungen in der Prüfungssituation wird gerade am Beispiel dieser Schularbeit im Kapitel 5 noch ausführlich berichtet werden. Hier soll aus der großen Anzahl verschiedenster Versuche seitens der Schüler ein Fall ausgewählt werden:

Eine Schülerin, namens Kerstin, bildet eine 'Gleichungskette' aus den vier Formeln (siehe Abb. 3.28). Der Vergleich erfolgt mit Hilfe des Befehls **Simplify** (Zeile #3). Es stellt sich heraus, die vierte Formel stimmt nicht überein.

#1: "Erster Versuch"

#2: $$\frac{f-g}{2}\cdot m + g\cdot m = f\cdot m - \frac{f-g}{2}\cdot m = \frac{f+g}{2}\cdot m = 2\cdot\left[f\cdot m - \frac{(f-g)\cdot m}{8}\right]$$

#3: $$\frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(7\cdot f+g)}{4}$$

Abb. 3.52: Testen - erster Versuch

Nun geht sie zur Zeichnung zurück und versucht die Formel richtigzustellen (siehe Abb. 3.29). Der Vergleich wird zuerst wieder mit **Simplify** (#6) und danach mit **Factor** (#7) vorgenommen: Noch immer stimmt die Formel nicht.

#4: "Zweiter Versuch"

#5: $$\frac{f-g}{2}\cdot m + g\cdot m = f\cdot m - \frac{f-g}{2}\cdot m = \frac{f+g}{2}\cdot m = \frac{\frac{f\cdot m}{2}}{2} + \frac{\frac{g\cdot m}{2}}{2}$$

#6: $$\frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{f\cdot m}{4} + \frac{g\cdot m}{4}$$

#7: $$\frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{4}$$

Abb. 3.53: Testen - zweiter Versuch

Ein drittes Mal sucht Kerstin in der Zeichnung nach einer richtigen Formel. Nach der Eingabe in DERIVE (#9) und dem Vergleich mit Hilfe von **Factor** (#10) sieht man: Die Fehlersuche ist gelungen (siehe Abb. 3.30)

#8: "Dritter Versuch"

#9: $$\frac{f-g}{2}\cdot m + g\cdot m = f\cdot m - \frac{f-g}{2}\cdot m = \frac{f+g}{2}\cdot m = \frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2}$$

#10: $$\frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2}$$

Abb. 3.54: Testen - dritter Versuch

Solche Teststrategien werden in einem computerunterstützten Mathematikunterricht eine zentrale Rolle spielen. Wir behaupten, sie werden teilweise die Handkalkülfertigkeiten ersetzen. Es muß daher der Vermittlung und der Entdeckung solcher Strategien seitens der Schüler besonderes Augenmerk geschenkt werden. Wir haben daher zu diesem Thema ein eigenes Kapitel gewidmet, genannt "Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren" (Kap. 3.5.2).

Beispiel 3.7: Der 'Geist'

(Experimentieren) [vgl. Drijvers, 1994]

Von einer Polynomfunktion mit der Gestalt eines Geistes (siehe Abb. 3.31) kennt man die reellen Nullstellen: (-2,0),(-1.5,0),(-0.8,0),(1.5,0),(2.5,0). Suche durch Experimentieren die zum Geist passende Funktionsgleichung.

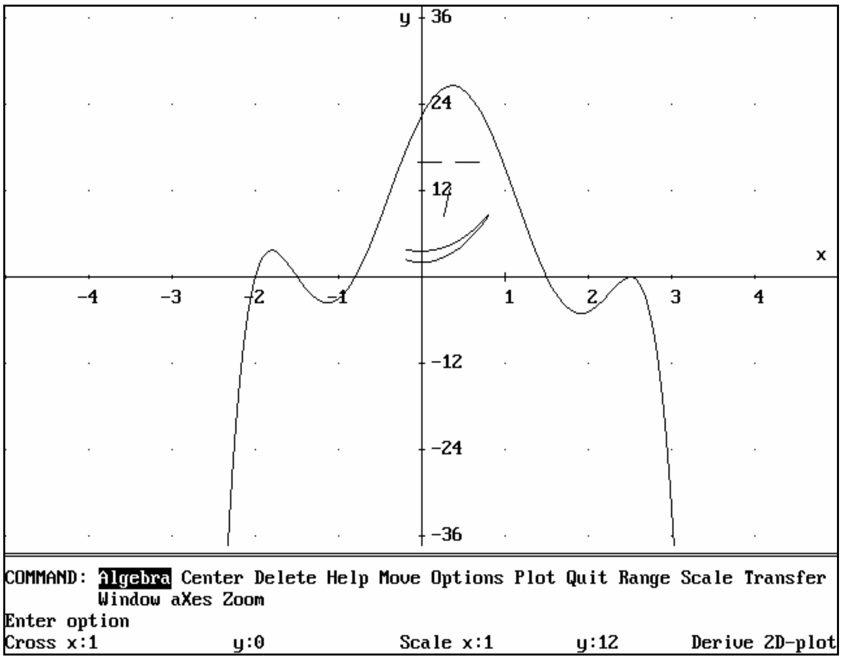

Abb. 3.55:Ein Geist

Das schon in Kap. 2 erstmals angeführte Beispiel soll hier aus einer anderen Perspektive betrachtet werden. Wie unsere Erfahrung zeigt, ist diese Art von Aufgaben für die Schüler besonders motivierend, steht doch zuerst einmal das spielerische Element im Vordergrund. Und doch werden eine Menge mathematischer Kenntnisse und Strategien benötigt oder in dieser heuristischen Phase vermittelt, die weit über die Geistersuche hinaus für die mathematische Problemlösekompetenz von Bedeutung sind: Strategien wie etwa Experimentieren, Visualisieren, Wechseln der Darstellungsart (Hin- und Herpendeln zwischen dem algebraischen und dem grafischen Prototypen des mathematischen Objektes); Kenntnisse über Polynomfunktionen usw.

Die Aufgabe ist sehr offen gestellt. Unter der Voraussetzung, daß im früheren Lernprozeß bereits Polynomfunktionen genauer betrachtet, Zerlegungen von Polynomen durchgeführt und Nullstellen berechnet wurden, wird es relativ schnell zu den ersten Versuchen kommen.

Versuch 1: Der Schüler hat 5 Informationen, die Nullstellen der Funktion, und baut sich einen Funktionsterm auf. Es werden folgende Einstellungen gewählt:

```
#1:  InputMode := Word                                        User
#2:  CASeMode := Sensitive                                    User
```

Der erste Funktionsterm wird als GEIST1 definiert:

```
#3:  GEIST1(x):=(x+2)·(x+1.5)·(x+0.8)·(x-1.5)·(x-2.5)      User
```

Dieser durch Vermutung und Experimentieren entstandene Term wird nun im Grafikfenster gezeichnet (Abb. 3.32). Auch das Finden der passenden Skalierung gehört zur Problemlösung (x:1 und y:12).

Der Graph zeigt einen eigenwilligen Geist, der seine linke Hand hebt und damit dem Schüler die Rückmeldung gibt: "Achtung, es fehlt etwas!". Aus den Erfahrungen im Unterricht ist dieser Versuch der häufigste und die Schüler interpretieren diese Rückmeldung meist richtig. Im Graphen des Geistes versteckt sich noch eine weitere Information:

Der Grad der Polynomfunktion muß gerade sein, bei $x = 2.5$ gibt es eine doppelte Nullstelle.

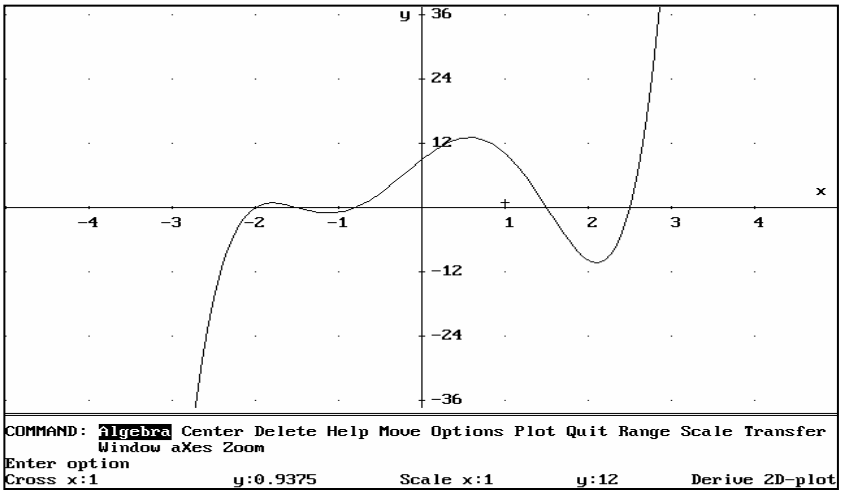

Abb.3.32: Geist aus Versuch 1

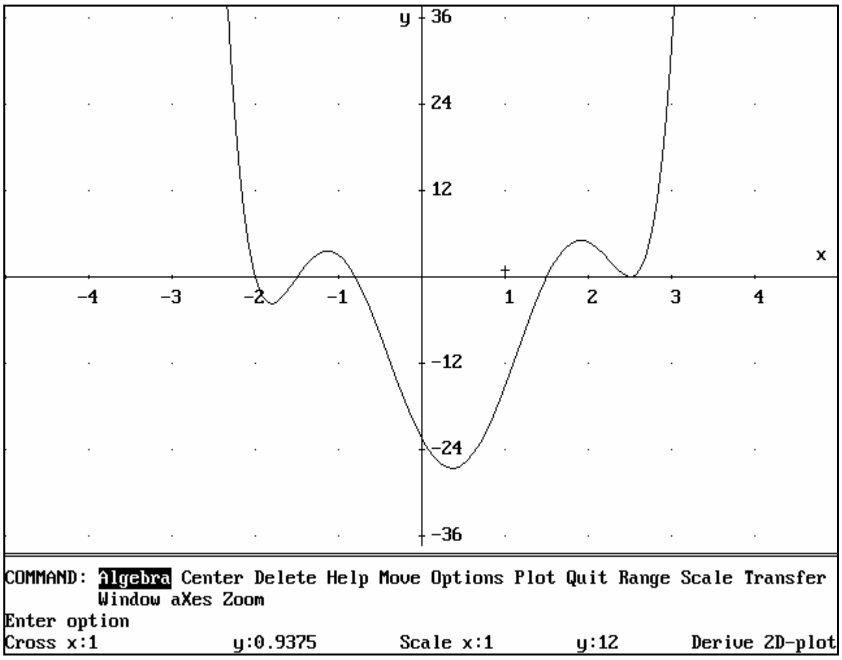

Abb. 3.33: Geist aus Versuch 2

Der Lösungsansatz könnte dann lauten:

Versuch 2: Ein Polynom sechsten Grades wird erzeugt:

```
                                                              2
#4:   GEIST2(x):=(x+2)·(x+1.5)·(x+0.8)·(x-1.5)·(x-2.5)         User
```

und durch Visualisierung getestet (Abb.3.33):

Die Lösung ist fast gefunden, es fehlt nur noch eine Spiegelung an der x-Achse. Der Term aus #4 wird mit **F3** in den **Author** geholt und verändert:

$$\#5:\quad \mathrm{GEIST}(x) := -(x+2)\cdot(x+1.5)\cdot(x+0.8)\cdot(x-1.5)\cdot(x-2.5)^2 \quad \mathrm{User}$$

Mit **Expand** läßt sich die Funktion als Summe von Potenzfunktionen darstellen

Expd(#5')

$$\#6:\ \mathrm{GEIST}(x) := -x^6 + \frac{11\cdot x^5}{5} + \frac{42\cdot x^4}{5} - \frac{289\cdot x^3}{20} - \frac{1907\cdot x^2}{80} + \frac{171\cdot x}{8} + \frac{45}{2}$$

Die Funktion wird gezeichnet (Abb.3.34):

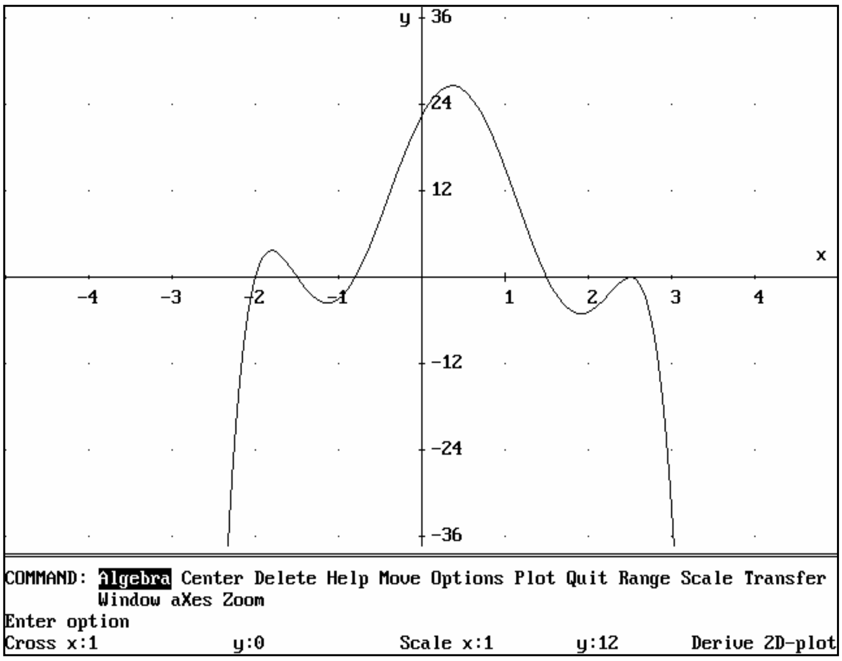

Abb. 3.34: Der Geist

Ein weiterer möglicher Versuch, dieses Problem zu lösen, geht davon aus, daß die Funtion durch ein Polynom 6. Grades festgelegt ist, jedoch die Koeffizienten der Potenzen nicht bekannt sind.

$$\#7:\quad F(x) := a\cdot x^6 + b\cdot x^5 + c\cdot x^4 + d\cdot x^3 + e\cdot x^2 + f\cdot x + g$$

Dieser Versuch scheitert vorerst daran, daß nur 5 Bedingungen gegeben sind, jedoch 7 Variablen auftreten. Man muß sich zwei weitere Informationen suchen, etwa durch Ablesen von Funktionswerten aus dem Graphen: $F(0)=45/2$ und $F(1)=243/16$. Das ergibt natürlich nur ungenaue Werte, aber für den Geist ist die Genauigkeit ausreichend. Nun kann das Gleichungssystem mit 7 Gleichungen und 7 Unbekannten vom CAS gelöst werden.

So sieht ein Gleichungssystem aus, wenn man es mit dem CAS als Black Box löst:

```
User
#8: [F(-2)= 0, F(-1.5)= 0, F(-0.8)= 0, F(1.5)= 0, F(2.5)= 0,
                                                    243        45
                                              F(1)=────── ,F(0)= ──── ]
                                                    16         2
```

Mit **soLve** erhält man die 7 Koeffizienten:

```
  Solve(#8)
             11      42           289            1907        171      45
#9: [a=-1, b=────, c=────, d= - ─────, e= - ──────, f= ─────, g = ──── ]
              5       5            20             80          8        2
```

Natürlich wollen die Schüler auch immer wissen, wie das Gesicht des Geistes entsteht (Abb. 3.31), und man könnte sie dafür begeistern es finden. Der in der Aufgabenstellung angegebene Geist mit Gesicht wurde folgendermaßen definiert:

```
 User                                                               2
#10: GEISTHÜLLE(x) := -(x+2)·(x+1.5)·(x+0.8)·(x-1.5)·(x-2.5)
                                         2
#11: MUND1(x) := IF(-0.2 < x < 0.8, 8·x  + 3.5)               User
                                          2
#12: MUND2(x) := IF(-0.2 < x < 0.8, 10·x  + 2)                User

User
#13: AUGEN(x) := IF(-0.05 < x < 0.25, 16, IF(0.4 < x < 0.7, 16))

#14: NASE(x) := IF(0.25 < x < 0.35, 50.35·x - 4.9)            User

#15: geist := [GEISTHÜLLE(x),MUND1(x),MUND2(x),NASE(x),AUGEN(x)]
```

3.3. Phase 2: Die exaktifizierende Phase

Im Gegensatz zur New-Math-Bewegung steht die exaktifizierende Phase bei unserem Konzept nicht am Anfang, sondern ergibt sich in einsichtiger Weise aus einer heuristischen Phase.

Wir haben diese Phase 'exaktifizierend' und nicht 'exakt' genannt und wollen damit verdeutlichen, daß es ja in der Mathematik grundsätzlich und erst recht im Mathematikunterricht keinen absoluten Exaktheitsanspruch gibt. Ziel dieser Phase soll es sein, auf der Kreativitätsspirale zu einem höheren Grad an Exaktheit vorzudringen.

Die Bedeutung dieser Phase ergibt sich sowohl aus allgemeinen Bildungszielen des Curriculums ("Einsichten in grundlegende wissenschaftliche Verfahrensweisen und Denkvorstellungen gewinnen") als auch aus der Bildungs- und Lehraufgabe des Fachs Mathematik:

Die Schüler sollen

"mit mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut werden",

"ein Bild der Mathematik gewinnen, das Verfahrens-, Problem-, Anwendungs- und Theorieaspekt ausgewogen repräsentiert",

"Probleme des Definierens, Beweisens, der Exaktheit erkennen".

