Mathematiklehren und -lernen mit Computeralgebra-Systemen

Unterrichtsbeispiele und didaktische Konzepte aus dem österreichischen DERIVE-Projekt

Helmut Heugl, Walter Klinger, Josef Lechner

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Trotz größerer Fortschritte in den algorithmischen Grundlagen der Mathematik-Softwaresysteme haben diese Systeme dreißig Jahre lang im Dornröschenschlaf verbracht. Systeme wie MACSYMA, Scratchpad und Reduce waren im wesentlichen nur einigen speziellen Anwendern, z. B. Teilchen-Physikern, und natürlich den Entwicklern der Systeme, d. h. weltweit einigen hundert Mathematikern und Software-Spezialisten, ein Begriff.

Innerhalb weniger Jahre hat sich das Bild jedoch drastisch geändert. Das eine oder andere der neuen Systeme wie z. B. MATHEMATICA, Maple, Axiom, Derive oder Magma ist heute fast jedem Schüler bekannt, jedenfalls jedem Studenten der Mathematik, der Informatik oder der verschiedenen Ingenieurswissenschaften und vielen Entwicklern, Lehrern, Forschern und Ingenieuren in diesen und anderen Gebieten wie Wirtschaft, Psychologie, Medizin etc. Einige der Mathematik-Softwaresysteme gehören heute zur Software-Grundausstattung, die mit den Maschinen mitgeliefert wird. Auf diesen Systemen aufbauende Packages für Anwendungen in Banken, Kontrolltheorie, Statistik, Robotik, Fuzzy-Control, Kryptographie, Schaltungsentwurf, Optik, Data Mining etc. erreichen nochmals einen mindestens ebenso großen Markt wie die Grundsysteme. Ich sehe zwei Gründe für diese Explosion in der Verbreitung und im Bekanntheitsgrad mathematischer Softwaresysteme:

1. Der wesentliche Grund ist ganz pragmatisch in dem Umstand zu sehen, daß einige wenige Wissenschaftler wie Stephen Wolfram (MATHEMATICA) oder David Stoutemyer (Derive) das unternehmerische Risiko auf sich genommen haben, aus dem in den vielen experimentellen Systemen vorhandenen Know-How professionelle Softwareprodukte zu machen und den Markt systematisch zu bearbeiten. Der Erfolg war durchaus nicht sicher. Der Einstieg in die Professionalität hat sich jedoch gelohnt und zwar nicht nur geschäftlich: Seit die professionellen Systeme den Markt durchdringen, gewinnt nicht nur die Problemlösepotenz dieser Systeme, sondern auch die zugrundeliegende Problemlösepotenz der Mathematik einen Grad von Aufmerksamkeit, der in der Geschichte der Mathematik wahrscheinlich einmalig ist.
2. Hand in hand mit der Kommerzialisierung der Systeme ergab sich natürlich die Notwendigkeit und die Möglichkeit, die Benutzeroberflächen der Systeme auf eine neue Ebene der Perfektion zu bringen. Das Resultat ist beeindruckend. Die Oberflächen der mathematischen Software-Systeme (Graphik, Animation, Sound, Einbindung von Hypertext, Gestaltung von interaktiven Büchern mit exekutierbaren Formeln, Integration in die elektronischen Netzwerke, Hilfen zur Gestaltung von Courseware, Integration aller Werkzeuge moderner Software-Technologie zur Strukturierung von Benutzer-Software, etc.) gehören heute wohl zu den ausgereiftesten Beispielen moderner Software-Kunst und eröffnen die mathematische Potenz der Systeme jedem Benutzer auf seiner Ebene des Verständnisses und in seiner Sprache.

Es steht also nun ein großer Teil der Mathematik in leicht bedienbaren Systemen »auf Knopfdruck« zur Verfügung, darunter viele Methoden der Mathematik, die noch bis vor kurzem als »sehr schwierig«, »intelligent« oder »nicht automatisierbar« gegolten haben, insbesondere das »symbolische Rechnen« mit Formeln, ja sogar (noch) in beschränktem Umfang das Beweisen mathematischer Sätze. Jedenfalls steht heute so ziemlich alles bzw. ein Großteil dessen, was in den höheren Schulen bzw. in den unteren Semestern an den Universitäten in Mathematik unterrichtet wird, in den mathematischen Softwaresystemen on-line in einer Art zur Verfügung, die oft keine speziellen Vorkenntnisse mehr voraussetzt.

Das wirft natürlich die Frage auf, was man heute an Mathematik unterrichten soll, ob man überhaupt noch Mathematik unterrichten soll und, wenn ja, wie man Mathematik unterrichten soll. Seit die mathematischen Software-Systeme auf den Markt (und natürlich auch auf den Bildungsmarkt) drängen, wird diese Frage von Lehrern und Professoren, Schülern und Studenten, Eltern und Bildungspolitikern heftig diskutiert. Die Antworten sind zum Teil skurril und bewegen sich zwischen den folgenden beiden Extremen:

◊ Verbot der Mathematiksysteme im Mathematikunterricht: Die Argumentation geht dahin, daß der Bildungsinhalt der Mathematik in der Schulung des »mathematischen Denkens« besteht. Wenn man nur mehr lernt, wie man zur Lösung eines bestimmten mathematischen Problems eine bestimmte Funktion in einem Mathematiksystem aufruft, geht der Bildungswert der Mathematik gänzlich verloren. Es ist also das beste, diese Systeme aus dem Unterricht zu verbannen.