Ziele der exaktifizierenden Phase

Die Vermutungen der heuristischen Phase sollen abgesichert werden. Die Schüler sollen vom Vermuten zum Beweisen geführt werden.

Die Schüler sollen erkennen, daß die Exaktifizierung und Standpunktsverlagerung oft auch neue Problemlösungsmöglichkeiten eröffnet.

Ein weiteres Ziel ist die Darstellung, Ordnung und Sicherung des mathematischen Wissens.

Die 'exakte' Phase soll auch ein Mittel zum Erkennen und Erforschen von Zusammenhängen sein.

Sie dient zur Ausbildung des exakten, kritischen Denkens, zur Förderung der Fähigkeit zum logischen Schließen.

Die Schüler sollen mit mathematischen Arbeitsweisen vertraut gemacht werden, das Beweisen soll geschult werden.

Die Argumentationsfähigkeit soll geschult werden.

Beispiel 3.8: Exaktifizierung des Integralbegriffs, Riemannsummen

[vgl. Dorninger/Wiesenbauer, 1994]

Gerade in der Integralrechnung beobachtet man, daß Schüler mit dem Begriff des unbestimmten Integrals nur "Aus x^n wird $x^{n+1}/(n+1)$" verbinden und mit dem Begriff des bestimmten Integrals den Flächeninhalt. Das bedeutet, daß viele Regeln des genetischen Konzepts nicht beachtet sind. Wenn man aber den Weg über Riemannsummen geht, hat man das Problem, daß man nur wenige Riemannsummen mit den Schülern tatsächlich ermitteln kann. Anders mit dem CAS: Das Modellbilden, das heißt das Ermitteln der Summenformel, erfolgt durch den Schüler, das Operieren übernimmt der Computer.

Schritt 1: Man sollte mit Funktionen beginnen, bei denen eine Ermittlung der Riemannsumme durch den Schüler und auch die Berechnung des Grenzwerts leicht möglich ist, etwa mit der linearen homogenen Funktion $f_1(x) = x$, wir ermitteln eine Riemannsumme im Intervall [0,x]

$$\text{RIEM-}\sum 1(n) = f\left(\frac{x}{n}\right).\frac{x}{n} + f\left(2.\frac{x}{n}\right).\frac{x}{n} + \ldots + f\left(n.\frac{x}{n}\right).\frac{x}{n} \quad 6$$

$$\text{RIEM-}\sum 1(n) = \frac{x}{n}.\frac{x}{n} + 2.\frac{x}{n}.\frac{x}{n} + \ldots + n.\frac{x}{n}.\frac{x}{n} = \frac{x^2}{n^2}.(1+2+3+\ldots+n) \quad 7$$

Diese arithmetische Reihe ergibt mit der bekannten Formel:

$$\text{RIEM-}\sum 1(n) = \frac{x^2}{n^2}.\frac{n}{2}.(n+1) = \frac{x^2}{2}.\frac{n+1}{n} \quad 8$$

Auch der Grenzwert kann von den Schülern mit Hilfe ihrer Kenntnisse über Zahlenfolgen

ermittelt werden: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{x^2}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{x^2}{2}$ 9

Schritt 2: Bereits bei der Funktion $f_2(x) = x^2$ erhält man eine n-gliedrige Partialsumme, für die die Schüler ohne CAS kaum eine geschlossene Form finden können:

```
           ┌ k·x ┐2
           │─────│ ·x
#1:    n   └  n  ┘
       Σ   ──────────────
      k=1        n
```

Mit **Simplify** erhält man:

```
          3
         x ·(n + 1)·(2·n + 1)
#2:    ──────────────────────
```

$$6\cdot n^2$$

Der Grenzwert kann von den Schülern ermittelt oder mit dem CAS im Sinne des White Box/Black Box-Prinzips errechnet werden.

$$\#3:\quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^3\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6\cdot n^2}$$

$$\#4:\quad \frac{x^3}{3}$$

Nun testen wir noch mit Hilfe des CAS

$$\#5:\quad \frac{d}{dx}\,\frac{x^3}{3}$$

$$\#6:\quad x^2$$

Ein typischer Auftrag für eine exaktifizierende Phase wäre, den Schritt von Zeile #2 auf Zeile #3 den Schülern als Behauptung vorzugeben und dann einen Beweis mittels vollständiger Induktion ausführen zu lassen.

Schritt 3: Bei einer Riemannsumme für die Cosinusfunktion ist man nach der Modellbildung durch den Schüler beim Operieren vollständig auf das CAS angewiesen.

$$\#1:\quad n :\in \text{Integer}$$

$$\#2:\quad \frac{x}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} \text{COS}\left[\frac{k\cdot x}{n}\right]$$

Mit **Simplify** erhält man:

$$\#3:\quad \frac{x\cdot\text{SIN}\left[x\cdot\left[\frac{1}{2\cdot n}+1\right]\right]}{2\cdot n\cdot\text{SIN}\left[\frac{x}{2\cdot n}\right]} - \frac{x}{2\cdot n}$$

Auch die Berechnung des Grenzwerts übernimmt das CAS:

$$\#4:\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{x\cdot\text{SIN}\left[x\cdot\left[\frac{1}{2\cdot n}+1\right]\right]}{2\cdot n\cdot\text{SIN}\left[\frac{x}{2\cdot n}\right]} - \frac{x}{2\cdot n}\right]$$

$$\#5:\quad \text{SIN}(x)$$

Wenn man will, kann man noch testen:

$$\#6:\quad \frac{d}{dx}\,\text{SIN}(x)$$

dx

#7: COS(x)

Beispiel 3.9: Beweisen mittels vollständiger Induktion

[Williamson, 1993]

Beweise: Die Summe der dritten Potenzen dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 9 teilbar.

Ohne Rechenhilfe wird im traditionellen Mathematikunterricht das Ziel der Beweisenschulung durch den von den Schülern zu bewältigenden Rechenaufwand aus dem Blick verloren. Im Vordergrund steht meist das Bearbeiten der Terme und nicht der logische Aufbau dieses Beweistyps. Mit dem CAS als Rechen- und Experimentierhilfe kann sich der Schüler auf das Wesentliche dieser Lernsequenz konzentrieren, nämlich auf das Erlernen von Beweistechniken.

Der erste Vorteil besteht darin, daß man verschiedene Darstellungsformen ausprobieren kann (siehe Zeile #1 und Zeile #4).

$$\#1:\quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \qquad \text{User}$$

Unter Verwendung der CAS-Befehle **Simplify** oder **Factor** kann man nun experimentieren, in der Hoffnung, daß sich vielleicht ein Faktor 9 abspalten läßt. Bei diesem Problem führt dieser Weg zu keinem Erfolg.

$$\#2:\quad 3\cdot n^3 + 9\cdot n^2 + 15\cdot n + 9 \qquad \text{Simp(\#1)}$$

$$\#3:\quad 3\cdot(n+1)\cdot(n^2 + 2\cdot n + 3) \qquad \text{Fctr(\#2)}$$

$$\#4:\quad (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \qquad \text{User}$$

$$\#5:\quad 3\cdot n^3 + 6\cdot n \qquad \text{Simp(\#4)}$$

$$\#6:\quad 3\cdot n\cdot(n^2 + 2) \qquad \text{Fctr(\#5)}$$

Mit Unterstützung des CAS als Rechenhilfe kann man auch sehr rasch die Richtigkeit der Behauptung füt die ersten 10 natürlichen Zahlen überprüfen. Die Belegung der Variablen mit Zahlen erfolgt entweder schrittweise mit **Manage Substitute** oder in einem Schritt mit der VECTOR-Funktion (Zeile #7):

$$\#7:\quad \text{VECTOR}\left[\frac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{9},\ n,\ 1,\ 10\right] \qquad \text{User}$$

$$\#8:\quad [4,\ 11,\ 24,\ 45,\ 76,\ 119,\ 176,\ 249,\ 340,\ 451] \qquad \text{Simp(\#7)}$$

Damit ist schon der erste Schritt des Beweises mittels vollständiger Induktion gemacht, der Induktionsanfang ("richtig für $n = 1$").

Nun folgt der Schluß von n auf n+1. Mit **Manage Substitute** kann in Zeile #1 n sofort durch n+1 ersetzt werden (Zeile #9).

$$\#9:\quad (n+1)^3 + ((n+1)+1)^3 + ((n+1)+2)^3 \qquad \text{Sub(\#1)}$$

$$\#10:\ 3\cdot n^3 + 18\cdot n^2 + 42\cdot n + 36 \qquad \text{Simp(\#9)}$$

$$\#11:\ 3\cdot(n + 2)\cdot(n^2 + 4\cdot n + 6) \qquad \text{Fctr(\#10)}$$

Aber auch bei $A(n+1)$ läßt sich kein Faktor abspalten. Ein nächster Versuch ist, die Differenz von Induktionsbehauptung und Induktionsannahme zu bilden, also $A(n+1) - A(n)$.

User

$$\#12:\ ((n + 1)^3 + ((n + 1) + 1)^3 + ((n + 1) + 2)^3) - (n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3)$$

Bei Bearbeitung dieses Terms mit dem CAS ergibt sich die Abspaltung des Faktors 9, was zu beweisen war.

$$\#13:\ 9\cdot(n^2 + 3\cdot n + 3) \qquad \text{Simp(\#12)}$$

Dieses Beispiel zeigt, daß experimentelles Arbeiten nicht nur typisch für die heuristische Phase ist, sondern allgemeiner für das CAS-unterstützte Lernen.

Die Bedeutung des CAS in der exaktifizierenden Phase

- Experimentieren mit dem CAS in der heuristischen Phase liefert oft Strategien für die exakte Phase.
- Komplexe Rechenvorgänge, die oft von der eigentlichen Beweisidee nur ablenken, können vom CAS übernommen werden. Das CAS kann einzelne Beweisschritte ausführen, die der Schüler dann nur noch begründen muß.
- Das Angebot verschiedener Prototypen eines Begriffs kann die Tätigkeit in der exakten Phase erleichtern. (Siehe Kap. 4.4)
- Das CAS erleichtert die Entscheidung zwischen mehreren Vermutungen durch die Chance, einfach und rasch zu testen.
- Das CAS unterstützt die Selbsttätigkeit der Schüler in der exakten Phase durch die Hilfe beim Rechnen und die vielfältigen Testmöglichkeiten.

3.4. Phase 3: Die Anwendungsphase

Mehr denn je fragen heute Schüler (und Eltern) zurecht nach dem Sinn dessen, was sie lernen sollen. In einer Glosse in einer österreichischen Tageszeitung mit dem Titel "Umwelt statt Mathe" wurde gefordert, Mathematik abzuschaffen und die Schüler mit sinnvolleren Themen zu konfrontieren, wie etwa mit Umweltfragen. Einen Vorwurf in diesem Artikel sollte man ernst nehmen, wenn der Journalist schreibt: "Ich habe Mathematik als sinnloses geistiges Turnen erlebt." So wie ein Sportler große Anstrengungen beim Kraft- oder Konditionstraining auch nur dann akzeptieren wird, wenn er erkennen kann, daß ihm diese Plage in seiner Sportart etwas bringt, sollte auch der Schüler erleben können, daß der entwickelte Algorithmus und der neue Begriff anwendbar sind, und zwar nicht nur im Sinne einer leichten Abprüfbarkeit bei der nächsten Prüfung, sondern um Probleme lösen zu können, die vorher nicht lösbar waren. Daher sollte der Weg der Lernenden auf der Kreativitätsspirale in die Mathematik an der Anwendungsphase nicht vorbeiführen. Damit können auch innermathematische Anwendungen gemeint sein. In diesem Sinn bedeuten 'Anwendungsaufgaben' Nutzung von Regeln und Formeln - oder allgemeiner - Algorithmen, die im Zuge eines Spiraldurchlaufs entwickelt wurden. Ein anderer Wortsinn von 'Anwendung' wäre: Vorgabe von realen Situationen, in denen Probleme zu lösen sind.

Schon die Reformen von Felix Klein zu Beginn dieses Jahrhunderts hatten als wesentliches Ziel, die Schulmathematik anwendungsorientierter, das heißt praxisnäher, zu machen. Als Reaktion auf die New-Math-Bewegung war seit etwa 1970 wieder der verstärkte Ruf danach zu beobachten. Die Schüler sollen erleben, daß Mathematik einen Beitrag zum Verständnis der Wirklichkeit leisten kann und dadurch den Stellenwert dieser Wissenschaft erfahren.

Es sollte dabei auch die Flexibilität der Mathematik gezeigt werden. Es geht nicht nur um einige wenige ausgewählte Anwendungen, sondern eher um die Entwicklung allgemeiner Qualifikationen des Anwendens - also ein Reflektieren des Anwendungsprozesses selbst [Fischer, 1985, S 85ff].

Trotz all dieser Forderungen und Lehrplanreformen spielen Anwendungen im derzeitigen Mathematikunterricht noch immer eine untergeordnete Rolle. Ein Grund dafür könnte die Meinung sein, daß die in der Praxis angewandten Modelle meist für die Schulmathematik viel zu komplex sind und deshalb die Realitätsbezogenheit der schulischen Anwendungsaufgaben nicht sehr groß ist. Eine weitere Erklärung könnte sein, daß reale Probleme häufig über das Fach Mathematik hinausgehendes vernetztes Denken und Arbeiten erfordern, was aber nur in fächerübergreifenden Unterrichtssequenzen zu realisieren wäre.

Dem Vorwurf der geringen Realitätsbezogenheit von zu einfachen Modellen könnte man entgegenhalten, daß die in den Naturwissenschaften verwendeten Modelle oft auch nur wenige Teilaspekte der Wirklichkeit beachten und dennoch für die Entwicklung des Naturverständnisses unverzichtbar sind. Wichtig dabei ist nur, daß das Modell nicht mit der Wirklichkeit gleichgesetzt wird, daß also bewußt gemacht wird, welcher Teilausschnitt der Wirklichkeit durch das Modell abgedeckt wird.

In diesem und im folgenden Kapitel über das Problemlösen soll die Rolle des Computers bei einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht deutlich gemacht werden. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Rolle findet sich am Ende von Kap. 3.5. Zuerst wollen wir die Bedeutung von CAS an einigen Beispielen demonstrieren.

Es gibt viele interessante Probleme, bei denen die Modellbildung den Schülern nicht zumutbar ist, wo aber das Untersuchen von Sonderfällen und das Interpretieren lohnende

Ziele sind, vor allem auch dann, wenn durch solche Aufgaben ein Beitrag für einen fächerübergreifenden Unterricht geleistet werden kann. Häufig sind solche Aufgaben im traditionellen Mathematikunterricht nicht zugänglich, weil der Rechenaufwand für die Schüler zu komplex ist. Mit dem CAS als Rechenhilfe können solche Modelle in der Zukunft dennoch bearbeitet werden.

Beispiel 3.10: Ausbreitung von Luftschadstoffen

[vgl. Dorninger, 1985, S 25]

In Wirklichkeit iat dieses Problem ist natürlich ungeheuer vielschichtig: Man müßte die Größe des Industriebetriebs, die Art der Schadstoffe, die Anzahl und Höhe der Schornsteine, das Wetter, Meßmethoden und Grenzwerte und noch vieles mehr beachten. Um mögliche mathematische Modelle entwickeln zu können, muß zuerst der vorhin beschriebene Abstraktionsprozeß in Form von Einschränkungen und Idealisierungen durchgeführt werden:

Annahmen:

Die Schadstoffquelle sei punktförmig. Als physikalisches Modell für die Ausbreitung nimmt man die Stoßemission.

Die Schadstoffe breiten sich nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit aus (kein Wind).

Es liegen keine Hindernisse wie etwa Berge vor.

Legt man den Ursprung eines Koordinatensystems an den Ort der Schadstoffquelle, so gilt für die Schadstoffkonzentration $c(x_1,x_2,x_3,t)$ im Punkt $P(x_1,x_2,x_3)$ zum Zeitpunkt $t > 0$:

$$c(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{c_0}{\sqrt{(4\pi D t)^3}}\, e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4Dt}}$$

Bei diesem Beispiel ist das allgemeine Modell vorgegeben. Man könnte die Formel allerdings am Modell des Galtonschen Brettes plausibel machen. Die Schadstoffteilchen werden als Kugeln gedeutet, die mit Luftmolekülen zusammenstoßen. Daraus ergibt sich in Analogie zum Galtonbrett die Anwendbarkeit des Modells der Normalverteilung.