◊ Ersatz des Mathematikunterrichts durch eine praktische Einschulung in die Bedienung der Mathematiksysteme: Die Argumentation geht in diesem Fall dahin, daß der Bildungsinhalt der Mathematik darin besteht, für sehr allgemeine Klassen von Problemen Lösungsmethoden parat zu haben. Es genügt also, wenn man lernt, wie man reale Probleme als mathematische Probleme formuliert (wobei in den »Packages«, die auf den mathematischen Grundsystemen aufgebaut sind, auch dieser Schritt dem Benutzer ja zum Teil bereits abgenommen wird) und dann die mathematischen Systeme mit den geeigneten Eingaben versieht. Das Erlernen der schwierigen Mathematik hinter den Lösungsrezepten ist also Zeitvergeudung.

Eine gründliche Beschäftigung mit dieser Frage ist sowohl für die Zukunft der Mathematik und Technik also auch - in größerem Zusammenhang - für die Rolle der Mathematik und Technik in der Gesellschaft von zentraler Wichtigkeit.

Ich habe diese Frage und ihre möglichen Antworten in verschiedenen Schriften in größerem Detail diskutiert und auf einige meiner Beiträge zu dieser Diskussion (z. B. das »White-Box / Black-Box Prinzip« oder die »Kreativitätsspirale«) wird in dem vorliegenden Buch auch bezug genommen. Ich möchte deshalb meine Gedanken zu diesen Fragen hier nicht wiederholen, wohl aber auf einen Umstand besonders hinweisen, der zwar trivial erscheint, aber in der didaktischen Diskussion oft vernachläßigt wird: Eine befriedigende Nutzung der Chancen und die Vermeidung der Probleme, die sich aus den neuen mathematischen Software-Systemen für die Didaktik der Mathematik ergeben, kann nur auf einem gründlichen Verständnis der inneren Logik der Mathematik und der auf Mathematik beruhenden technischen Denkweise basieren. Dazu gehört ein klares Verständnis z. B. folgender Konzepte und Zusammenhänge:

◊ Die Rolle der Mathematik innerhalb des technischen Problemlöseprozesses.

◊ Die Rolle des Beweisens innerhalb der Mathematik. Der Unterschied zwischen Beobachten und Beweisen.

◊ Die Rolle des mathematischen Problemlösens für die Gewinnung neuer mathematischer Erkenntnisse und die Rolle des mathematischen Wissens für das mathematische Problemlösen. Damit im Zusammenhang die Einsicht, daß mathematisches Wissen und mathematisches Problemlösen in gewisser Weise äquivalent sind.

◊ Die Rolle der Sprache (Sprachen) als Mittel der Formulierung von mathematischem Wissen und mathematischen Problemlösemethoden.

◊ Der Begriff des Algorithmus und die Rolle des Computers als Werkzeug zur Ausführung von Algorithmen.

◊ Das Zusammenspiel zwischen nicht-algorithmischer Mathematik und algorithmischer Mathematik.

◊ Die Phasen in der Entwicklung von neuem mathematischen Wissen von der Beobachtung in Beispielen über die Vermutung und den Beweis zum Satz bzw. einer darauf aufbauenen Methode für bessere Beobachtungen in komplexeren Beispielen,... (die »Kreativitätsspirale«).

◊ Das Ziel der Mathematik, durch Denken auf einer höheren Ebene das Denken auf einer unteren Ebene überflüssig zu machen. (»Die Mathematik trivialisiert sich ständig selbst.«)

◊ Die Wiederholung der Erfindungsprozesse mathematischer Inhalte in der didaktischen Vermittlung der Inhalte.

Ich möchte insbesondere die Lehrer ermuntern, sich mit diesen grundlegenden Fragen auseinanderzusetzen, von deren Beantwortung die Qualität, der Erfolg, die Attraktivität und die Relevanz ihres Unterrichts unter Verwendung der neuen mathematischen Softwaresysteme entscheidend abhängen. Klarheit in der Sicht der obigen Zusammenhänge ergibt unter anderem auch einen selbstverständlichen Ausweg aus der obigen vermeintlichen Paradoxie zwischen Verbannung und Dogmatisierung der Mathematiksysteme im Unterricht, wie ich ihn im »White-Box / Black-Box Prinzip« beschrieben habe: In der Phase des Entwickeins von neuem mathematischen Wissen sollten die entsprechenden Teile der Mathematiksysteme nicht als Black-Box verwendet werden (»White-Box Phase«), während sie natürlich in dem Augenblick als Black-Box verwendet werden können, da die entsprechenden Inhalte so gründlich verstanden werden, daß ihre Anwendung auf Beispiele langweilig wird. Die »Langeweile« ist dabei ein entscheidendes psychologisches Kriterium für das Erkennen des Stadiums, in welchem ein schwieriger mathematischer Sachverhalt durch ein systematisches Verfahren (ein Wissen, auf welchem eine Problemlösemethode basiert) trivialisiert wurde. In diesem Stadium wird im mathematischen Erfindungsprozeß und im didaktischen Prozeß gleichermaßen die White-Box-Phase verlassen und es kann zur Black-Box-Phase übergegangen werden.

Es ist erstaunlich, wie wenig selbst professionelle Mathematiker über diese und ähnliche Fragen nachdenken, deren Beantwortung durch die Existenz der heutigen mathematischen Softwaresysteme mehr denn je herausgefordert werden. Zum Beispiel gibt es auch heute noch sehr viele Mathematiker, die glauben, daß mathematische Probleme in den mathematischen Softwaresystemen durch »häufiges Iterie-ren« mathematisch trivialer Schritte (was eben im Computer jetzt möglich ist und »händisch« bisher nicht möglich war) gelöst werden. Oder anders ausgedrückt: Nach Ansicht vieler Mathematiker ist die algorithmische Mathematik die Implementierung trivialer Mathematik am Computer und eigentlich eher eine Randerscheinung der Mathematik.