Schritt 1: Modellverbesserung

Ziel ist, das Modell für das Operieren zugänglich zu machen. Wir führen den Abstand r vom Ursprung als neue Variable ein (Zeile #2) und eine neue Zeitvarible τ (#3). Die Konstante c_0 wird 1 gesetzt (#4). Darüber hinaus können noch für das praktische Problem sinnvolle Definitionsbereiche vorgegeben werden (#5, #6)

$$\#2:\quad r := \sqrt{(x1^2 + x2^2 + x3^2)}$$

$$\#3:\quad \tau := D\cdot t$$

$$\#4:\quad c0 := 1$$

$$\#5:\quad \tau :\varepsilon \text{ Real } (0, \infty)$$

$$\#6:\quad r :\varepsilon \text{ Real } [0, \infty)$$

Mit **Manage Substitute** können dann Teile des Terms unterlegt und durch die neuen Variablen ersetzt werden.

$$\#7:\quad c(x1, x2, x3, t) := \frac{c0}{\sqrt{(4\cdot\pi\cdot\tau)^3}}\cdot ê^{-(x1^2+x2^2+x3^2)/(4\cdot\tau)}$$

$$\#8:\quad c(x1, x2, x3, t) := \frac{c0}{\sqrt{(4\cdot\pi\cdot\tau)^3}}\cdot ê^{-r^2/(4\cdot\tau)}$$

Somit ist die Schadstoffkonzentration eine Funktion der beiden Variablen r und τ.

$$\#9:\quad c(r, \tau) := \frac{c0}{\sqrt{(4\cdot\pi\cdot\tau)^3}}\cdot ê^{-r^2/(4\cdot\tau)}$$

Erstes Interpretieren:

Man diskutiert den Graphen der Funktion im 3D-Grafikfenster (Abb.3.35).

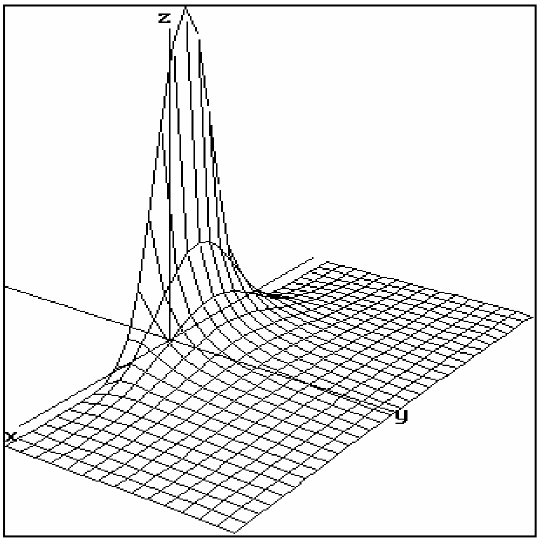

Abb. 3.35: Schadstoffkonzentration

Bei gegebenem τ (τ wird auf der y-Achse abgetragen) erkennt man deutlich die 'Normalverteilungskurve'. Mit dem Befehl **Eye** könnte man etwa die Lage des Augpunkts festlegen, also den Graphen aus verschiedenen Blickwinkeln betrachten und so manche Vermutungen durch einen besseren Einblick erhärten.

Schritt 2: Formulierung neuer Fragen

In der Regel sind für bekannte Schadstoffe Grenzwerte vorgegeben. Aus dem Graphen könnte man die Vermutung ableiten, daß ein solcher Grenzwert ab einer bestimmten Entfernung nicht mehr erreicht werden kann.

Frage: Ab welchem Abstand r^* liegt die Schadstoffkonzentration $c(r, \tau)$ stets unter einem gegebenem Wert c_g?

Bei gegebenem Wert c_g hängt r von $\tau = D.t$ (das heißt von der Zeit t) ab. Wir suchen den größten Abstand r^* von der Quelle (in Abhängigkeit von τ=$D.t$), wo die vorgegebene Konzentration c_g erreicht werden kann. Da c eine abnehmende Funktion von r ist (siehe Verlauf des Graphen in Abb. 3.35 oder interpretiere den Funktionsterm in Zeile #9), folgt schließlich, daß für $r > r^*$ der Wert c_g nicht mehr erreicht werden kann.

Zweites Modell

$$\#10: \quad cg = \frac{c0}{\sqrt{(4\cdot\pi\cdot\tau)}^{3}}\cdot ê^{-r^{2}/(4\cdot\tau)}$$

Wir wählen für c_g einen bestimmten Wert, etwa 0.5. Das bedeutet die Abnahme der Konzentration auf die Hälfte.

```
#11: cg := 0.5
```

Löst man mit **soLve** die Gleichung #10 nach r auf, erlebt man bei Verwendung von manchen CAS eine Überraschung, insbesondere dann, wenn man vorher nicht den sinnvollen Definitionsbereich bestimmt hat: Das CAS liefert komplexe Lösungen (was ja nicht bedeutet, daß es nicht auch reelle Werte geben kann). Es ist wichtig, die Schüler durch das Erlernen geeigneter Strategien auf solche Situationen vorzubereiten. Immer wieder müssen sie Ergebnisse interpretieren, die sie nicht selber produziert haben. Mit diesem Problem werden wir uns im Kapitel 3.5.2 beschäftigen.

```
#12: r = √2·î·√τ·√(3·LN(π·τ) + 4·LN(2))

#13: r = - √2·î·√τ·√(3·LN(π·τ) + 4·LN(2))
```

Zweites Interpretieren:

Der Versuch, durch Zeichnen des Graphen eine Deutung zu erhalten, scheitert vorerst. Das CAS kündigt zwar einen Graphen an, es ist aber keiner zu sehen.

Nun könnte man sich an Ansatzvereinfachungen bei Extremwertaufgaben erinnern (hat f an einer Stelle x_0 ein relatives Extremum, so auch f^2). Wir untersuchen also den Verlauf von r^2.

```
                                             2
#14: (r = √2·î·√τ·√(3·LN(π·τ) + 4·LN(2)))
```

Durch Quadrieren der Gleichung #12 erhält man:

```
       2
#15: r  = - 6·τ·LN(π·τ) - 8·τ·LN(2)

#16: r = √(|- 6·τ·LN(π·τ) - 8·τ·LN(2)|)
```

Der Graph von Zeile #15 zeigt vorerst auch kein eindeutiges Extremum (Abb. 3.36). Erst durch Zoomen findet man jenen Bereich, in dem sich das relative Extremum befindet (Abb.3.37)

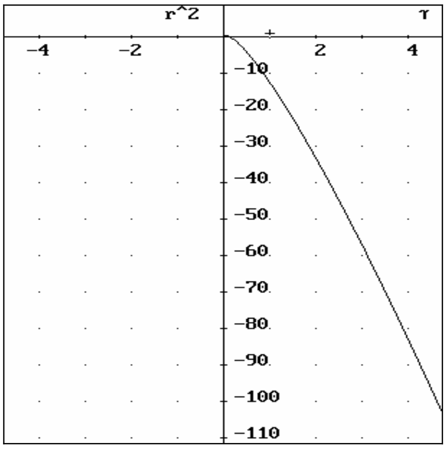

Abb. 3.36 Extremum visualisieren

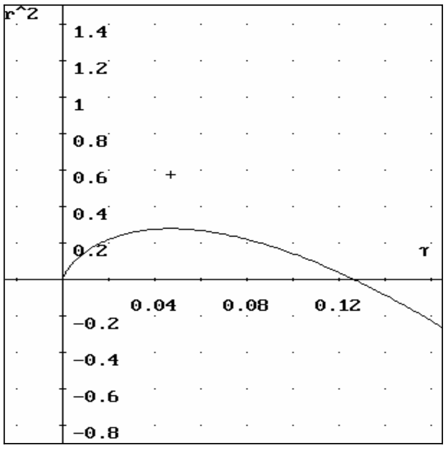

Abb. 3.37 Extremum viusalisieren

Jetzt, wo man das relevante Intervall gefunden hat (etwa [0,0.15]), könnte man auch noch den Graphen der Wurzel aus dem Betrag des Terms von #15 untersuchen (Abb. 3.38). Die Interpretation dieses Graphen führt zum Schluß, daß die Funktionen von Zeile #12 und #13 nur innerhalb des Intervalls [0,~0.125] reelle Werte annehmen.

Versucht man nun noch einmal, die Graphen von Zeile #12 und #13 in diesem Intervall zu zeichnen, so bestätigt sich diese Vermutung, und es erklärt sich damit auch, daß beim ersten Versuch (Einheiten auf beiden Achsen je 1) kein Graph zu sehen war (Abb. 3.39).

Nun könnte aus dem Graphen der Extremwert durch Suchen mit dem Cursor im *Trace*-Modus experimentell ermittelt werden. Ohne weiter zu zoomen, erhält man $\tau^* \approx 0.0475$.

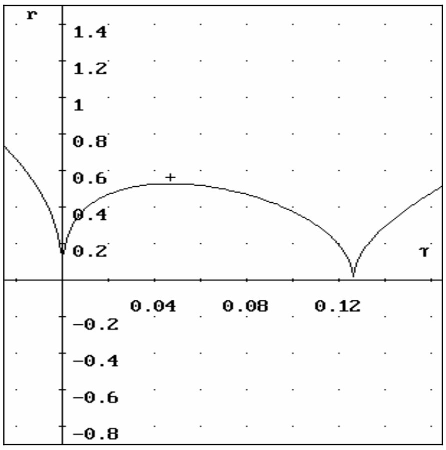

Abb. 3.38: Extremum visualisieren

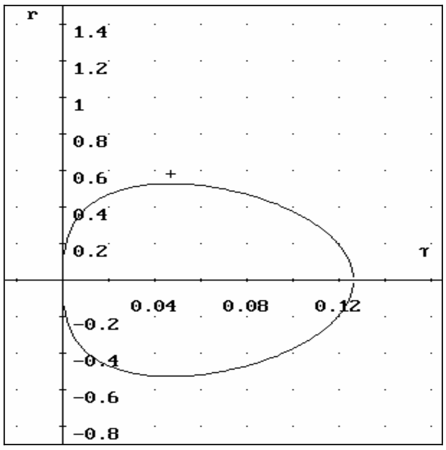

Abb. 3.39: Extremum visualisieren

Schritt 3: Lösen mit Hilfe der Differentialrechnung:

Drittes Modell: Das Rezept "1.Ableitung gleich 0 setzen" muß der Schüler aus dem Analysisunterricht mitbringen.

Die Tätigkeit des *Operierens* übernimmt das CAS als Black Box.

$$\#17: \quad \frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{2}\cdot\hat{\imath}\cdot\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{3\cdot LN(\pi\cdot\tau) + 4\cdot LN(2)}\right)$$

$$\#18: \quad \frac{\sqrt{2}\cdot\hat{\imath}\cdot(3\cdot LN(\pi\cdot\tau) + 4\cdot LN(2) + 3)}{2\cdot\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{3\cdot LN(\pi\cdot\tau) + 4\cdot LN(2)}}$$

Mit **soLve** liefert das CAS die Nullstelle dieses komplizierten Terms:

$$\#19: \quad \tau = \frac{2^{2/3}\cdot\hat{e}^{-1}}{4\cdot\pi}$$

Mit **approX** erhält man einen Wert mit gewünschter Genauigkeit. Wieder einmal wird bestätigt, daß der experimentelle Wert, der aus dem Graphen ermittelt wurde, nicht so schlecht ist.

$$\#20: \quad \tau = 0.0464710$$

Nun wird aus der bekannten Diffusionskonstanten D zuerst t^* und danach das Maximum der Entfernung r^* ermittelt, in der die Schadstoffkonzentration den Wert 0.5, also 50% der an der Quelle auftretenden Konzentration, annehmen kann.

Drittes Interpretieren:

Was jetzt noch folgen sollte, ist eine Berücksichtigung weiterer Aspekte der Wirklichkeit, ein Zurücknehmen der Idealisierungen sowie Interpretationen der Modellergebnisse für die Praxis bis hin zu Bewertungen von Umweltsituationen in Hinblick auf erforderliche Maßnahmen. Daraus könnten sich wieder neue Fragen ergeben, wie etwa: Wie würde ein Wind, der mit konstanter Geschwindigkeit v_1 in Richtung x_1-Achse weht, das Modell beeinflussen? Die Spirale könnte also noch viel weiter gedreht werden, eventuell sind neue Algorithmen erforderlich, die wieder in einer exaktifizierenden Phase abgesichert werden müssen usw. Solche Fragen würden den Rahmen dieses Buchs sprengen [vgl. Dorninger, 1988].

3.5. Problemlösen mit Hilfe von CAS

In der Diskussion über die Aufgaben der Schule der Zukunft ist immer wieder von sogenannten Schlüsselqualifikationen die Rede. Das Problemlösen ist eine, welche immer als besonders wichtig genannt wird.

Die Bedeutung der Mathematik für den Erwerb dieser Schlüsselqualifikation geht schon aus jener Definition von Mathematik hervor, die von Bruno Buchberger [Buchberger, 1981, S.1] formuliert wurde: "Mathematik ist die über Jahrhunderte verfeinerte Technik des Problemlösens durch Schließen."

Aber auch die Stationen auf der Kreativitätsspirale stellen wichtige Phasen im Problemlöseprozeß dar. Dieser Weg verlangt und fördert viele Kenntnisse und Strategien, die für das Problemlösen notwendig sind.

Da das Wort 'Problem' so vieldeutig verwendet wird, muß man zuerst einmal eine Begriffsklärung vornehmen: Ein Problem ist eine Situation, in der ein verlangtes Objekt, ein Zustand nicht unmittelbar erreichbar ist. Die Problemlösung ist eine Methode, ein Verfahren, ein Vorgang, der die Konstruktion des gewünschten Objektes ermöglicht oder einen gewünschten Zustand erreichen hilft.

Auf die Schulmathematik übertragen könnte man zwischen Aufgaben und Problemen unterscheiden:

Bei einer *Aufgabe* ist der Lösungsweg dem Schüler bekannt. Ziel des Lösens von Aufgaben ist also vor allem das Üben des vorgegebenen Lösungsalgorithmus.

Bei einem *Problem* muß der Schüler erst das Modell finden, er muß entweder aus bekannten Algorithmen den richtigen auswählen oder erst aus bekannten Regeln neue Algorithmen entwickeln.

Man denke etwa an das Beispiel: Löse die Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$. Dabei handelt es sich um eine Aufgabe, wenn der Schüler kurz davor eine Formel für das Lösen der quadratischen Gleichung gelernt hat und nur einsetzen muß. Kennt er dagegen die Formel nicht und muß selbständig aus bisher Gelerntem eine Lösungsstrategie entwickeln, wie etwa Zerlegen in Linearfaktoren oder Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat, dann ist dieses Beispiel ein sehr anspruchsvolles Problem.

Wir halten für eines der wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts die *Schulung des Problemlösens*. Das heißt, die Schüler sollen Probleme besser beschreiben und verstehen lernen, sie sollen Strategien entwickeln, um den Problemlöseprozeß besser bewältigen zu können. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es nicht, viele Beispiele zu lösen, es ist die Aneignung eines 'Metawissens' über den Problemlöseprozeß selbst notwendig. An Hand repräsentativer Aufgaben soll ein Problemlöseschema vorgestellt gemacht werden.

"Jede Aufgabe, die ich löste, wurde zu einer Regel, die später zur Lösung anderer Aufgaben diente." (Descartes: Oeuvres, Bd. VI)

"Das Ziel ist eine aktive Haltung gegenüber neuen Problemen, Mut zum Nachdenken, auch wenn kein Lösungsweg in Sicht ist, sich zu helfen wissen, bereit sein zum Formulieren und Prüfen von Vermutungen, zum systematischen Variieren von Lösungsansätzen. Der Schüler darf nicht Aufgaben, die ihm begegnen, in gehabte und nicht gehabte einteilen und bei der zweiten Sorte sogleich resignieren." [Kirsch, 1974]

Der Lehrer sollte sich überlegen, wie er durch die geeignete Wahl von Inhalten, Methoden und Werkzeugen die Problemlösefähigkeit der Schüler fördern kann.

3.5.1. Der Problemlöseprozeß

Um dem Auftrag der Schulung des Problemlösens gerecht zu werden, ist es nötig, diesen Prozeß in seiner Ganzheit zu betrachten, also beginnend bei der Analyse des meist nur sehr diffus gestellten Problems, für das ein mathematisches Modell gesucht wird. Danach ist das Modell zu bearbeiten, das heißt, es wird ein mathematisches Ergebnis ermittelt. Nun muß aber erst die Brauchbarkeit des Modellergebnisses für das gestellte Problem untersucht werden. Die so ermittelten Resultate sollten dann, eventuell gemeinsam mit Informationen über verwendeten Lösungsverfahren, übersichtlich präsentiert werden.

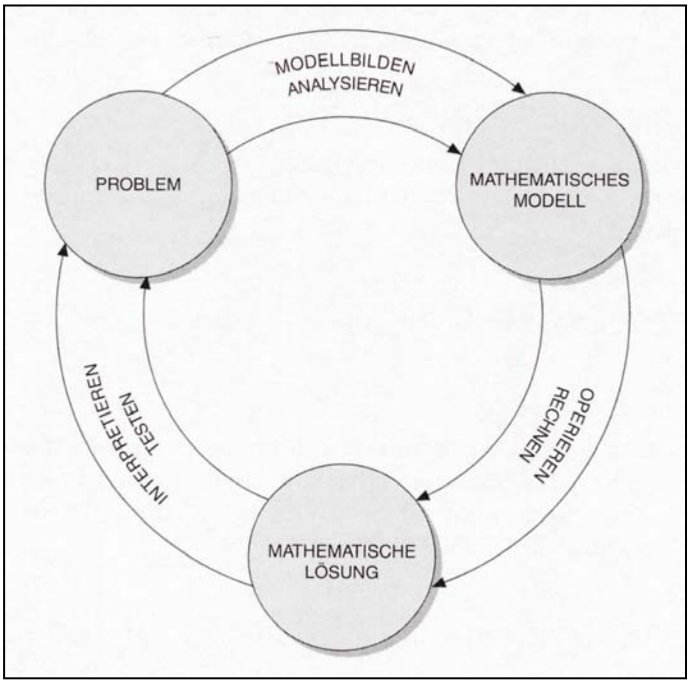

Abb. 3.40: Der Problemlösezyklus

Dem obigen Schema entsprechend kann man 3 Phasen unterscheiden:

-Modellbilden

-Operieren

-Interpretieren

Phase 1: Modellbilden

In dieser Phase geht es darum, ein für das Problem adäquates mathematisches Modell zu finden.

Wortmodelle:

Aus unscharfen Informationen über das Problem wird durch Präzisierung, Konzentration und Abstraktion eine sprachliche Formulierung gefunden, die eine direktere Übersetzung in die formale Sprache der Mathematik ermöglicht. (Beispiel: Schüler werden in eine Bank geschickt, um sich über Kredite zu informieren → Wortmodell: "Das Kapital wird verzinst, die Rate wird abgezogen".)

Algebraische Modelle:

Sie bestehen aus Variablen und Beziehungen zwischen diesen Variablen. Beziehungen können Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen (in Termdarstellung oder rekursiv definiert) sein. Neu ist bei Nutzung des Computers die Möglichkeit, rekursive Modelle zu bearbeiten, Programme zu erstellen oder fertige Module zu nutzen.

Grafische Modelle:

Es können die Visualisierungsmöglichkeiten des CAS in der 2D- oder 3D-Grafik genutzt werden. Operieren kann auch Erforschen des Graphen bedeuten, und nicht nur Rechnen.

Numerische Modelle:

Tabellen mit numerischen Größen, die eine Beziehung zwischen Variablen beschreiben.

Tätigkeiten beim Modellbilden

Problemanalyse: Ausgehend von dem oft noch unscharf formulierten Problem versucht man zunächst, eine präzisere verbale Formulierung des Problems zu finden (Buchberger: "Eine exakte Problembeschreibung ist oft schon die 'halbe' Lösung"). Einige wichtige Regeln für die Problemanalyse:

- Analysiere die Ausgabegrößen: "Was ist gesucht?"
- Analysiere die Ausgabebedingung: "Welche Eigenschaften sollen die gesuchten Größen haben?"
- Analysiere die Eingaben: "Was ist gegeben?"
- Analysiere die Eingabebedingung sowie die für Ein- und Ausgabe sinnvollen Definitionsbereiche.
- Analysiere die für ein Lösungsverfahren zugelassenen Grundoperationen: "Welche Operationen und Begriffe stehen zur Verfügung?"

Eine ausführlichere Beschreibung des computerunterstützten Problemlösens findet man etwa im genetisch aufgebauten Hochschullehrbuch "Mathematik für Informatiker" [Buchberger, 1981].

Erste Modellentscheidung: Häufig ist das Modellbilden ein Kreisprozeß, bei dem ein erstes Modell einmal erprobt, analysiert und danach verbessert wird. Auf heuristische Strategien, die bei der Modellfindung hilfreich sein können, wird im folgenden Kapitel ("Heuristische Phase des Mathematiklernens") näher eingegangen. Im klassischen computerlosen Mathematikunterricht sind solche Problemkreisläufe sehr selten, da das mehrmalige Durchlaufen des Schemas ohne Computer zu zeitaufwendig ist und die Modelle oft vom Rechenaufwand her zu komplex werden, oder schon das erste Modell zu kompliziert ist.

Phase 2: Operieren

Die Lösung eines Problems besteht in der Angabe eines Verfahrens (Algorithmus, Programm oder Methode), das nur erlaubte Operationen verwendet, die Eingangsvariablen nicht verändert und eine den Ausgabebedingungen genügende Problemlösung liefert.

Im klassischen Mathematikunterricht liegt der Schwerpunkt der Tätigkeit eindeutig bei der Phase des Operierens, wobei darunter meist Rechnen zu verstehen ist. Das Rechnen wurde oft Selbstzweck, es wurde gerechnet, weil man etwas Abprüfbares brauchte. Das CAS bietet in diesem Bereich sowohl Entlastung als auch neue Möglichkeiten und ermöglicht dadurch eine stärkere Beachtung der anderen Phasen des Problemlöseprozesses.

Phase 3: Interpretieren

Dieses Schema darf nicht so verstanden werden, daß die einzelnen Phasen seriell abgearbeitet werden. Das Interpretieren beginnt bereits in der ersten Phase bei der Problemanalyse und sollte während des Problemlöseprozesses eine ständige begleitende Tätigkeit sein. Auf dem gesicherten Boden der mathematischen Logik bewegt man sich ja nur zwischen mathematischem Modell und mathematischer Lösung. Darüber hinaus besteht das Interpretieren in einem Abwägen der Brauchbarkeit des Modells und in einem Bewerten der Lösung.

Tätigkeiten beim Interpretieren:

- Überprüfen der Richtigkeit und Vollständigkeit der mathematischen Lösung. Die bei Verwendung des CAS gegebenen Möglichkeiten und Probleme, die sich an der Schnittstelle Operieren - Interpretieren ergeben, werden im folgenden Kapitel behandelt.
- Testen der Brauchbarkeit des Modells für das gestellte Problem.

- Bewerten der Brauchbarkeit der mathematischen Lösungen für das Problem.
- Untersuchung der Auswirkung von Parametern auf die Lösung.
- Überlegungen zur Modellverbesserung.

Präsentation und Dokumentation der Lösung:

Insbesondere dann, wenn nicht nur innermathematisch eng gesteckte Probleme zu lösen sind, die nur eine Lösung haben, ist diese Tätigkeit ein wesentlicher Bestandteil des Schemas. Der Problemlöser muß seine Lösung entweder dem Problemsteller oder einem zukünftigen Benutzer präsentieren, und zwar nach Möglichkeit in der Sprache des Adressaten.

Beispiel 3.11: Roboterkinematik

[vgl. Buchberger/Kutzler, 1986]

Ein Problem aus dem Bereich der inversen Roboterkinematik: Gegeben sei ein zweiarmiger Roboter im zweidimensionalen Raum. Es sollen die Lage und die relative Bewegung der Gelenke der Roboterarme bestimmt werden, um eine vorgegebene Positionierung zu erreichen.

Modellbilden

Im Gegensatz zur Schulmathematik, wo die gestellten Probleme häufig schon in Form konkreter Arbeitsanweisungen formuliert sind ("Berechne...", "Ermittle den Schnittpunkt..." usw.), ist man in der Praxis mit solchen offenen Aufgaben konfrontiert.

Die erste Tätigkeit besteht darin, von der Realität eines Roboters mit Armen aus Metall, mit Motoren und Greifzangen usw. zu abstrahieren, also Größen und Beziehungen zwischen diesen Größen derart zu beschreiben, daß eine Übersetzung in eine formale mathematische Sprache möglich wird. Man könnte sagen, der erste Schritt besteht darin, Probleme der realen Welt in eine 'mathematische Welt' zu übertragen. Denn erst diese Sprache des mathematischen Universums wird in die formale mathematische Sprache übersetzt [Buchberger, 1995]. Im Einleitungskapitel über Problemlösen haben wir von Wortmodellen und Wortformeln gesprochen.

Analyse der Eingaben und Eingabebedingungen:

Der erste Arm OD sei um den Punkt O drehbar und habe die Länge a.

Der zweite Arm DP sei um D drehbar und habe die Länge b.

Man kennt darüber hinaus die kartesischen Koordinaten des Punkts P, der durch Drehbewegung der beiden Roboterarme um O bzw. um D erreicht werden soll: $P:=[p_x,p_y]$.

Analyse der Ausgabegrößen und Ausgabebedingungen:

Gesucht sind die Lage des Drehpunkts $D:=[d_x,d_y]$ und vor allem die Winkel $\alpha = \measuredangle x^+OD$ und $\beta = \measuredangle ODP$, um die die beiden Arme OD und DP gedreht werden müssen, um P zu erreichen.

Zur Übersetzung in das mathematische Universum, das heißt zur Analyse, die ja zu ersten Modellversuchen führen soll, gehört bei solchen Aufgaben natürlich eine Zeichnung (Abb. 3.41).

Gerade an der Zeichnung erkennt man deutlich den Abstraktionsschritt, man wird ja nicht richtige Arme oder Greifzangen einzeichnen, sondern nur jene abstrakten mathematischen Größen, die für die Modellfindung von Bedeutung sind.

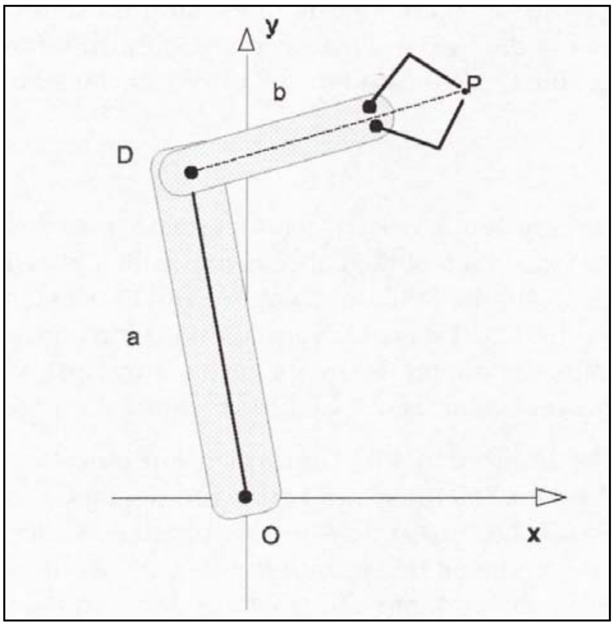

Abb. 3.41: Modellbilden

Diese Zeichnung ist schon ein sehr brauchbarer Ausgangspunkt für die Modellfindung. Es gilt zu analysieren, welche Verfahren, welche Operationen und Begriffe der Schüler auf dieser Lernstufe zur Verfügung hat. Sollte kein geeignetes Verfahren verfügbar sein, müßte dieses Problem im Sinne der Kreativitätsspirale (siehe Kap. 3.1.) zum Anlaß genommen werden, ein neues Verfahren zu entwickeln.

In Österreich paßt dieses Problem in die 10.Schulstufe, zu Lernbereichen wie Analytische Geometrie und Trigonometrie.

Die Schüler könnten also entweder ein analytisches (Abb. 3.42) oder ein trigonometrisches Modell (Abb. 3.43) wählen.

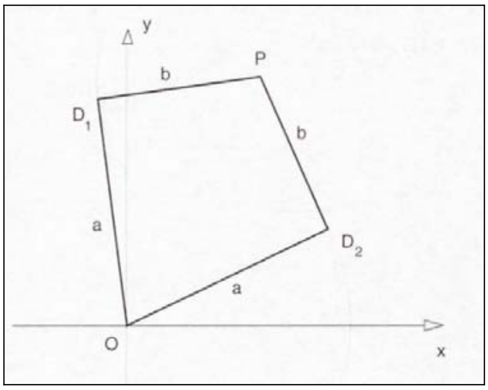

Abb. 3.42: Modellbilden – analytisch

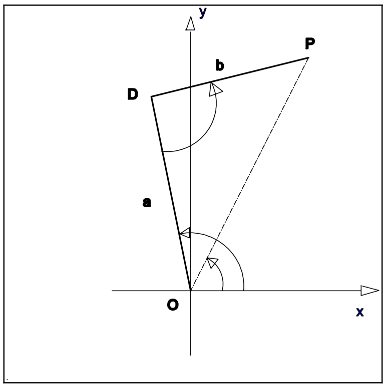

Abb. 3.43: Modellbilden - tigonometrisch

Natürlich könnte man dieses Problem mit konkreten Zahlen auch im traditionellen Mathematikunterricht ohne Computer behandeln. Der Vorteil des CAS besteht in der allgemeinen Bearbeitung. Das bringt erstens mehr Praxisnähe, denn schließlich geht es um die Robotersteuerung für beliebige vorgegebene Punkte, und zweitens erkennt der Schüler, daß bei solchen realen Problemen das Interpretieren und Testen besondere Bedeutung haben.

Häufig ist das Problemlösen ein Kreisprozeß: Ein erstes Modell wird analysiert, entweder sofort verbessert oder erprobt, getestet und danach verbessert. Im Zuge der Analyse dieses Problems müßte man bei allgemeiner Behandlung die Frage stellen: Welchen Bereich kann der Roboter überhaupt erreichen? Man kann diese Frage aber auch einmal ausklammern, sich für ein Modell entscheiden, operieren und sie dann erst beim Testen stellen.

Wir wollen in diesem Kapitel annehmen, der Schüler habe sich für das *Modell der analytischen Geometrie* entschieden. In Kapitel 5 wird dann noch das trigonometrische Modell vorgestellt.

Erstes Modell: Schon aus der Zeichnung (Abb. 3.42) erkennt man: Es kann für den Drehpunkt 2 Lösungen geben. Man ermittle die beiden Lösungen als Schnittpunkte eines Kreises um O mit Radius a und eines Kreises um P mit Radius b (siehe Abb. 3.44 Zeilen #3 und #4).

Operieren

Nun gilt es, dieses Gleichungssystem zu lösen. Das Operieren wird zwar dem CAS überlassen, das Planen und Anordnen obliegt aber dem Schüler. Es wird die Differenz der beiden Gleichungen gebildet (#5). Dazu werden mit **F4** die Gleichungen #4 und #3 in die Authorzeile geholt. Mit **Simplify** erhält man eine lineare Gleichung in den Variablen x und y (#6), die dann mit **soLve** nach y aufgelöst wird (#7). Danach wird der Term mit **Manage Substitute** in die Gleichung #3 eingesetzt.

Ein 'Verschönern' der Gleichung, d.h. ein Umformen auf eine Normalform ist nicht mehr notwendig. Mit dem Befehl **soLve** kann eine solche Gleichung sofort gelöst werden (siehe Abb. 3.45). Die in #9 und #10 erkennbaren 'wilden' Lösungen machen deutlich, daß eine allgemeine Behandlung ohne CAS wohl nicht möglich wäre. Nicht einmal die Hälfte des riesigen Terms ist auf dem Schirm sichtbar. Mit **Manage Subtsitute** werden die unterlegten Lösungsterme für x in die Gleichung #7 eingesetzt, und man erhält die zugehörigen Lösungen für y.

Auch diese riesigen Terme muß der Schüler weder schreiben, noch ihre Struktur analysieren, er muß sie nur mit **F3** oder **F4** in die Authorzeile transportieren oder mit **Manage Substitute** in andere Ausdrücke einsetzen.

#1: Precision := Approximate

#2: PrecisionDigits := 10

#3: $x^2 + y^2 = a^2$

#4: $(x - px)^2 + (y - py)^2 = b^2$

#5: $((x - px)^2 + (y - py)^2 = b^2) - (x^2 + y^2 = a^2)$

#6: $-2 \cdot px \cdot x - 2 \cdot py \cdot y + px^2 + py^2 = b^2 - a^2$

#7: $y = -\dfrac{2 \cdot px \cdot x - a^2 + b^2 - px^2 - py^2}{2 \cdot py}$

#8: $x^2 + \left[-\dfrac{2 \cdot px \cdot x - a^2 + b^2 - px^2 - py^2}{2 \cdot py}\right]^2 = a^2$

Abb.3.44: Operieren

```
                4       2   2      2      2      4      2     2      2      4     2
       py·√(- a   + 2·a ·(b  + px  + py ) - b  + 2·b ·(px  + py ) - px  - py ·
#9:  x = ─────────────────────────────────────────────────────────────────────────
                                                            2     2
                                                      2·(px  + py )

            2     2     2     2               4      2   2      2      2     4
       px·(a  - b  + px  + py ) - py·√(- a  + 2·a ·(b  + px  + py ) - b  + 2·
#10: x = ─────────────────────────────────────────────────────────────────────────
                                                            2     2
                                                      2·(px  + py )

                      4      2   2      2      2      4      2      2      2
               py·√(- a  + 2·a ·(b  + px  + py ) - b  + 2·b ·(px  + py ) - px
         2·px·───────────────────────────────────────────────────────────────────
#11:                                                                 2     2
                                                               2·(px  + py )
     y = - ────────────────────────────────────────────────────────────────────────

            2     2     2     2               4      2   2      2      2     4
       py·(a  - b  + px  + py ) - px·√(- a  + 2·a ·(b  + px  + py ) - b  + 2·
#12: y = ─────────────────────────────────────────────────────────────────────────
                                                            2     2
                                                      2·(px  + py )
```

Abb.3.45: Operieren

Eine weitere Stärke von CAS und insbesondere von DERIVE beim anwendungsorientierten Problemlösen ist die Möglichkeit, durch Definition von Funktionen kleine Programmodule zu bauen, die dann entweder als 'Unterprogramme' verwendet werden oder letztlich die Lösung darstellen. Solche Module haben vor allem beim Interpretieren und Testen große Vorteile.