In Wahrheit war der Drang der Mathematik, Erkenntnisse zu gewinnen, zu einem großen Teil immer vom Willen gesteuert, gewisse Probleme systematisch zu lösen. Je schwächere Bausteine man für die Komposition von Lösungen komplexer mathematischer Probleme voraussetzt, umso schwieriger wird der mathematische Problemlöseprozeß, insbesondere der Beweis der mathematischen Sätze, die die Grundlage für die Lösungsmethode bilden. Es ist deshalb logisch selbstverständlich, daß die algorithmische Lösung von mathematischen Problemen, bei der die Problemlösungen (in vielen Schichten übereinander) letztlich auf die im Computer verfügbaren Bausteine zurückgeführt werden müssen, »mehr« Mathematik braucht (d. h. stärkere Sätze, ausgefeiltere Theorien, schwierigere Beweise) als die nicht-algorithmische »Lösung«. Deshalb darf es einen nicht wundern, daß die heutigen mathematischen Software-Systemen auf einem reichhaltiges Arsenal an neuen mathematischen Methoden mit darunterliegenden neuen mathematischen Theorien aufbauen, das zu 80 Prozent vor drei Jahrzehnten noch völlig unbekannt war.

Schon allein deshalb gibt es keinen Anlaß zu befürchten, daß die neuen mathematischen Softwaresysteme »die Mathematik überflüssig« machen werden. Im Gegenteil, mit jeder neuen mathematischen Lösung entstehen heute unter dem Druck der Perfektionierung der mathematischen Systeme neue mathematische Probleme. Es wird nur das Bewußtsein größer, daß es viele verschiedene Arten gibt, sich mit Mathematik zu beschäftigen, und dementsprechend auch viele Arten, Mathematik zu unterrichten. Die Art der Beschäftigung hängt vom Ziel der Beschäftigung mit Mathematik und innerhalb des Unterrichts von den wechselnden Unterrichtsphasen und den dementsprechenden Unterrichtszielen ab. In diesem Sinne eröffnen dieneuen Systeme eine reichhaltige, neue Welt, sich auf vielfältige und interessante Art mit Mathematik zu beschäftigen: durch spielerischen Umgang in der Exploration von Situationen, Begriffen, Objekten, Problemen; durch Formulieren und rasches Austesten von Vermutungen; durch Entwickeln von Theorien und den Beweis von Sätzen; durch Umsetzen des Inhalts konstruktiver Sätze in Algorithmen; durch Anwenden der Algorithmen auf Probleminstanzen; durch Verwenden der Systeme als Black-Boxes und die Konzentration auf die Umsetzung von Problemen aus der Sprache des Anwenders in die Sprache der in den Systemen vorhandenen mathematischen Bausteine.

Mit der Verfügbarkeit professioneller mathematischer Softwaresysteme am Markt entsteht jetzt eine Fülle von Unterrichtshilfen für Schüler, Studenten und Lehrer. Es entstehen Lehrbücher, die zum Teil vollständig in die neuen Softwaresysteme integriert sind, Beispielsammlungen für Lehrer, natürlich auch Einführungen in die Systeme und für die Lehrer auch einige wenige Abhandlungen über didaktische Prinzipien im Umgang mit den neuen Systemen.

Das vorliegende Buch von Helmut Heugl, Walter Klinger und Josef Lechner nimmt unter der neuen didaktischen Literatur in diesem Bereich eine besondere Stelle ein: Es ist meines Wissens das erste Buch, in welchem sich in systematischer Weise sowohl didaktische Prinzipien für die Verwendungen der neuen Systeme im Mathematik-Unterricht als auch zugleich zu jedem der Prinzipien praktische Beispiele finden, die zum Großteil in einem der weltweit wohl umfangreichsten Feldversuche an höheren Schulen ausprobiert wurden. Das Buch kann also in entscheidender Weise zu einem zugleich reflektierten und praktischen didaktischen Umgang mit den neuen Systemen beitragen und ich wünsche diesem Buch deshalb von Herzen sehr viel Erfolg.

Bruno Buchberger

Leiter des Forschungsinstituts für Symbolisches Rechnen

(Research Institute for Symbolic Computation)

Hagenberg, 14. Mai 1996

Vorwort der Autoren

Informationstechnologien im allgemeinen und insbesondere der Computer sind dabei, das Lehren und Lernen grundsätzlich zu verändern. Bildungsinstitutionen werden künftig ihren Auftrag nur mehr erfüllen können, wenn sie sich dieser Herausforderung stellen. Im Fach Mathematik wurde darüber hinaus im Laufe der Geschichte nicht nur das Lehren und Lernen, sondern auch die Denk- und Arbeitsweise durch die Hilfsmittel geprägt.

In Österreich hat das Ministerium für Unterricht schon sehr rasch reagiert. Mitte der achziger Jahre wurden die höheren Schulen mit Computern ausgestattet und zu Beginn der neunziger Jahre war Österreich das erste Land der Welt, in dem für alle Gymnasien die Generallizenz für ein Computeralgebra-System, nämlich DERIVE, erworben wurde. Eine naheliegende Konsequenz war, ein Forschungsprojekt mit dem Ziel in Auftrag zu geben, die Auswirkungen solcher Softwaresysteme auf das Lehren und Lernen zu untersuchen sowie Unterrichtsmaterialien und Ausbildungskonzepte zu entwickeln.

Das Autorenteam war wesentlich an diesem Projekt beteiligt und zwar einerseits in der Projektleitung und -auswertung und andererseits als Projektlehrer in Versuchsklassen. Insgesamt waren etwa 700 Schülerinnen und Schüler in 39 Klassen an diesem Projekt beteiligt. Genauer wird im Kapitel 6 über das Projekt berichtet.

Die in diesem Forschungsprojekt gemachten Erfahrungen, verbunden mit der Erkenntnis, daß es im Bereich des Computereinsatzes noch viele weiße Flecken auf der didaktischen Landkarte gibt, haben uns veranlaßt, dieses Buch zu schreiben. Thema des Buches ist der Einfluß von Computeralgebra-Systemen auf das Lernen und Lehren von Mathematik. Auch wenn entsprechend unserer Erfahrung die im Buch angebotenen Aufgaben praktisch vollständig mit DERIVE ausgeführt wurden, so glauben wir doch, daß die aus der Beobachtung von Schülern und Lehrern gewonnenen Lernstrategien und didaktischen Prinzipien auf das Arbeiten mit anderen Computeralgebra-Systemen übertragbar sind. In Klassen, in denen der Computer nur ab und zu eingesetzt wird, haben wir den Mathematikunterricht der Gegenwart untersucht. Dort überwiegt die Bedeutung des Computers als didaktisches Werkzeug. In Versuchsklassen, in denen die Schülerinnen und Schüler den Computer in jeder Arbeitssituation, also auch zu Hause und vor allem in der Prüfungssituation zur Verfügung haben, wurde der Mathematikunterricht der Zukunft erforscht. Bei einem solchen Einsatz spielt der Computer als Rechenhilfsmittel eine wichtige Rolle und darüber hinaus wagen wir die These, daß durch die neuen Möglichkeiten beim Modellieren und Interpretieren auch die Denk- und Arbeitsweisen verändert werden.

Damit soll ausgedrückt werden, daß die in diesem Buch vorgestellten Ergebnisse nicht nur in »scholastischer Weise« durch das Studium von Schriften entstanden sind, sondern wir berichten über Ergebnisse aus der Schulpraxis. Die zur Erläuterung unserer Thesen angebotenen Beispiele wurden in der Unterrichtspraxis erprobt, und zwar eben nicht in einer Laborsituation mit einigen wenigen ausgewählten Schülern, sondern in ganz normalen Klassen.

Das Angebot an Literatur zum computerunterstützten Unterricht ist sehr groß und wächst mit beachtlicher Geschwindigkeit. Meistens handelt es sich aber um Beispielsammlungen, und dabei überwiegen wieder Aufgaben mit »Verstärkereffekt«, das heißt traditionelle Aufgaben, die für einen computerunterstützten Unterricht aufbereitet wurden.

In der didaktischen Literatur findet man andererseits wieder eher Arbeiten, in denen auf einer Metaebene über didaktische Konzepte reflekiert wird und wo Beispiele aus der Unterrichtspraxis nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Wir haben das Abenteuer gewagt, diese beiden Bereiche miteinander zu verbinden. Und so ist ein didaktisches Lehrerbuch entstanden, in dem versucht wird, eine Synthese aus didaktischer Theorie und einem breiten Angebot an Beispielen aus der Unterrichtspraxis zu bilden. Damit soll einerseits die Theorie untermauert und andererseits dem Leser bzw. Benutzer eine direkte Umsetzung des hier Gelesenen im Unterricht ermöglichen.

Adressaten sind also all jene, die den Weg von Lernenden in die Mathematik begleiten, sei es in der Schule, an der Universität oder in der Erwachsenenbildung, sowie Vertreter der Fachdidaktik und nicht zuletzt Lehramtsstudenten. Bis sie in ihren Beruf eintreten, werden Computeralgebra-Systeme entweder in PC- oder in Taschenrechnerform schon zum Standardlernmedium gehören.

Um eine bessere Lesbarkeit zu erreichen, wird fast generell auf Formulierungen wie »Lehrerinnen und Lehrer«, »Schülerinnen und Schüler« etc verzichtet. Wir meinen die Bezeichnungen »Lehrer« bzw. »Schüler« jedoch nicht geschlechtsspezifisch, sondern vielmehr als Berufsbezeichnung. Jedesmal, wenn wir von »Lehrern« oder »Schülern« sprechen, schließen wir daher auch »Lehrerinnen« und »Schülerinnen« mit ein!

Stellvertretend für die vielen Menschen aus unserer Umgebung, die durch Anregungen und Diskussionen die Entstehung dieses Buches begleitet haben, danken wir besonders den Lehrern und Schüler, die am Projekt mitgearbeitet haben und durch ihre Arbeit und ihre Ideen zu den eigentlichen Impulsgebern dieses Buches wurden. Ganz speziell dafür bedanken möchten wir uns bei Herrn Prof. Buchberger - Gründer und Vorstand des RISC (Research Institute for Symbolic Computation, Schloß Hagenberg) und Erfinder der Methode der Gröbner Basen in der Computeralgebra - der auch das Vorwort zu diesem Buch geschrieben hat.

Helmut Heugl, Walter Klinger, Josef Lechner

Wien, 1. Mai 1996

1. Absichten und Konzept des Buchs

1.1. Die Entwicklung des Mathematikunterrichts

Eine der Triebfedern des zivilisatorischen Fortschritts war immer schon das Bestreben, Probleme des täglichen Lebens durch technische Hilfsmittel leichter bewältigen zu können. Beschäftigt man sich mit der Geschichte der Mathematik [vgl. dazu Kaiser/Nöbauer, 1984], so erkennt man, daß zwei Bereiche immer wieder besonders für den Fortschritt verantwortlich waren: einerseits die Rechenhilfsmittel, andererseits die Rechenverfahren und die Darstellungsweisen.

Man denke nur an die verschiedenen Formen von Rechenbrettern, die schon im Altertum weitverbreitet waren. Ein solcher Abakus ist aus dem vierten Jahrhundert v. Chr. aus Griechenland erhalten, die Chinesen legten Bambusstäbchen auf Rechenbretter. Einen weiteren Entwicklungsschub löste die Entdeckung der Logarithmen durch den Schweizer Bürgi und den Schotten Neper Ende des 16. und Anfang des 17. Jahrhunderts aus. Bis in die sechziger Jahre unseres Jahrhunderts war das Logarithmenbuch das Rechenhilfsmittel, das die Schulmathematik methodisch und inhaltlich prägte. Und schließlich war ja auch der Rechenstab nichts anderes als die mechanisierte Form des Rechnens mit Logarithmen. Zur Zeit Johannes Keplers wurden die ersten mechanischen Rechenmaschinen gebaut. Für die Entwicklung der Schulmathematik brachten dann erst die elektronischen Rechenmaschinen -die Taschenrechner - große Veränderungen.