Zuerst werden die beiden Lösungen für den Drehpunkt als Funktionen der Eingabegrößen p_x, p_y, a und b definiert, indem man den Vektor aus dem passenden Lösungspaar x und y zusammenbaut ($D1$ in Zeile #16 und $D2$ in Zeile #17 in Abb. 3.46).

```
#15: D := [0, 0]

                               ┌           4      2   2      2      2      4      2      2
                               │ py·√(- a  + 2·a ·(b  + px  + py ) - b  + 2·b ·(px  +
#16: D1(px, py, a, b) :=       │ ──────────────────────────────────────────────────────────
                               │
                               └                                                    2·(p

                               ┌    2     2     2     2               4      2   2      2
                               │ px·(a  - b  + px  + py ) - py·√(- a  + 2·a ·(b  + px
#17: D2(px, py, a, b) :=       │ ──────────────────────────────────────────────────────────
                               │
                               └                                                    2·(p

#18: D1(-4, 5, 5, 3) = [-1.001713152, 4.898629477]

#19: D2(-4, 5, 5, 3) = [-4.559262456, 2.052590034]

#20: D1(-4, 7, 5, 3) = [-2.492307692 + 0.4205519056·î, 4.361538461 + 0.240315374

#21: D1(0, 0, 2, 5) = [?, ?]
```

Abb. 3.46: Erste Ergebnisse

Schritt 3: Interpretieren

Diese Drehpunktsmodule können nun für ein erstes Interpretieren und Testen verwendet werden. Die Zeilen #20 und #21 in Abb. 3.46 zeigen, daß es nicht für beliebige Eingabegrößen eine brauchbare Lösung gibt. Innermathematisch interpretiert bedeutet das: Die beiden Kreise schneiden einander nicht, sie könnten allerdings auch identisch sein. Vom Roboterproblem her gesehen ist zu folgern: Nicht jeder Punkt der Ebene kann bei bestimmten Armlängen erreicht werden.

Ein weiteres Modul ARME ist nun sehr einfach zu konstruieren: Man definiert ARME1 und ARME2 als Funktionen der Eingangsgrößen. Die Module sind nichts anderes als die Streckenzüge *OD1P* bzw. *OD2P* (siehe Abb. 3.47)

#20: D1(-4, 7, 5, 3) = [-2.492307692 + 0.4205519056·î, 4.361538461 + 0.240315374

#21: D1(0, 0, 2, 5) = [?, ?]

#22: ARME1(px, py, a, b) := [0, D1(px, py, a, b), [px, py]]

#23: ARME2(px, py, a, b) := [0, D2(px, py, a, b), [px, py]]

#24: ARME1(7, 4, 6, 5) = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.934354405 & -0.8851202101 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

#25: ARME2(7, 4, 6, 5) = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.250260978 & 5.562043287 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

#26: $x^2 + y^2 = 6^2$

#27: $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$

Abb. 3.47: Testmodule

Nun kann man die verschiedenen Lösungen des mathematischen Modells im Grafikfenster interpretieren, denn bei Eingabe von ARME1(7,4,6,5) zeichnet das CAS mit dem Befehl **Plot** die Roboterarme mit den Längen 6 und 5 zum Punkt *P*(7,4). ARME2 ergibt mit denselben Parametern die zweite Lösung für den Drehpunkt. Wichtig dabei ist, daß aufgrund der Bildschirmeinstellung die Punkte des Streckenzuges verbunden werden (bei DERIVE: **Transfer State** *Connected*). Außerdem könnte man noch die beiden Kreise, deren Schnitt die Lösung ergeben hat, einzeichnen. Ab der Version 3.0 kann DERIVE solche Kreise auch in impliziter Form zeichnen (siehe Abb.3.48).

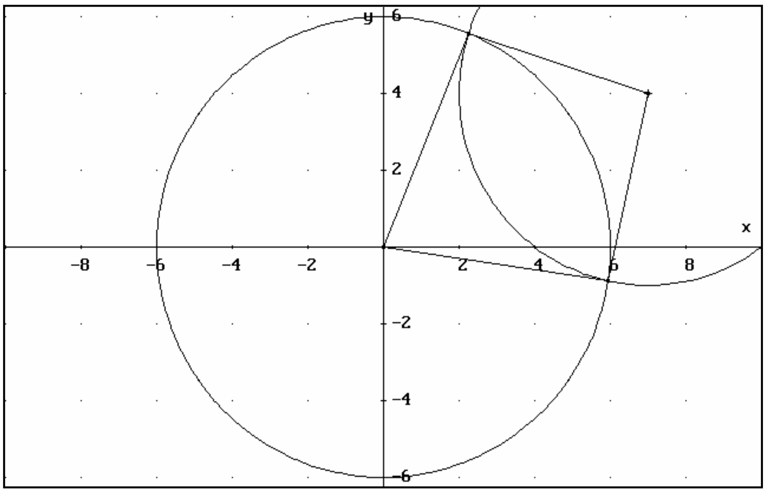

Abb. 3.48: Die analytische Lösung

Mit Hilfe der VECTOR-Funktion von DERIVE kann das Testen noch rationeller gestaltet werden. Es können etwa sofort alle Lösungen ermittelt werden, die man erhält, wenn die x-Koordinate des Punkts *P* alle Werte von

-15 bis +15 mit der Schrittweite 3 durchläuft (siehe Zeile #30 in Abb. 3.49). Genauso kann man eine Armlänge, etwa a, Werte zwischen 1 und 11 mit Schrittweite 0.5 annehmen lassen (Zeile #34). Im Grafikfenster können dann die Ergebnisse untersucht und interpretiert werden (siehe Abb. 3.50 und 3.51). Die nicht von Roboterarmen erreichbaren Punkte sind auch zu sehen, etwa bei $x = -12$ oder $x = +12$.

Auch wenn das Spielen mit Graphen an sich schon einen Bildungs- und Motivationswert hat, sollten den Schülern, im Interesse des Zieles "Schulung des strukurierten Problemlösens", Arbeitsaufträge zur Dokumentation ihrer Beobachtungen gegeben werden, das heißt, gelenktes Entdecken ist die für dieses Problemlösen adäquate Schüleraktivität.

So müßte spätestens in der Interpretationsphase der Bereich angegeben werden können, den ein Roboter mit vorgegebener Armlänge erreichen kann: P muß in einem Kreisring mit

$|a-b| \leq OP \leq a+b$ liegen.

```
#30: VECTOR(ARME2(x, 4, 6, 5), x, -15, 15, 3)

       [[                 0                               0              ]   [
#31:   [[ -7.842323651 - 1.408345456·î  2.091286307 - 5.281295461·î ], [ -6.4125 -
       [[                -15                              4              ]   [

#32: VECTOR(ARME1(3, 4, a, 2), a, 1, 11, 0.5)

       [[          0                      0          ]   [         0
#33:   [[ 1.32 + 1.567673435·î  1.76 - 1.175755076·î ], [ 1.395 + 1.421126313·î  1
       [[          3                      4          ]   [         3

#34: VECTOR(ARME2(3, 4, a, 2), a, 1, 11, 0.5)

       [[          0                      0          ]   [         0
#35:   [[ 1.32 - 1.567673435·î  1.76 + 1.175755076·î ], [ 1.395 - 1.421126313·î  1
       [[          3                      4          ]   [         3
```

Abb.3.49: Testen und Interpretieren

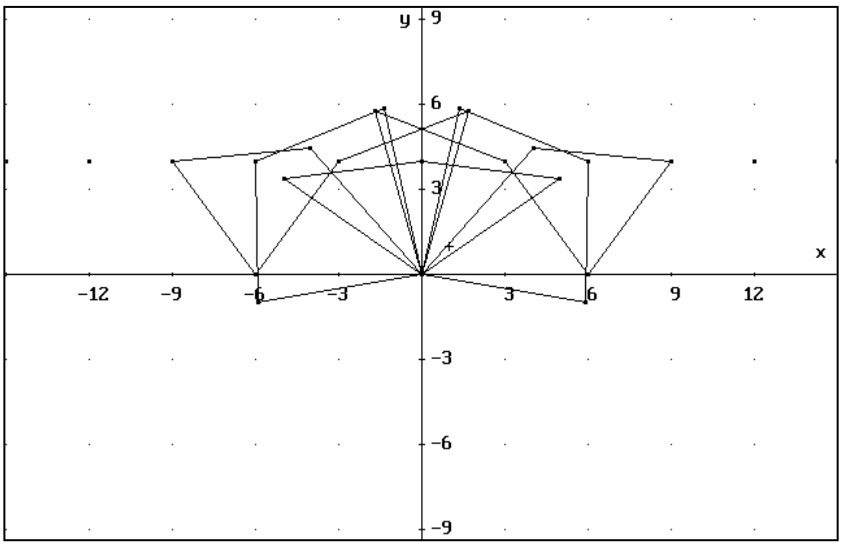

Abb.3.50: Testen und Interpretieren

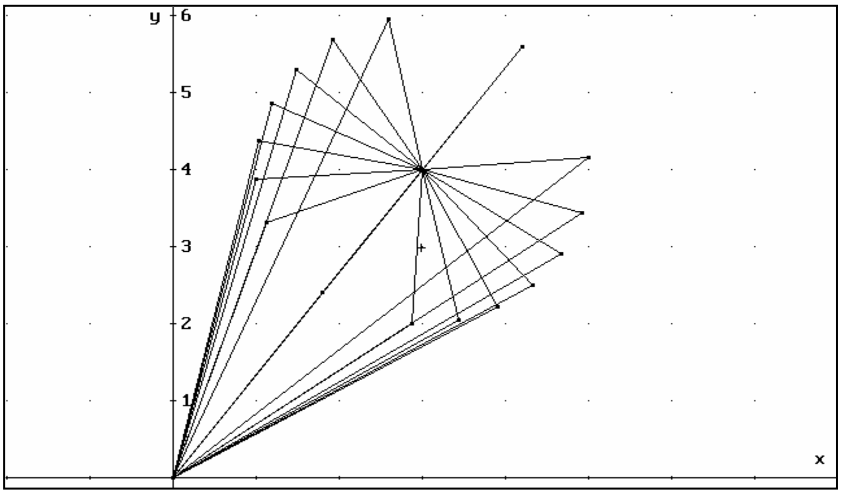

Abb.3.51: Testen und Interpretieren

Schritt 4: Modellverbesserung

Ziel dieser Testserien ist ja schließlich neben der Interpretation auch eine daraus resultierende Verbesserung und Weiterentwicklung des Modells.

Folgende Fragen könnten in einem zweiten Schleifendurchlauf diskutiert und bearbeitet werden:

- Wie kann man durch Abfragen schon von der Eingabe her die Lösungen auf diesen Bereich, das heißt auf diesen Kreisring, beschränken?
- Wie ermittelt man die gesuchten Winkel, welche die eigentlichen Steuerungsgrößen für die Bewegung des Roboters sind?
- Wie programmiert man ein 'Winkelmodul'?
- Wie würde der Problemlöseprozeß bei einem trigonometrischen Modell aussehen?

Im folgenden Beispiel sollen die neuen Möglichkeiten für anwendungsorientiertes Problemlösen aufgezeigt werden, die sich aus der Verwendung iterativer und rekursiver Modelle ergeben. Es wurde dadurch ein neuer Lösbarkeitsbegriff geschaffen: Lösen heißt Nutzen des iterativen Modells zur Simulation, sowie Untersuchen der Auswirkung von Parametern auf die Lösung.

Beispiel 3.12: Sterile Insektentechnik (S.I.T.)

[vgl. Timischl, 1988, S. 22]

Eine Insektenpopulation mit anfangs x_0 Weibchen und x_0 Männchen möge bei natürlichem Wachstum pro Generation jeweils auf das R-fache anwachsen. Zur Bekämpfung der Population wird pro Generation eine bestimmt Anzahl S von sterilen Männchen freigesetzt, die sich mit der Naturpopulation völlig vermischt (Sterile Insektentechnik - S.I.T.). Mögliche Modellannahme: x_0 = 1 Million.

Problemanalyse

Aus dieser offen formulierte Aufgabe ergeben sich verschiedene Fragen, wie etwa:

(1) Wie groß muß S sein, damit ein weiterer Populationszuwachs verhindert wird ? (Voraussetzung: vorgegebene Populationsgröße x_0 und bekannte Wachstumsrate R).

(2) Wie groß kann x_0 sein, damit bei bekanntem R und gegebenem S die Population abnimmt?

(3) Wie verhält sich das Populationswachstum für verschiedene Ausgangsgrößen *R, S* und x_0?

(4) Unter welchen Bedingungen konvergiert die rekursiv definierte Folge?

(5) Wie sieht es mit dem Stabilitätsverhalten von Gleichgewichtszuständen aus?

(6) Welche theoretischen mathematischen Kenntnisse benötigt man beim Modellbilden, beim Operieren und zur Absicherung der praktischen Ergebnisse?

Man wird natürlich die Schüler nicht sofort mit allen Fragen überfallen (dann wäre es ja keine offene Aufgabe), sondern der am Anfang dieses Kapitels beschriebene Problemlösezyklus soll sich ausgehend von ersten Analysen, Modell- und Lösungsversuchen durch ständige Interpretation möglichst selbständig entwickeln.

In der didaktischen Literatur spricht man von 'gelenktem Entdecken'. Es sind sicher immer wieder Anregungen seitens des Lehrers in Form von Fragen, Aufträgen oder Angabe von Eingangsgrößen notwendig, aber mit Hilfe des CAS kann der Schüler einen wesentlichen Teil des Problemlösezyklus selbsttätig bewältigen.

Erste Modellentscheidung

Das verbale Modell "wächst pro Generation auf das *R*-fache" wird mathematisiert:

$x_{neu} = R.x_n$. Werden *S* sterile Männchen freigelassen, so ist nur der Anteil $x_n/(x_n+S)$ fertil. Dementsprechend ist auch der Anteil der fertilen Paarungen. Somit ergibt sich als neues Modell für die männliche und für die weibliche Population in der Folgegeneration:

$$x_{neu} = \frac{R\, x_n^2}{x_n + S} \quad 10$$

Zu Frage 1: Die Population nimmt ab, wenn bei bekanntem *R* und *S* gilt

$x_{neu} < x_n$ 11 oder $\frac{x_{neu}}{x_n} < 1$ 12.

Es stellt sich nun die methodische Frage, ob es bei solchen Ungleichungen sinnvoll ist, das CAS einzusetzen, oder ob man nicht eher vom Schüler verlangen sollte, diese Ungleichungen "zu Fuß" zu lösen. Auf Grund der Erfahrungen, die wir in unserem CAS-Projekt gemacht haben, würden wir empfehlen: Wenn das CAS nur ab und zu als didaktisches Werkzeug eingesetzt wird und als Rechenhilfe keine Bedeutung hat, sollte man solche Aufgaben ohne CAS lösen. Wenn die Schüler aber das CAS in jeder Arbeitssituation zur Verfügung haben, also auch zu Hause und in der Prüfungssituation, werden sie mit der Zeit das Werkzeug CAS selbsverständlich auch bei solchen Aufgaben einsetzen. Der folgende Abschnitt soll zeigen, daß sie dabei nicht weniger Mathematik verstehen müssen, sondern eher mehr, auf jeden Fall im Bereich des Begründens und Interpretierens.

Erstes Operieren

Es wird der Quotient x_{neu}/x_n gebildet.

```
                      2
                  R·xn
#1:   x_neu = ─────────                                         User
                 xn + S

                        2
                    R·xn
        x_neu = ─────────
#2:                xn + S                                       User
      ───────────────────
               xn

        x_neu       R·xn
#3:   ───────── = ────────                                  Simp(#2)
          xn       S + xn
```

Das CAS erzieht die Schüler zum Überlegen von sinnvollen Definitionsbereichen, da ansonsten vor allem beim Lösen von Ungleichungen überraschende Ergebnisse vorkommen können.

```
#4:   S :ε Real (0, ∞)                                        User
#5:   R :ε Real (1, ∞)                                        User
#6:   x0 :ε Real (0, ∞)                                       User
```

Nun wird die zugehörige Ungleichung mit **soLve** gelöst:

```
       R·x0
#7:   ────── < 1                                      Simp(User)
      S + x0

#8:   (S + x0)·(S - x0·(R - 1)) > 0                    Solve(#7)
```

Da in dem von DERIVE gelieferten Produkt (#8) der erste Faktor sicher größer Null ist, folgt:

```
#9:   S - x0·(R - 1) > 0                                      User
```

Diese Ungleichung löst das CAS:

```
#10: S > x0·(R - 1)                                    Solve(#9)
```

Erstes Ergebnis

Die Anzahl S der ausgesetzten sterilen Männchen muß größer sein als das (R-1)-fache der Anfangszahl x_0, wenn man eine Abnahme der Population erreichen will. Unter der Modellannahme x_0 = 1 Million und R = 3 benötigt man somit mehr als 2 Millionen sterile Männchen.

Interpretation und Bearbeitung weiterer Fragen

Zu Frage 2: Für welche x_0 nimmt die Population bei gegebenem R und S ab?