Beispiele für den Einfluß von Darstellungsweisen wären: Die Übernahme der indischen Positionsarithmetik durch die Araber, die sich dann auch in Europa verbreitet hat, oder die Entwicklung der bis heute verwendeten algebraischen Symbolik vor allem durch Viéte und später durch Descartes. Bei der Verbreitung der Algorithmen für die vier Grundrechenarten spielte die mittelalterliche Zunft der Rechenmeister eine wichtige Rolle. Genannt wird meistens ihr bedeutendster Vertreter Adam Riese (um 1520).

Heute steht uns ein mathematisch-technisches Hilfsmittel zur Verfügung, das die oben angeführten Bereiche beeinflussen und verändern kann: *der Computer*, ein noch nie dagewesenes numerisches und algebraisches Rechenhilfsmittel und eine mathematische Maschine, die auch die schon seit dem Mittelalter tradierten Darstellungsweisen und Algorithmen verändern kann. Daß sich in der Schulmathematik parallel die Lehr- und Lernmethoden verändern werden, kann man ebenfalls aus der Geschichte lernen.

Da wir glauben, daß Evolution besser ist als Revolution, wollen wir unter der Devise 'zuerst besinnen auf das Gestern und dann denken an das Morgen' kurz die wichtigsten Entwicklungsphasen des Mathematikunterrichts der letzten fünfzig Jahre beleuchten:

Die fünfziger- und frühen sechziger Jahre waren gekennzeichnet durch eine Art '*Aufgabendidaktik*' oder volkstümlicher ausgedrückt eine 'Kochrezeptmathematik'. "Bitte erklär' mir nichts, sag mir nur wie's geht!" sagte die Tochter eines Mathematikers zu ihrem Vater. Der Kalkülaspekt stand eindeutig im Mittelpunkt. Sprüche, wie den eben zitierten, können Sie heute noch von Schülern hören.

Ende der sechziger Jahre begann der Einfluß der '*New-Math-Bewegung*' in der Schule wirksam zu werden. Angeblich unter dem Einfluß des 'Sputnikschocks' war es ein Versuch, der Krise des westlichen Bildungssystems zu begegnen, indem man den dem Wissenschaftsaspekt mehr Gewicht zu gab. Die Auswirkung für die Schulmathematik könnte man durch die Devise kennzeichnen: "Man betrachte die Universitätsmathematik durch ein Verkleinerungsglas und gehe damit in die Schule." Das Abstrakte, das Formale stand im Mittelpunkt. Eine typische Ausprägung dieser Richtung war die übertriebene Mengenlehre. Mit der größeren Abstraktheit der Gegenstände, mit denen man sich beschäftigt, wächst das Bedürfnis nach Genauigkeit des sprachlichen Ausdrucks. Daß dabei die Forderung nach Altersgemäßheit oft mißachtet wurde, sollen zwei Beispiele aus einem Lehrbuch der 5. Schulstufe zeigen:

Normalerweise wissen schon vierjährige Kinder, was ein Dreieck ist. Eine Krise kriegen Kinder wahrscheinlich, wenn sie im Schulbuch lesen: "Ein Dreieck ist die Durchschnittsmenge aus einem Winkelfeld und einem Parallelstreifen." Genauso furchterregend klingt die Definition der Division in diesem Lehrbuch für Zehnjährige: "Das Zerlegen einer (endlichen) Menge von vorgegebener Mächtigkeit in Teilmengen von gegebener gleicher Mächtigkeit führt auf eine Division."

In den *siebziger Jahren* ließ die Gegenbewegung nicht lange auf sich warten: Neben der fachlichen Dimension wurden der pädagogischen (einschließlich der gesellschaftswissenschaftlichen) Dimension, der psychologischen Dimension (Lern- und Entwicklungspsychologie, Soziologie) sowie der Beobachtung und Berücksichtigung der Schulpraxis mehr Raum gewidmet. Kennzeichen dieser Strömung der Schulmathematik waren einerseits die Betonung einer *anwendungsorientierten Mathematik* und andererseits gestützt auf Theorien von J.Piaget oder J.S.Bruner, die stärkere Beachtung des *genetischen Prinzips* bzw. des *Spiralprinzips*.

"Man kann sich für Zahlentheorie, algebraische Geometrie und Kategorien begeistern und doch einsehen, wie unendlich ärmer die Mathematik ohne die Anregungen wäre, die ihr von den Anwendungen zugeflossen sind. Die Mathematik hat als nützliche Tätigkeit angefangen, und sie ist heute nützlicher, als sie je gewesen ist. Man kann sagen: sie wäre nicht, wenn sie nicht nützlich wäre!" [Freudenthal, 1977, S. 24]

Anwendungsorientierte Mathematik bezeichnet bekanntlich kein festumrissenes Gebiet oder keine bestimmte Methode, es geht vielmehr um eine bestimmte 'Haltung' gegenüber der Mathematik [Reichel, 1996]. Charakteristische Kennzeichen sind:

◊ Die Schulung des Problemlösens.

◊ Außermathematische Anwendungen werden zum zentralen Thema gemacht.

◊ Stärkere Betonung der heuristischen Phase des Mathematiklernens.

◊ Entwicklung allgemeiner Qualifikationen des Anwendens, d.h. der Lernende soll ein Wissen ('Metawissen') über den Anwendungsprozeß selbst erwerben [Fischer, 1985].

Einige Merkmale der genetischen Methode [Wittmann, 1981, S. 131]:

◊ Anschluß an das Vorverständnis des Adressaten.

◊ Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus.

◊ Einbettung der Überlegungen in größere, ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik.

◊ Hinführen zu strengeren Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze.

◊ Allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung.

In den *achziger Jahren* begann jene Phase der Schulmathematik, um die es in diesem Buch geht: Der *computerunterstützte Mathematikunterricht*. Im ersten Abschnitt dieser Entwicklung hat der Computer - schließlich ist er ja auch ein Produkt mathematischen Denkens - die Mathematik veranlaßt, sich eine computergerechtere Form zu geben. Die verstärkte Beschäftigung mit numerischen Methoden ist ein deutliches Indiz dafür. Inzwischen ist es aber durch Cumputeralgebra-Systeme möglich geworden, weit mehr als nur numerische Verfahren computerunterstützt zu bearbeiten.

Wenn man die am Anfang dieses Kapitels formulierte These akzepiert, kann der Schluß gezogen werden, daß der Computer und Computeralgebra-Systeme einen 'Quantensprung' in der Entwicklung des Mathematikunterrichts bringen werden. Dies wird nicht nur durch die vielfältigen Möglichkeiten bewirkt, den Computer als *Rechenhilfsmittel* einzusetzen (der Computer als Tool), auch die Nutzung als *didaktisches Werkzeug* (der Computer als Tutor) trägt genauso zu einem völlig neuen Stil des Mathematikunterrichts bei. Neue und effektiver nutzbare Rechenverfahren und Darstellungsarten sind weitere Triebfedern für Veränderungen beim Lehren und Lernen von Mathematik. Daß ein solches Lernmedium auch die *Unterrichtsmethoden* verändert und erlaubt, den Unterricht schülerzentrierter zu gestalten, wird Gegenstand eines eigenen Kapitels (Kap. 5) sein.

Computeralgebra-Systeme verändern also nicht nur die Tätigkeiten, sondern auch die Objekte, mit denen die Tätigkeiten ausgeführt werden. Wir erwarten uns nicht nur einen 'Verstärkereffekt' - das heißt, daß wir dasselbe wie früher, nur eben schneller, öfter, genauer und sicherer machen - Computeralgebra-Systeme ermöglichen neue Tätigkeiten und verschieben den Schwerpunkt vom Ausführen hin zu z.B. Planen, Reflektieren, Analysieren.

1.2. Zum Aufbau den Buchs

Die drei großen Blöcke, aus denen dieses Buch besteht, spiegeln wieder, was wir vermitteln wollen: Die Einsatzmöglichkeit im Unterricht, das Lernen und das Lehren von Mathematik mit CAS.

Kapitel 2

Das Kapitel 2 mit dem Titel "*Was kann ein Computeralgebra-System?*" soll kein zweites Handbuch werden. Die Einteilung ist nicht an den Möglichkeiten eines Computeralgebra-Systems (CAS) orientiert, sondern an den Möglichkeiten und Notwendigkeiten des Unterrichts. In diesem Kapitel sollen vor allem die Beispiele aus der Schulpraxis für sich sprechen, die didaktischen Hinweise sind bewußt kurz gehalten.

Man kann drei Bereiche unterscheiden:

◊ *Das CAS als Rechenhilfsmittel*:

Zuerst wird das CAS als numerisches Hilfsmittel vorgestellt, mit Beispielen zum exakten und näherungsweisen Rechnen. Dabei wird auf den Unterschied und die neuen Möglichkeiten im Vergleich zum numerischen Taschenrechner hingewiesen. Es folgen Aufgaben, bei denen das CAS als symbolisches Hilfsmittel von der Algebra bis hin zur Analysis eingesetzt wird. Auch die Möglichkeit der Nutzung implementierter Algorithmen wird gezeigt.

◊ *Das CAS als didaktisches Werkzeug*:

Dieser Einsatzbereich spielt auch in jenen Klassen eine Rolle, in denen der Computer nur mehr oder weniger regelmäßig im Unterricht genutzt werden kann. In diesem Kapitel wird gezeigt, welche Bedeutung das CAS beim Begriffsbildungsprozeß oder beim Modellbilden spielen kann.

◊ *Das CAS als kognitives Werkzeug:*

Versteht man unter Kognition ein funktionales System, das Mensch und Werkzeug, aber auch den sonstigen materiellen und sozialen Kontext umfaßt, so können didaktisch gestaltete Softwaresysteme eine entscheidende Erweiterung und Entfaltung der Kognition der Schüler bewirken [Dörfler, 1991]. Es wird an Beispielen vorgeführt, wie der Schüler Algorithmen mit dem CAS entwickeln kann, und es wird gezeigt, daß sich durch das CAS ein neuer Lösbarkeitsbegriff entwickelt. Darüber hinaus wird das CAS als sprachliches Hilfsmittel vorgestellt. Dabei geht es um Hilfen beim Übersetzen von Umgangssprache in formale Sprache sowie um die Bereitstellung neuer Sprachelemente.

Kapitel 3

Hier wird das *Lernen von Mathematik* behandelt. Das didaktische Konzept ist stark von den Thesen Bruno Buchbergers beeinflußt. Er ist Vorstand des RISC-Institutes an der Universität Linz (Research Institute for Symbolic Computation). In verschiedenen Arbeiten und Vorträgen hat er auch zum Verhältnis Mathematik - Informatik sowie zu didaktischen Fragen des Mathematiklernens nicht nur an der Universität, sondern auch in der Schule Stellung genommen. Aus seiner Definition von Mathematik ergibt sich als wichtigster Bildungsauftrag dieses Fachs die *Schulung des Problemlösens*. Der Weg des Lernenden in die Mathematik wird als Spirale dargestellt, wir nennen sie die *Buchbergersche Kreativitätsspirale*. Man kann bei einem solchen Schleifendurchlauf drei Phasen unterscheiden: die heuristische Phase, die exaktifizierende Phase und die Anwendungsphase.