Wieder ist dieselbe Ungleichung (#11) zu lösen, nur diesmal nach x_0:

```
       R·x0
#11:  ────── < 1                                            User
      S + x0

#12: (x0 + S)·(x0·(R - 1) - S) < 0                    Solve(#11)
```

Dieses Produkt ist, wie schon vorher ausgeführt, dann kleiner als Null, wenn der zweite Faktor kleiner als Null ist.

```
#13: x0·(R - 1) - S < 0                                     User
```

Hätte man nicht vorher die Definitionsbereiche bestimmt, würde man diesen, für die Schüler verwirrenden Ausdruck erhalten:

```
                                S
#14a: x SIGN(R - 1) <  ─────────
                             │R - 1│
```

Bei vorgegebenen Definitionsmengen ergibt sich dagegen die erwartete Lösung:

```
#14: x0 <   S                                  Solve(#13)
          -------
           R - 1
```

Weiteres Ergebnis

Bei bekannter Wachstumsrate R und vorgegebener Anzahl S an sterilen Männchen ist eine Abnahme der Population nur zu erwarten, wenn $x_0 < \frac{S}{R-1}$ 13 ist, etwa bei der Annahme R=3 und S=4, wenn $x_0 < 2$ ist.

Auch beim zweiten Durchlauf des Problemlösezyklus treten wieder die drei Phasen Modellbilden, Operieren und Interpretieren auf.

Zweites Modell

Die erste Modellentscheidung zeigt, daß die Populationsgröße als Funktion der Größe der vorhergehenden Stufe dargestellt werden kann:

$x_{n+1} = \frac{R\,x_n^2}{x_n + S}$ 14 , allgemein $x_{n+1} = N(x_n)$ 15

Beim Modell handelt es sich um eine explizite Differenzengleichungen 1. Ordnung. Eine Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ mit vorgegebenem Anfangswert x_o und mit $x_{n+1} = N(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_o$ nennt man Lösungsfolge der Differenzengleichung.

Durch den Computer - und hier insbesonderen durch das CAS - wurde ein neuer Lösbarkeitsbegriff geprägt: Akzeptierte man im klassischen Mathematikunterricht nur explizite Lösungen eines Problems - also solche, die man mit Hilfe einer begrenzten Menge elementarer Funktionen und Operationen angeben konnte - so gilt heute eine Klasse von Problemen als lösbar, wenn mit Hilfe praktikabler (z.B.: rekursiver oder iterativer) Algorithmen durch Computersimulation Daten in einer Tabelle dargestellt oder grafisch veranschaulicht werden können.

Wir entwickeln nun ein iteratives Modell, mit dem die Abhängigkeit der Insektenpopulation von der Zeit (d.h.von der Anzahl der Generationen) dargestellt werden kann. Wir veranschaulichen n Elemente der Folgen $x_n = f(n)$.

Mit Hilfe der DERIVE-Funktion ITERATES(N(x_n),x_n,x_o,n) wird beginnend mit $x_n = x_o$ die Zuweisung $N(x_n) \rightarrow x_n$ n-mal wiederholt.

```
#1:  Precision := Approximate                          User
```

Um zu zeigen, was die ITERATES-Funktion bewirkt, definieren wir zuerst eine sogenannte 'leere' Funktion (Zeile #2)

```
#2:  N(xn) :=                                          User

#3:  SIT(x0, sz) := ITERATES(N(xn), xn, x0, sz - 1)    User
```

In Zeile #4 wird mit Hilfe von ITERATES die Zuordnung $N(x_n) \rightarrow x_n$ mit der Schrittzahl sz = 8 achtmal ausgeführt.

```
User=Simp(User)
```

```
#4:   SIT(x0, 8) = [x0, N(x0), N(N(x0)), N(N(N(x0))),
      N(N(N(N(x0)))), N(N(N(N(N(x0))))),
      N(N(N(N(N(N(x0)))))), N(N(N(N(N(N(N(x0)))))))]
```

Für die Simulation benötigt man eine Funktion, die Zahlenpaare für eine Wertetabelle bzw. für die grafische Darstellung liefert (siehe Zeile #5).

```
User
#5:   SIT_ZEIT(x0, sz) := ITERATES([m + 1, N(xn)], [m, xn],
                          [0,x0], sz-1)
```

Das Beispiel in Zeile #6 soll wieder veranschaulichen, wie die Funktion SIT_ZEIT arbeitet:

```
User=Simp(User)
                           ┌ 0            x0                ┐
                           │ 1           N(x0)              │
                           │ 2         N(N(x0))             │
                           │ 3        N(N(N(x0)))           │
#6:   SIT_ZEIT(x0, 8) =    │ 4      N(N(N(N(x0))))          │
                           │ 5     N(N(N(N(N(x0)))))        │
                           │ 6   N(N(N(N(N(N(x0))))))       │
                           └ 7  N(N(N(N(N(N(N(x0)))))))     ┘
```

Operieren heißt bei diesem Problem nicht rechnen, sondern simulieren mit Hilfe des CAS.

Zweites Operieren: *Simulation in Abhängigkeit von der Zeit*

Nun soll für das iterative Modell des S.I.T-Problems die Simulation mit Hilfe der Funktion SIT_ZEIT aus Zeile #5 durchgeführt werden. Es wird mit verschiedenen Anfangswerten x_0 experimentiert, etwa mit $x_0 = 1.7$, $x_0 = 2.2$ und $x_0 = 2$ (Millionen). Mit **Simplify** erhält man die jeweilige Wertetabelle (siehe Abb. 3.52).

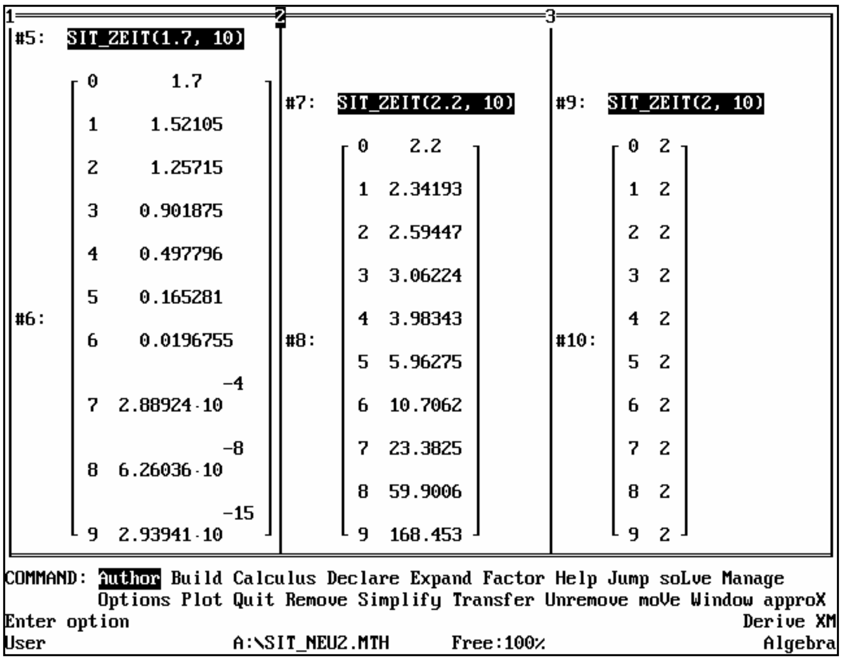

Abb.3.52: Simulation in Abhängigkeit von der Zeit

Interpretation durch Visualisierung

Die mit Simplify ermittelten Wertetabellen setzt man mit **Plot** in Graphen um (wichtig ist die Einstellung **Transfer State** *Connected* zur Verbindung der Punkte). Die für einen optimalen Bildausschnitt notwendigen Einstellungen sollen die Schüler experimentell ermitteln.

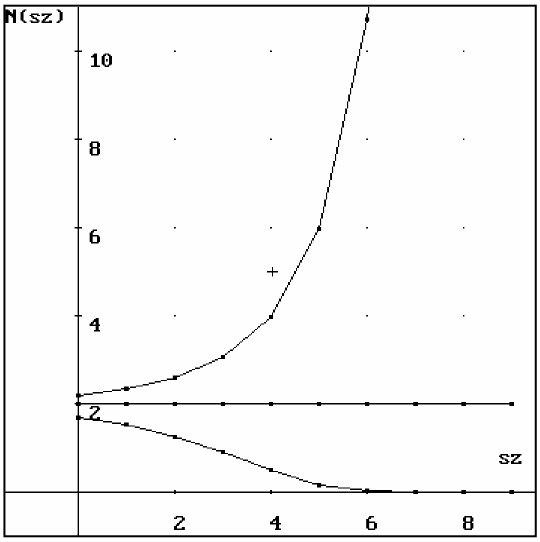

Abb.3.53: Interpretation

Die Grafik (Abb. 3.53) erhärtet neuerlich die Vermutung, daß die Population für $x_0<S/(R\text{-}1)$ - also für $x_0<2$ - ausstirbt, für $x_0>2$ wächst und für $x_0=2$ konstant bleibt.

Drittes Modell: Simulation in Form der 'geometrischen Iteration'

Eine andere Form der Darstellung, die in anschaulicher Weise zu Vermutungen über das Konvergenzverhalten rekursiv definierter Funktionen führt, ist die geometrische Iteration in der (x_n, x_{n+1})-Ebene. Dazu zeichnet man zuerst die Funktion $x_{n+1} = N(x_n)$ sowie die erste Mediane $x_{n+1} = x_n$.

Zu einem gegebenen Startwert x_o ermittelt man den Funktionswert $x_1 = N(x_o)$ auf dem Graphen von N. Durch eine Parallele zur x_n-Achse kommt man zum Punkt (x_1,x_1) auf der ersten Mediane. Somit hat man grafisch das Argument x_1, um damit auf dem Graphen von N den Wert $x_2 = N(x_1)$ zu ermitteln usw. Die mit Hilfe des Computers entstehende Treppe ist dann Grundlage für das Experimentieren mit verschiedenen Parametern x_0, R und S und für Vermutungen über Konvergenz. Sie kann aber auch Ausgangspunkt für eine theoretische Absicherung der Vermutungen sein.

```
#1:  Precision := Approximate

                    2
                R·xn
#2:  N(xn) := ───────
              xn + S

#3:  SIT(x0, sz) := ITERATES(N(xn), xn, x0, sz - 1)

#4:  MED(xn) := xn

                     ┌ x0    0    ┐
#5:  AUFTAKT(x0) :=  │            │
                     └ x0  N(x0)  ┘

                ┌  xn       N(xn)    ┐
                │                    │
#6:  TREP(xn) := │ N(xn)     N(xn)    │
                │                    │
                └ N(xn)  N(N(xn))    ┘

#8:  SIT_WEB(x0, sz) := APPEND([AUFTAKT(x0)], VECTOR(TREP(xn), xn, ITERATES(N(xn

#9:  SIT_WEB(1.7, 15)
```

Abb.3.54: Geometrische Iteration

Für das eigentlichen Simulationsmodul SIT_WEB benötigt man zwei Unterprogramme, das Modul AUFTAKT (#5), das die Starttreppe erzeugt, und das Modul TREP (#6), das eine Stufe für ein bestimmtes x_n darstellt. Die Gesamttreppe wird durch die Funktion SIT_WEB generiert (Abb. 3.54).

```
SIT_WEB(x0,sz) :=     APPEND([AUFTAKT(x0)], VECTOR(TREP(xn),xn,
                                     ITERATES(N(xn),xx,,x0,sz-1)))
```

Bei Schülergruppen, die den Computer nicht in jeder Arbeitssituation verwenden, oder bei Schulformen mit wenig Mathematikstunden könnte das Modul SIT_WEB den Schülern auch als Black Box zur Verfügung gestellt werden (siehe dazu auch das Kapitel 4.3 'Das Modulprinzip'). Dann wird das dazugehörige File als Utiliy-File geladen, so daß der Schüler die Programmteile gar nicht zu Gesicht bekommt und nur die Funktion SIT_WEB(x0,sz) aufrufen muß (*x*0 ist der Startwert und *sz* die Schrittzahl).

Wichtiger ist, daß der Schüler die Idee der geometrischen Iteration mit Hilfe grafischer Veranschaulichung (etwa geeignete Overheadfolien) oder Darstellung einzelner Treppenstufen mit Hilfe der Funktion TREP) verstehen lernt.

```
#8:  SIT_WEB(x0, sz) := APPEND([AUFTAKT(x0)], VECTOR(TREP(xn), xn, ITERATES(N(xn

#9:  SIT_WEB(1.7, 15)

         [                     ┌ 1.7      1.52105 ┐  ┌ 1.52105  1.25715  ┐  ┌ 1.25715
         [ ┌ 1.7   0       ┐   │                  │  │                    │  │
#10:     [ [                ], │ 1.52105  1.52105 │, │ 1.25715  1.25715  │, │ 0.901875
         [ └ 1.7   1.52105 ┘   │                  │  │                    │  │
         [                     └ 1.52105  1.25715 ┘  └ 1.25715  0.901875 ┘  └ 0.901875

#11: SIT_WEB(2.2, 15)

         [                     ┌ 2.2      2.34193 ┐  ┌ 2.34193  2.59447 ┐  ┌ 2.59447  3
         [ ┌ 2.2   0       ┐   │                  │  │                  │  │
#12:     [ [                ], │ 2.34193  2.34193 │, │ 2.59447  2.59447 │, │ 3.06224  3
         [ └ 2.2   2.34193 ┘   │                  │  │                  │  │
         [                     └ 2.34193  2.59447 ┘  └ 2.59447  3.06224 ┘  └ 3.06224  3
```

Abb.3.55: Simulieren

Mit **Simplify** liefert die in Zeile #9 eingegebene Funktion SIT_WEB(1.7,15) einen Vektor, dessen Elemente die 15 Treppenstufen sind (#10 in Abb. 3.55). Analog bei Änderung der Eingabegröße $x_0 = 2.2$ in Zeile #11.

Drittes Interpretieren:

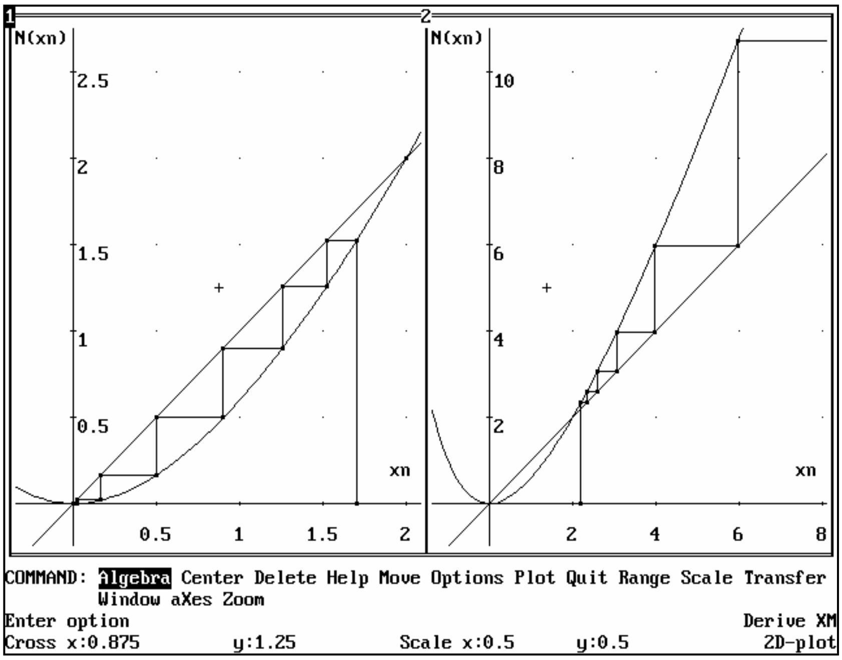

Abb.3.56: Interpretieren

Die Graphen in Abb. 3.56 bestätigen die Vermutung, daß die Lösungsfolge für x_o<2 konvergiert (siehe linkes Fenster). Die Treppe zieht sich beginnend beim Startwert $x_0 = 1.7$ zum Nullpunkt zurück. Für x_o>2 divergiert die Lösungsfolge (siehe rechtes Fenster). Die Treppe wächst beginnend bei $x_0 = 2.2$ über alle Grenzen. Für x_o=2 ergibt sich die konstante Lösungsfolge <2,2,2...>, die bei der geometrischen Iteration natürlich nur einen Punkt mit Koordinaten [2,2] ergibt.

Weitere Untersuchungen für verschiedene Parameter *R, S* und x_o sollten folgen.

Nun könnte man sich von diesem konkreten Problem lösen und versuchen, in einer Exaktifizierungsphase die durch Simulation und Visualisierung gewonnenen Vermutungen zu hinterfragen, dabei aber gerade die Graphen und ersten Ergebnisse für das Exaktifizierungskonzept nutzen.

Exaktifizieren: Theoretische Überlegungen, die zur Absicherung der Vermutungen dienen.

Gegeben sei eine explizite Differenzengleichung 1.Ordnung $x_{n+1} = g(x_n)$. g sei stetig differenzierbar. Eine explizite Abhängigkeit des allgemeinen Folgengliedes x_n vom Index n (also $x_n = f(n)$) nennt man explizite Lösung der Differenzengleichung. Mit Ausnahme der linearen Differenzengleichungen wird es in der Schule schwer möglich sein, explizite Lösungen zu finden (es sei denn mit einem CAS als Black Box). Damit wird aber eine Konvergenzuntersuchung entsprechend schwieriger.