Bei unseren Untersuchungen hat sich gezeigt, daß durch die Verwendung des CAS vor allem die *heuristische Phase* des Mathematiklernens besonders gefördert, ja eigentlich erst entwikelt wird. Experimentieren und Testen werden unverzichtbare Arbeitsformen. In der exaktifizierenden Phase hilft das CAS dem Schüler, sich auf das eigentliche Problem zu konzentrieren, weil es ihm Rechenarbeit abnimmt, und in der Anwendungsphase erschließt das CAS neue Bereiche.

Einer Phase im Lernprozeß haben wir bei unseren Untersuchungen besonderes Augenmerk gewidmet: der Schnittstelle zwischen Operieren und Interpretieren. Das CAS nimmt dem Schüler viele Tätigkeiten beim Operieren ab. Wenn es aber dann gilt, die Ergebnisse des Operierens zu interpretieren - sowohl innermathematisch als auch von der Anwendungssituation aus - so muß der Lernende etwas interpretieren, was er nicht selber produziert hat. Wir wollen zeigen, daß das CAS hier auch ein wichtiges Medium zum Testen und Interpretieren ist.

Kapitel 4

In diesem Kapitel geht es, wie auch in Kapitel 5, um das *Lehren von Mathematik* mit Unterstützung von CAS. In der didaktischen Literatur wird zwischen Lehrzielen und Lernzielen unterschieden. Der Idealzustand ist dann gegeben, wenn Lehr- und Lernziele zur Deckung gebracht werden können und wenn die gesteckten Lernziele für den Schüler einsehbar und erreichbar sind. Ausgangspunkt für das Entwickeln von Unterrichtskonzepten muß also eine Beobachtung des Lernprozesses der Schüler sein, und zwar nicht nur vom inhaltlichen Standpunkt aus, sondern es müssen auch die lernpsychologische Komponente und die pädagogische Komponente bis hin zu Fragen der Motivation und der sozialen Struktur der Lerngruppe einbezogen werden. Dies bestätigt auch die Außenevaluation unseres Projekts, über die im Kapitel 6 kurz berichtet wird.

Zuerst werden einige *neue didaktische Prinzipien* als Konstruktionsanleitung für den Unterricht vorgestellt. Experten werden hier zumindest in Teilaspekten Ideen traditioneller didaktischer Prinzipien entdecken, wie zum Beispiel das genetische Prinzip oder das Spiralprinzip. Man kann in unseren didaktischen Konzepten auch all jene charakteristischen Kennzeichen eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts finden, die seit der didaktischen Reform der siebziger Jahre propagiert werden, aber in der Unterrichtspraxis noch immer nicht ausreichend umgesetzt worden sind. Unsere Untersuchungsergebnisse bestärken uns in der Annahme, daß eine Realisierung mit dem neuen Lernmedium Computer wesentlich effizienter möglich ist.

Die in diesem Buch vorgestellten didaktischen Prinzipien, wie das *White Box/Black Box-Prinzip* oder das *Black Box/White Box-Prinzip*, berücksichtigen zwar die Möglichkeit, das CAS als Black Box zu nutzen, allerdings erst dann, wenn die Inhalte dieser Lernbox für den Lernenden 'white' gemacht wurden. Diese 'Zweiphasenmodelle' des Mathematiklernens sollen einerseits Konzepten entgegengestellt werden, bei denen der Schüler nur mehr Rezepte unter Nutzung des CAS als Black Box ausführt, ohne den Inhalt zu kennen oder gar zu verstehen. Andererseits bieten sie die Chance durch Übertragen von Tätigkeiten auf das CAS, die in früheren White Boxes gelernt wurden, die jetzt dominierenden Kalkülfertigkeiten zurückzunehmen und Freiraum für das Modellieren, Begründen und Interpretieren zu schaffen.

Ein typisches CAS-Prinzip ist das *Modulprinzip*, auch wenn die Anleitung zu modularem Denken bei komplexeren Aufgaben unabhängig von der Computernutzung zu empfehlen ist. Aber erst das Lernmedium CAS ermöglicht die Anfertigung von Modulen durch den Schüler oder durch den Lehrer, die dann in der Anwendungssituation abrufbar sind. Die Chance, mehrere 'Erscheinungsformen' eines mathematischen Objektes gleichzeitig zur Verfügung zu haben und zwischen ihnen hin- und herzupendeln, wird von uns als *Window-Shuttle-Technik* bezeichnet.

Kapitel 5

Hier wird über Projektergebnisse, die die Veränderung des Unterrichts betreffen, berichtet. Wie schon einmal erwähnt, ist die signifikanteste Veränderung beim Methodeneinsatz die Verschiebung zu einem mehr schülerzentrierten, experimentellen Unterricht. Damit verändert sich natürlich auch *die Rolle des Lehrers*. Er muß mit einer zweiten Autorität im Unterrichtsprozeß fertig werden, dem CAS. Der algorithmische Gehorsam, der bisher bei starker Lehrerführung zu beobachten war, ist nicht mehr vorhanden. Selbst in der Prüfungssituation sieht man bei zwanzig Schülern bis zu zehn verschiedene Lösungswege. Das erfordert vom Lehrer hohe fachliche Kompetenz und Flexibilität. In diesem Kapitel werden auch Anleitungen zum Anfertigen und Gebrauch von Arbeitsunterlagen, wie etwa Arbeitsblättern oder Schülerfiles gegeben. Es wird auf die veränderte Bedeutung des Übens hingewiesen. Üben wird nicht überflüssig, es kommt nur zu anderen Übungsschwerpunkten.