Angenommen die zu einem gegebenen Anfangswert x_o gehörende Lösungsfolge von

$x_{n+1} = g(x_n)$ konvergiere gegen einen Grenzwert x^* (der nur noch nicht bekannt ist). Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, dann offensichtlich auch $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$. Die Folge $\langle x_{n+1}\rangle$ ist ja gegenüber $\langle x_n\rangle$ nur um "ein Glied verschoben". Mit Hilfe der Differenzengleichung und unter Berufung auf Grenzwertregeln könnte man zeigen:

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n))$

Das bedeutet aber: Falls der Grenzwert existiert, genügt er der Gleichung $x^* = g(x^*)$. Wesentlich schieriger ist es zu beweisen, daß eine rekursiv definierte Folge überhaupt einen Grenzwert besitzt. Meist überprüft man, ob die Folge streng monoton fallend und nach unten beschränkt oder streng monoton steigend und nach oben beschränkt ist.

Nun zurück zu unserem Problem: Schon bei der Bearbeitung des ersten Modells haben wir gezeigt, daß eine Abnahme zu erwarten ist, wenn $x_o < \frac{S}{R-1}$ [16]. Dann ist $x_1 < x_o$.

Formt man nun die Differenzengleichung um und bildet $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{R}(1+\frac{S}{x_n})$ [17] ,

so folgt aus $x_1 < x_o$ und somit aus $1/x_1 > 1/x_o$: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{R}(1+\frac{S}{x_1}) > \frac{1}{R}(1+\frac{S}{x_o}) > 1$ [18].

Daraus folgt wiederum: $x_2 < x_1$ usw. Da sämtliche Variablen positiv sind, ist bei dieser rekursiv definierten Folge 0 untere Schranke.

Wenn aber alle Lösungsfolgen mit $x_o < \frac{S}{R-1}$ [19] streng monoton fallend und nach unten beschränkt sind, besitzen sie auch einen Grenzwert, der wie oben ausgeführt, Lösung der Gleichung $x^* = g(x^*)$ sein muß. Nun kann man (eventuell mit dem CAS) die Lösungen der Gleichung ermitteln:

```
#1:  R :ε Real (1, ∞)                                  User

#2:  S :ε Real (0, ∞)                                  User

#3:  x :ε Real (0, ∞)                                  User

                 2
              R·x
#4:  x = ──────────                              Simp(User)
              x + S
```

Mit **soLve** liefert DERIVE zwei Lösungen:

```
#5:   x = 0                                          Solve(#4)

             S
#6:   x = ─────                                      Solve(#4)
           R - 1
```

Da laut Voraussetzung $x_o < \frac{S}{R-1}$ 20 ist, kommt als Grenzwert nur die Lösung 0 in Frage. Damit bestätigen die Überlegungen dieser theoretischen Phase die Vermutungen, die aus Simulation und Visualisierung gewonnen wurden. Was ist aber mit der zweiten Lösung der obigen Gleichung? Nimmt man als Startwert $x_o = \frac{S}{R-1}$ 21, so entsteht eine konstante Lösungsfolge $<x_o>$. Alle Punkte mit dieser Eigenschaft nennt man *Fixpunkte* oder *Gleichgewichtspunkte* der Differenzengleichung.

Bei biologischen Systemen, die sich in einem Gleichgewichtszustand befinden, ist besonders interessant, wie das System bei Störungen der Gleichgewichtszustände reagiert, ob es also bei Störungen wieder in die Ruhelage zurückkehrt oder nicht. Gefragt ist also das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtszustände.

Nun vom biologischen Problem wieder zur innermathematischen Exaktifizierung:

Ein Gleichgewichtspunkt x^* von $x_{n+1} = g(x_n)$ heißt *anziehend*, wenn es um x^* ein Intervall I $[x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon]$ mit $\varepsilon>0$ gibt, so daß jede in diesem Intervall beginnende Lösungsfolge gegen x^* konvergiert. Wenn es dagegen ein Intervall I um x^* gibt, so daß jede Lösungsfolge mit x_o aus I (und x_o ungleich x^*) das Intervall verläßt, so nennt man den Gleichgewichtspunkt *abstoßend.*

Mit Hilfe der geometrischen Iteration kann man diese Definition sehr gut veranschaulichen: 0 ist ein anziehender Gleichgewichtspunkt, $S/(R-1)$ ein abstoßender. Genauso kann man mit Hilfe dieser Treppen folgende Stabilitätsbedingung plausibel machen:

Ein Gleichgewichtspunkt x^* der Differenzengleichung $x_{n+1} = g(x_n)$, g sei eine stetig differenzierbare Funktion, ist anziehend, wenn $|g'(x^*)|<1$, und abstoßend, wenn $|g'(x^*)|>1$ ist. [vgl. Dorninger, 1988, Bd. II, S7]

In dieser Stabilitätsbedingung kommt sehr deutlich die fundamentale Idee der *Linearisierung* zum Tragen. Man ersetzt in einer Umgebung der Gleichgewichtsstelle die Funktion *g* durch die Tangente und schließt aus dem Stabilitätsverhalten der linearisierten Differenzengleichung auf das der ursprünglich gegebenen Gleichung.

Auch diesen Exaktifizierungsschritt kann man am konkreten Beispiel mit Hilfe des CAS ausführen:

Ermitteln der 1.Ableitung:

```
#1:   Precision := Exact                              User

                      2
                  R·xn
#2:   N(xn)  := ─────────                             User
                 xn + S

       ┌ d  ┐1
#3:    │────│  N(xn)                                  User
       └d xn┘

       R·xn·(2·S + xn)
      ─────────────────
#4:                 2                                 Simp(#3)
         (S + xn)
```

Man definiert eine Steigungsfunktion $k(x_n)$:

$$\#5: \quad k(xn) := \frac{R \cdot xn \cdot (2 \cdot S + xn)}{(S + xn)^2} \qquad \text{User}$$

Unsere Annahme ist:

```
#6:  [R := 3, S := 4]                                User

#7:  k(0) = 0                               User=Simp(User)
```

$$\#8: \quad k(2) = \frac{5}{3} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Aus $k(0)=0 < 1$ und $k(2)=5/3 > 1$ folgt: 0 ist ein anziehender, 2 ein abstoßender Fixpunkt.

Aufstellen der Tangentengleichungen (ab Zeile #9): Mit **Manage Substitute** können dann die einzelnen Tangentengleichungen durch Einsetzen für x_0 rasch gefunden werden, wobei mit DERIVE (ab Version 3.0) auch die impliziten Gleichungen geplottet werden können.

```
#9:  y - N(x0) = k(x0)·(x - x0)                      User

#10: y - N(0) = k(0)·(x - 0)                      Sub(#9)

#11: y = 0                                      Simp(#10)

#12: y - N(2) = k(2)·(x - 2)                      Sub(#9)
```

$$\#13: \quad y - 2 = \frac{5 \cdot (x - 2)}{3} \qquad \text{Simp(\#12)}$$

Nun können die Graphen gezeichnet und die Idee der Linearisierung kann mit Hilfe des **ZOOM**-Befehls veranschaulicht werden (Abb. 3.57)

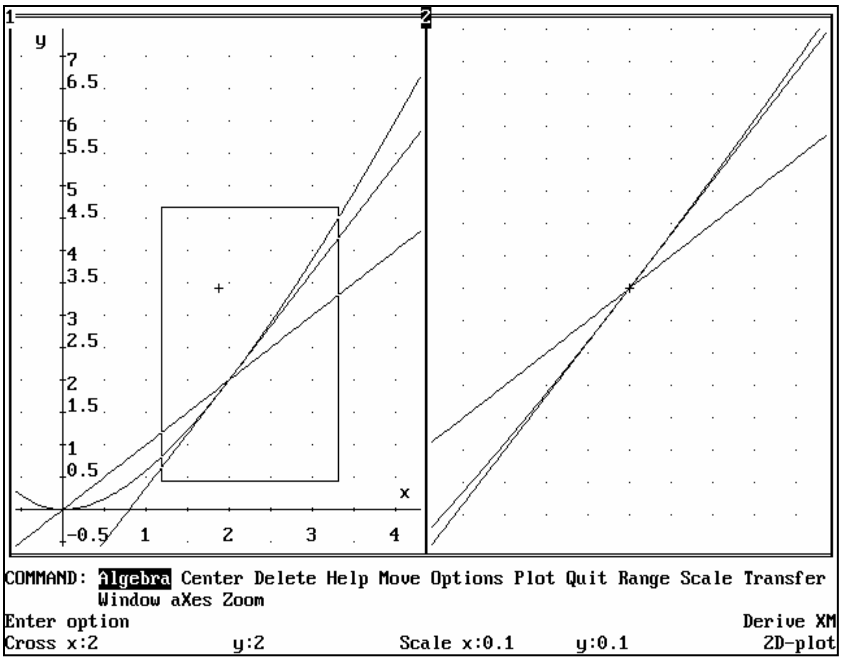

Abb.3.57: Exaktifizieren

Betrachtet man die Stabilitätsbedingung genauer, so fällt auf, daß der Fall $g'(x) = \pm 1$ ausgenommen wurde. Anders gefragt: Gibt es außer anziehenden und abstoßenden Gleichgewichtspunkten auch noch andere?

Nehmen wir zum Beispiel die lineare Differenzengleichung $x_{n+1} = -x_n + c$ $(c>0)$, ermitteln wir mit dem CAS die ersten Glieder einer Lösungsfolge und versuchen, sie mit Hilfe der geometrischen Iteration zu visualisieren.

Man erhält für c=4 und x_o=1 die Folge <1,3,1,3,1,3,...>. Wie man dann auch aus dem Graphen sieht und aus dem Term der Differenzengleichung erkennen kann, oszilliert jede Lösungsfolge $<x_n>$ mit x_o ungleich $c/2$ um den Gleichgewichtspunkt $x^* = c/2$ (siehe Abb. 3.58)

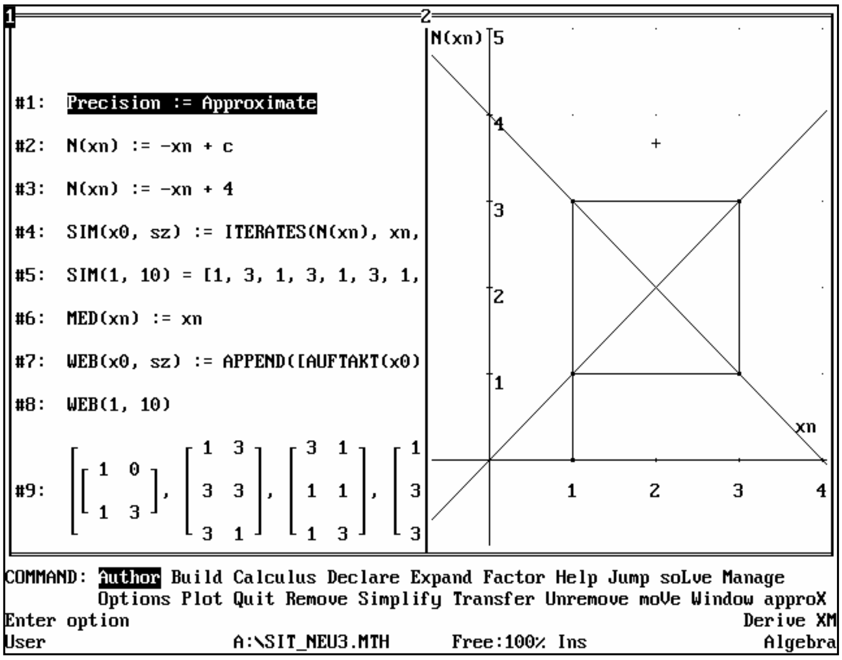

Abb.3.58: Sonderfälle

Nun könnte dieser Fall der Anlaß sein, Differenzengleichungen mit periodischen Lösungsfolgen zu untersuchen. Aber es ist nicht Ziel dieses Buchs, eine möglichst vollständige Abhandlung des Themas "Rekursive Modelle für den Schulunterricht" zu bieten.

Diese Fragen, die im Zuge der Exaktifizierung auftauchen, sollen nur aufzeigen, daß anwendungsorientiertes Problemlösen mit Unterstützung des CAS nicht nur ein unreflektiertes Verwenden von Black Boxes und ein Basteln von Modellen (anstelle der Anstrengung des Begriffsbildungsprozesses) bedeutet, sondern daß sich das Hinterfragen und Exaktifizieren oft notwendigerweise bei der Analyse der Modelle und der Interpretation der Ergebnisse des praktischen Problems ergibt, das heißt, die Deutung und die Verbesserung des Modells erfordern eine Exaktifizierung. Die Sinnhaftigkeit der Exaktifizierung ist hier für den Schüler aber wohl eher erkennbar, als wenn er den Gewissensbissen des Lehrers folgend einen Theorievorrat anlegt, von dem der Lehrer beteuert, daß er für die Zukunft doch so notwendig sei (was vielleicht bestenfalls wegen der drohenden Prüfung akzeptiert wird).

3.5.2. Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren

Wir haben dieser Phase deshalb ein eigenes Kapitel gewidmet, weil hier der Einfluß des Computers auf das Lernen von Mathematik besonders deutlich wird. Schon seit Mathematik als Problemlösetechnik eingesetzt wird, war es notwendig, die Richtigkeit von Lösungen zu überprüfen und die Lösungen zu interpretieren. Dazu muß man aber den Lernenden Strategien für Proben anbieten, das Schätzen und Überschlagsrechnen üben und vor allem Aufgaben so formulieren, daß die Notwendigkeit dieser Tätigkeit erkennbar wird - eigentlich eine Selbstverständlichkeit, wenn der gesamte Problemlöseprozeß Ziel des Mathematikunterrichts ist.

Zu den schon bisher bekannten Schwierigkeiten und den dafür in der didaktischen Literatur angebotenen Strategien beim algebraischen Operieren kommt bei Verwendung von CAS das Problem dazu, daß *Schüler Ergebnisse zu überprüfen und zu interpretieren haben, die sie nicht selber produziert haben*.

Ein weiteres Ergebnis unserer Untersuchungen erhöht die Gewichtung dieser Schnittstelle: Durch die Nutzung von CAS erhöht sich die Vielfalt der Lösungswege und somit auch der Ergebnisse sprunghaft. Vom 'algorithmischen Gehorsam' des klassichen Mathematikunterrichts, wo ein Großteil der Schüler die vom Lehrer vorgeführten Umformungsstrategien nachvollzogen hat, ist nicht mehr viel zu merken. Vor allem bei Schülern, die den Computer in jeder Arbeitssituation zur Verfügung haben, beobachtet man selbst in der Prüfungssituation, daß bei 10 Schülern mehr als 5 verschiedene algebraische Lösungswege vorkommen.

Da das Schönheitsideal mathematischer Lösungen relativ ist, kommt es bei Nutzung von CAS also öfter vor, daß die vom Computer angegebene Lösung nicht mit der vom Schüler oder Lehrer erwarteten Lösung übereinstimmt oder daß von verschiedenen Schülern gefundene Lösungen unterschiedlich aussehen. Schüler wissen dann natürlich zuerst einmal nicht, ob ihre erwartete oder die ermittelte Lösung falsch ist oder ob die verschiedenen Lösungen vielleicht doch äquivalent sind.

Um solche Entscheidungen treffen zu können, sind neue Strategien notwendig, bei denen man sich die Möglichkeiten des CAS zunutze machen kann. Jenen, die befürchten, die Verwendung des Computers würde nur ein verständnisloses Experimentieren mit Black Boxes bedeuten, sei gesagt, daß für diese Tätigkeit sehr wohl ein Verständnis der Algebra oder des verwendeten Algorithmus notwendig ist, und zwar mehr, als wenn man Operationen mechanisch 'zu Fuß' ausführt. Eine auf Zufall aufgebaute Versuch und Irrtummethode bringt hier keinen Erfolg.

Bei dieser Phase des Problemlöseprozesses - für uns eine der heikelsten Phasen des CAS-unterstützten Mathematikunterrichts - stehen wir erst am Anfang der Untersuchungen. Erste Ergebnisse sollen in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden. Die Aufgaben stammen aus Versuchen in der 7. und 8. Schulstufe. Nicht alle Strategien wurden den Schülern von den Lehrern vorgegeben, manche haben die Schüler auch durch experimentelles Lernen selbstentdeckt.

Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren in der Algebra

Beispiel 3.13: Verzinsung

Ein Kapital K wird um p % vermehrt. Ermittle eine Formel für das neue Kapital.

Bei dieser Aufgabe fanden die Schüler verschiedenste Lösungen, wie zum Beispiel:

#1: $K\cdot\left[1+\frac{p}{100}\right]$ User

#2: $K+\frac{K\cdot p}{100}$ User

#3: $K+K\cdot\frac{p}{100}$ User

#4: $K\cdot\frac{100+p}{100}$ User

Darunter waren natürlich auch falsche Ergebnisse:

#5: $K\cdot(1+p)$ User

#6: $K+\frac{p}{100}$ User

$$\#7: \quad K\cdot\frac{1 + p}{100} \qquad \text{User}$$

Nun galt es, Strategien zu suchen, um die richtigen Lösungen zu finden und ihre Äquivalenz zu beweisen.