Neue Lernformen und neue didaktische Konzepte verlangen auch andere Überprüfungsformen. Wenn man die charakteristischen Kennzeichen der didaktischen Reform der siebziger Jahre ernst nimmt, dürfte die typische Schularbeit bzw. Klassenarbeit schon jetzt nicht mehr jenes Übergewicht bei der Notenfindung haben, oder aber es müßte sich die Art der Aufgaben verändern. Meist wird in solchen Arbeiten primär Rechenfertigkeit überprüft. Durch das CAS wird eine solche Veränderung nicht nur möglich, sondern auch notwendig, da das Operieren meist dem CAS überlassen wird. An Beispielen aus der Unterrichtspraxis wird gezeigt, wie sich die Art der Aufgaben und auch die Arbeitsweise der Schüler in der Prüfungssituation ändert.

Kapitel 6

Dieses Kapitel bietet einen Bericht über das österreichische Projekt, über die Ziele, die Organisationsformen und erste Ergebnisse [Heugl, 1995]. Wir haben dieses Projekt immer als 'Weitwinkelprojekt' bezeichnet. Wir wollten die CAS-Nutzung bei möglichst vielen Inhalten von der siebenten bis zur zwölften Schulstufe untersuchen, mit verschiedensten Hardwareausstattungen, verschiedenen Klassengrößen und verschiedenen Lehrerpersönlichkeiten. Man könnte natürlich einwenden, daß am Projekt nur freiwillige, intrinsisch motivierte Lehrer beteiligt waren und daher die Gefahr bestünde, die Ergebnisse zu rosig zu sehen. Wir haben daher eine einfache Formel entwickelt: Wenn ein Konzept mit diesen Versuchsgruppen nicht realisierbar war, ist es mit großer Wahrscheinlichkeit zu verwerfen, wenn es erfolgreich war, darf noch nicht der Schluß gezogen werden, daß damit eine Erfolgsgarantie im 'Normalunterricht' gegeben ist. Aber es lohnt sich, solche Unterrichtskonzepte den Lehrern verbunden mit Unterrichtsmaterialien anzubieten. Dazu ist eine begleitende Untersuchung auch in der Zukunft notwendig.

Wir haben natürlich nicht nur Antworten, sondern auch viele Fragen produziert. In zukünftigen Projekten, wir nennen sie 'Teleobjektivprojekte' wollen wir einige solcher Fragen herausgreifen und genauer untersuchen. Im Bereich der Hardware lautet unser Ergebnis: Ideal wäre ein computeralgebratauglicher Taschenrechner, den der Schüler in jeder Arbeitssituation zur Vergfügung hat, verbunden mit der Nutzung von CAS wie etwa DERIVE am PC im EDV-Raum, wenn der Computer als didaktisches Werkzeug eingesetzt wird, und vor allem, wenn der große Farbschirm eine didaktische Notwendigkeit ist. Wichtig wäre dann auch, daß der Algebrarechner des Schülers und das CAS am PC kompatibel sind. Der jetzt auf den Markt gekommene TI-92 ist ein erster Schritt in diese Richtung. Auch bezüglich des didaktischen Konzepts solcher Algebrarechner wird es ein 'Teleobjektivprojekt' geben. In Österreich gibt es bereits Versuchsklassen, die mit dem TI-92 ausgestattet sind [Kutzler, 1996].

1.3. Wie das Buch zu lesen ist

Da wir ein didaktisches Lehrerbuch schreiben wollen, d.h. eine Synthese aus didaktischer Theorie und Aufgaben aus der Unterrichtspraxis anstreben, ist es notwendig drei Ebenen zu vernetzen:

◊ die Lehrer-Schüler-Ebene

◊ die didaktische Ebene

◊ die softwarspezifische Ebene

Auch der Lehrer ist ständig mit diesen drei Ebenen in der Unterrichtspraxis konfrontiert. Gerade dort, wo die Beispiele aus der Unterrichtspraxis auch zur Untermauerung der Theorie dienen und wo noch dazu das DERIVE-Handling dem Leser kurz erläutert werden soll, ist eine scharfe Trennung dieser Ebenen nicht möglich.

Die Beispiele sind derart geschrieben, daß beim Lesen die dargestellten Bearbeitungen gleichzeitig am Computer nachvollzogen werden können. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß dieses Buch nicht als Ersatz für das Handbuch oder für programmtechnische Literatur gedacht ist. Wichtige, für das Verständnis der Aufgaben erforderliche Derive Befehle und Funktion werden am Ende des Kapitels 2 zusammengefaßt und kurz erklärt..

Die Enstehungsgeschichte der einzelnen Zeilen eines Arbeitsblattes wird dadurch dokmentiert, daß in jeder Zeile entweder rechts oder über der Nummer (z. B. #39) die dazugehörige Annotationen angegeben ist, z. B.:

```
#38: √2                                                User

#39: 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769       Approx(#38)
```

Hier liefert der Approx-Befehl eine numerische Näherung für die Wurzel aus 2 in der eingestellten Genauigkeit (#39).

Da die meisten Beispiele mit DERIVE bearbeitet sind, wurden die programmspezifischen Informationen mit eigenen Hervorhebungen belegt. Unterschiedlich dargestellt sind drei verschiedene Bereiche:

◊ Optionen die direkt im Hauptmenü angewählt werden können (z. B. **calculus**)

◊ Einstellungen, die durchgeführt werden können (z. B. `Approximate`) und

◊ die Namen der Funktionen, die entweder im Programm implementiert sind oder neu erzeugt wurden (z. B. VECTOR).

Der besseren Lesbarkeit halber werden die häufig auftretenden Begriffe Computeralgebra-System bzw. Computeralgebra durch die Abkürzungen CAS und CA ersetzt.