Strategie 1: Umformen mit CAS-Befehlen

Nutzen der DERIVE-Befehle **Simplify**, **Expand** oder **Factor**, um eine Lösung in eine andere umzuformen. Dabei ist für Schüler und Lehrer von Vorteil, daß mit der Einstellung *Annotate Yes* die verwendeten Umformungen mit aufgezeichnet werden. So führt **Expand** die Gleichung #1 in die Gleichung #8 über, womit die Äquivalenz von #1 und #2 bewiesen wird.

$$\#8: \quad \frac{K\cdot p}{100} + K \qquad \text{Expd(\#1)}$$

Durch Faktorisieren von #2 zeigt man die Äquivalenz von #2 und #4:

$$\#9: \quad \frac{K\cdot(p + 100)}{100} \qquad \text{Fctr(\#2)}$$

Simplify ändert an #1 praktisch nichts, da DERIVE die faktorisierte Form als 'schön' annimmt. Gerade deshalb wird mit diesem Befehl aber gezeigt, daß #3 und auch #2 äquivalent zu #1 sind.

$$\#10: \quad K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] \qquad \text{Simp(\#1)}$$

$$\#11: \quad K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] \qquad \text{Simp(\#3)}$$

$$\#12: \quad K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] \qquad \text{Simp(\#2)}$$

Mit derselben Strategie können Schüler auch erkennen, daß die Formeln #5, #6 und #7 falsch sind:

$$\#12: \quad K\cdot p + K \qquad \text{Expd(\#5)}$$

$$\#13: \quad \frac{K\cdot p}{100} + \frac{K}{100} \qquad \text{Expd(\#7)}$$

Strategie 2: Differenzbildung

Diese Strategie wurde schon in Kap. 2.2 beim Vergleich von Stammfunktionen vorgestellt. Man bildet die Differenz zweier Terme, von denen man vermutet, daß sie äquivalent sind. Vereinfacht man mit **Simplify** oder verwendet den Gleichheitsoperator (ab DERIVE-Version 3.0), der dem Simplify-Befehl entspricht, so müßte man bei Äquivalenz der Terme als Ergebnis 0 erhalten. In Zeile #14 wird die Differenz von #1 und #2 gebildet:

$$\#14: \quad K\cdot\left[1 + \frac{p}{100}\right] - \left[K + \frac{K\cdot p}{100}\right] = 0 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Bildet man die Differenz von #4 und #7, so ergibt sich ein Ergebnis ungleich 0. Eine der beiden Formeln muß also falsch sein:

$$\#15: \; K \cdot \frac{100 + p}{100} - K \cdot \frac{1 + p}{100} = \frac{99 \cdot K}{100} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Strategie 3: Bilden von Gleichungen

Will man etwa die Äquivalenz der Terme T_1 (Zeile #1) und T_4 (Zeile #4) untersuchen, bildet man die Gleichung $T_1 = T_4$.

$$\#16: \; K \cdot \left[1 + \frac{p}{100}\right] = \frac{K \cdot (p + 100)}{100} \qquad \text{User}$$

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Gleichung zu bearbeiten:

a) Verwenden des **soLve**-Befehls: Sind die beiden Terme äquivalent, so ist die Gleichung allgemein gültig. Jedes beliebige Element der gemeinsamen Definitionsmenge ist Lösung. DERIVE drückt das mit dem Symbol '@n' aus (man denke sich @ als Abkürzung für 'beliebig'). *n* durchläuft bei mehreren vorkommenden Variablen die Zahlen 1,2 usw. Bei Lösung der Gleichung #16 nach den Variablen *K* und *p* ergeben sich solche allgemeingültigen Lösungen (#17 und #18):

```
#17: K = @1                                  Solve(#16)

#18: p = @2                                  Solve(#16)
```

Bildet man dagegen eine Gleichung aus zwei nicht äquivalenten Termen (#2 und 6), so erhält man mit **soLve** konkrete Werte für *K* und für *p*, also keine Allgemeingültigkeit der Gleichung:

$$\#19: \; K + \frac{K \cdot p}{100} = K + \frac{p}{100} \qquad \text{User}$$

```
#20: K = 1                                   Solve(#19)

#21: p = 0                                   Solve(#19)
```

b) Bearbeiten der Gleichung oder auch nur einer Seite der Gleichung (dies kann durch Unterlegung mit Hilfe der Cursorsteuerung entschieden werden) mit den Befehlen **Expand**, **Faktor** oder **Simplify**. Dadurch kann wieder die Äquivalenz erkannt werden. Der Befehl **Expand** wandelt die Gleichung #16 etwa folgendermaßen um:

$$\#22: \; \frac{K \cdot p}{100} + K = \frac{K \cdot p}{100} + K \qquad \text{Expd(\#16)}$$

Faktorisiert man die Gleichung aus zwei nicht äquivalenten Termen (#19), so erhält man #23:

$$\#23: \; \frac{K \cdot (p + 100)}{100} = \frac{100 \cdot K + p}{100} \qquad \text{Fctr(\#19)}$$

c) Äquivalenzumformungen: Mit Hilfe dieser bei CAS möglichen Umformungen könnte die Gleichung etwa mit 100 multipliziert werden usw. Gezeigt wird das bei der Strategie 4 (Gleichungsketten).

d) Visualisierung: Bei Termen mit einer Variablen könnten die Funktionsgraphen der linken und der rechten Seite der Gleichung gezeichnet und verglichen werden, und daraus können Vermutungen über die Äquivalenz gewonnen werden. Ein Beispiel dafür folgt bei Schnittstellenproblemen in der Analysis.

Strategie 4: Gleichungsketten

Diese Strategie wurde etwa von Schülern selbst entwickelt. Untersucht man die Äquivalenz mehrerer Terme T_1, T_2, T_4 und T_7 (die Indizes entsprechen den Zeilennummern am Beginn des Beispiels), so kann man auch sofort die 'Gleichungskette' $T_1 = T_2 = T_4 = T_7$ bilden.

$$\#24: \quad K\cdot\left[1 + \frac{p}{100}\right] = K + \frac{K\cdot p}{100} = K\cdot\frac{100 + p}{100} = K\cdot\frac{1 + p}{100}$$

Nun können wie schon bei Strategie 3 entweder die Befehle **Expand**, **Factor** oder **Simplify** angewendet werden. Simplify liefert nur die Erkenntnis, daß T_1 und T_2 äquivalent sind, und es zeigt sich auch, daß T_4 und T_7 nicht äquivalent sind:

$$\#25: \quad K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] = K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] = \frac{K\cdot(p+100)}{100} = \frac{K\cdot(p+1)}{100}$$

Besser ist hier die Verwendung des Befehls **Expand**:

$$\#26: \quad \frac{K\cdot p}{100} + K = \frac{K\cdot p}{100} + K = \frac{K\cdot p}{100} + K = \frac{K\cdot p}{100} + \frac{K}{100}$$

Wie in Strategie 3c) können auch Äquivalenzumformungen durchgeführt werden. Multipliziert man die ganze Gleichungskette mit 100

$$\#27: \quad \left[K\cdot\left[1 + \frac{p}{100}\right] = K + \frac{K\cdot p}{100} = K\cdot\frac{100+p}{100} = K\cdot\frac{1+p}{100}\right]\cdot 100$$

und vereinfacht mit Simplify, so erhält man

$$\#28: \quad K\cdot(p + 100) = K\cdot(p + 100) = K\cdot(p + 100) = K\cdot(p + 1)$$

Es zeigt sich also auch bei dieser Strategie, daß #1, #2 und #4 äquivalent sind, #7 dagegen nicht.

Strategie 5: Faktor suchen

Beim Vergleich zweier Terme T_1 und T_4 sucht man mit Hilfe des CAS einen Faktor '*FAKT*', so daß gilt: T_1 . *FAKT* = T_4. Wie leicht einzusehen ist, ergibt sich bei äquivalenten Termen der Faktor 1, ansonsten ein Faktor ungleich 1. Aufpassen müßte man bestenfalls, wenn die Variablen schon mit Zahlen belegt sind und Terme den Wert 0 annehmen. Die Gleichung wird mit **soLve** nach der Variablen *FAKT* aufgelöst (siehe #29 und #31).

$$\#29: \quad \left[K + \frac{K\cdot p}{100}\right]\cdot FAKT = K\cdot\frac{100 + p}{100} \qquad \text{User}$$

$$\#30:\quad FAKT = 1 \qquad\qquad \text{Solve(\#29)}$$

$$\#31:\quad \left[K + K\cdot\frac{p}{100}\right]\cdot FAKT = K\cdot\frac{1 + p}{100} \qquad\qquad \text{User}$$

$$\#32:\quad FAKT = \frac{p + 1}{p + 100} \qquad\qquad \text{Solve(\#31)}$$

Wie schon erwähnt, hat sich bei unseren Untersuchungen gezeigt, daß Schüler sehr ideenreich beim Entwickeln solcher Strategien sind und daß diese Tätigkeit zu intensiven mathematischen Diskussionen zwischen den Schülern geführt hat. Besonders für schwächere Schüler sind solche zur Verfügung gestellte Strategien wichtig. Das CAS bildet dabei eine wichtige Entscheidungshilfe.

Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren in der Analysis

Zusätzlich zu den algebraischen Problemen, die auch in diesem mathematischen Kapitel existent sind, gibt es jetzt auch durch neue Inhalte hervorgerufene Schwierigkeiten. Viele dieser Fragen treten auch ohne Verwendung des CAS auf. Wir wollen an einigen Beispielen aufzeigen, wie mit Hilfe des CAS die Probleme wesentlich besser gelöst werden können. Zum Teil bewähren sich dabei Strategien, die schon bei der Algebraschnittstelle vorgestellt wurden, wie etwa 'Faktor suchen' oder 'Visualisieren', aber oft liefert auch die zu diesem neuen Inhalt gehörende Theorie neue Strategien, oder man macht sich ganz einfach das CAS als Rechenhilfe zunutze, um Untersuchungen, die komplexere Operationen erfordern, durchführen zu können.

Beispiel 3.14: Plancksches Strahlungsgesetz, Überraschungen beim Substituieren

Plancksches Strahlungsgesetz: Die Abhängigkeit des Emissionsvermögens eines schwarzen Körpers von der Wellenlänge λ ist durch die Funktion #2 beschrieben. Man ermittle das relative Extremum.

Bei der Lösung treten bei verschiedenen Schülern oft verschiedene Wege auf:

Weg 1: Differenziert man nach λ, so wird der Ausdruck, wie in Zeile #4 zu sehen ist, sehr kompliziert.

$$\#1:\quad \lambda :\in \mathrm{Real}\ (0, \infty)$$

$$\#2:\quad E(\lambda) := \frac{c^2\cdot h}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\hat{e}^{c\cdot h/(k\cdot\lambda\cdot t)} - 1}$$

$$\#3:\quad \frac{d}{d\lambda}\, E(\lambda)$$

$$\#4:\quad \frac{c^2\cdot h\cdot(\hat{e}^{c\cdot h/(k\cdot\lambda\cdot t)}\cdot(c\cdot h - 5\cdot k\cdot\lambda\cdot t) + 5\cdot k\cdot\lambda\cdot t)}{k\cdot\lambda^7\cdot t\cdot(\hat{e}^{c\cdot h/(k\cdot\lambda\cdot t)} - 1)^2}$$

Eine vielfach gebräuchliche Strategie ist, durch Substituieren zu vereinfachen. So wird hier der Exponent durch x ersetzt (#5).

$$\#5: \quad x = \frac{c \cdot h}{k \cdot \lambda \cdot t}$$

$$\#6: \quad \lambda = \frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x}$$

$$\#7: \quad \lambda := \frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x}$$

Man erhält die 1.Ableitung als Funktion der Variablen *x*.

$$\#8: \quad \frac{k^6 \cdot t^6 \cdot x^6 \cdot (ê^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^4 \cdot h^5 \cdot (ê^{2 \cdot x} - 2 \cdot ê^x + 1)}$$

Weg 2: Manche Schüler kommen auch auf die Idee, schon vor dem Differenzieren zu substituieren. Man erhält dann *E* schon als Funktion von *x* (#9).

$$\#9: \quad E(x) := \frac{k^5 \cdot t^5 \cdot x^5}{c^3 \cdot h^4 \cdot (ê^x - 1)}$$

$$\#10: \quad \frac{d}{dx} E(x)$$

Differenziert man *E*(*x*) nach *x*, so ergibt sich mit **Simplify** ein anderes Ergebnis als bei Weg 1 in Zeile #8:

$$\#11: \quad - \frac{k^5 \cdot t^5 \cdot x^4 \cdot (ê^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^3 \cdot h^4 \cdot (ê^x - 1)^2}$$

Für Schüler, die Ergebnisse vergleichen, ist das unterschiedliche Resultat nicht ohneweiteres verständlich, wurde doch in beiden Fällen die gleiche Substitution durchgeführt.

Bei der Frage nach den Ursachen ist eine mögliche *Strategie*:

Man suche jenen Faktor ('*FAKT*'), um den sich die beiden Terme unterscheiden. Ein großer Vorteil beim Generieren solcher komplexen Gleichungen ist die Möglichkeit, die Terme mit Hilfe der Funktionstasten **F3** bzw. **F4** in die Authorzeile zu kopieren. Die Rechenarbeit kann vom CAS übernommen werden. Mit **soLve** wird die Gleichung #12 nach *FAKT* aufgelöst (siehe #13).

$$\#12: \quad \frac{k^6 \cdot t^6 \cdot x^6 \cdot (ê^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^4 \cdot h^5 \cdot (ê^{2 \cdot x} - 2 \cdot ê^x + 1)} \cdot FAKT = - \frac{k^5 \cdot t^5 \cdot x^4 \cdot (ê^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^3 \cdot h^4 \cdot (ê^x - 1)^2}$$

#13: $$\mathrm{FAKT} = -\frac{c\cdot h}{k\cdot t\cdot x^2}$$

Fragt man, woher dieser Faktor kommt, so kann man mit CAS-Unterstützung zeigen, daß FAKT nichts anderes ist als die innere Ableitung von λ nach x.

#14: $$\frac{d}{dx}\lambda$$

#15: $$-\frac{c\cdot h}{k\cdot t\cdot x^2}$$

Im Bsp. 3.10 ("Ausbreitung von Luftschadstoffen") wurde gezeigt, wie dem Schnittstellenproblem durch Strategien begegnet werden kann, die sich aus der zum Problem gehörenden Theorie ergeben, wie zum Beispiel:

-Ergibt sich beim Auflösen einer Gleichung eine komplexe Funktion r und sucht man ein relatives Extremum im reellen Bereich, so kann man auch *das relative Extremum von* r^2 *suchen*.

-Man versucht durch *Visualisierung* zu erforschen, ob die komplexe Funktion auch einen reellen Bereich hat und schränkt danach den Definitionsbereich ein.

Im Bsp. 3.11 ("Inverse Roboterkinematik") wurde die Brauchbarkeit der vom CAS ermittelten allgemeinen Lösung durch *umfangreiches Testen* mit konkreten Zahlen überprüft. Ohne CAS wäre das viel zu aufwendig.

Im Bsp. 3.12 ("Sterile Insektentechnik") wurde eine brauchbare Lösung einer Ungleichung mit Hilfe des CAS durch *Einschränken des Definitionsbereichs* erzielt (**Declare Variable** *Real Intervall*).

3.5.3. Zusammenfassung: Die Bedeutung von CAS beim Problemlösen:

1. Beim Modellbilden:

Andere und neue Arten von Modellen, wie etwa grafische oder rekursive Modelle werden möglich.

Komplexere Modelle werden durch das Werkzeug CAS zugänglich.

Module können angefertigt und für das Problemlösen genutzt werden.

Ein mehrmaliges Durchlaufen des Problemlösekreislaufs mit dem Ziel der schrittweisen Modellverbesserung wird erleichtert.

Die Möglichkeit des experimentellen Arbeitens fördert das selbständige Arbeiten der Schüler.

2. Beim Operieren:

CAS nehmen den Schülern Tätigkeiten im Bereich des Operierens ab.

CAS ermöglichen neue Arten des Operierens, wie etwa Simulieren oder Visualisieren.

Komplexere Operationen und oftmaliges Wiederholen von Operationen werden machbar. Dadurch wird der Mathematikunterricht anwendungsorientierter, da praxisnahe Modelle zugänglich werden.

Die Verwendung fertiger Module erleichtert das Operieren und bietet neue Möglichkeiten.

Bei Beachtung des White Box/Black Box-Prinzips (siehe Kapitel 4.1) kann das CAS beim Operieren als Black Box genutzt werden.

3. Beim Interpretieren:

Das CAS ermöglicht eine leichtere Kontrolle der Richtigkeit der Lösung (etwa durch rasches Nachvollziehen der Operationen oder durch Einsetzen numerischer Kontrollgrößen).

Das CAS fördert die Phase des Interpretierens durch verschiedene Darstellungsarten der Lösung, wie etwa grafische, symbolische oder numerische, die gleichzeitig in verschiedenen Fenstern verfügbar sind (siehe auch Window-Shuttle-Technik).

Das CAS ermöglicht die Untersuchung des Einflusses verschiedener Parameter auf die Lösung.

Das CAS ermöglicht die Überprüfung der Auswirkung der Genauigkeit der Eingabedaten und der Rechengenauigkeit auf die Lösung.

Modellverbesserungen, deren Notwendigkeit sich aus der Phase des Interpretierens ergibt, lassen sich mit dem CAS rascher und leichter durchführen.

Das CAS unterstützt die Präsentation der Lösung (Verschiedene Darstellungsformen der Lösung, Anfertigen eines Ausdrucks, eventuell Kombination mit einem Textverarbeitungsprogramm).