Mathematiklehren und -lernen mit Computeralgebra-Systemen

Unterrichtsbeispiele und didaktische Konzepte aus dem österreichischen DERIVE-Projekt

Helmut Heugl, Walter Klinger, Josef Lechner

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Trotz größerer Fortschritte in den algorithmischen Grundlagen der Mathematik-Softwaresysteme haben diese Systeme dreißig Jahre lang im Dornröschenschlaf verbracht. Systeme wie MACSYMA, Scratchpad und Reduce waren im wesentlichen nur einigen speziellen Anwendern, z. B. Teilchen-Physikern, und natürlich den Entwicklern der Systeme, d. h. weltweit einigen hundert Mathematikern und Software-Spezialisten, ein Begriff.

Innerhalb weniger Jahre hat sich das Bild jedoch drastisch geändert. Das eine oder andere der neuen Systeme wie z. B. MATHEMATICA, Maple, Axiom, Derive oder Magma ist heute fast jedem Schüler bekannt, jedenfalls jedem Studenten der Mathematik, der Informatik oder der verschiedenen Ingenieurswissenschaften und vielen Entwicklern, Lehrern, Forschern und Ingenieuren in diesen und anderen Gebieten wie Wirtschaft, Psychologie, Medizin etc. Einige der Mathematik-Softwaresysteme gehören heute zur Software-Grundausstattung, die mit den Maschinen mitgeliefert wird. Auf diesen Systemen aufbauende Packages für Anwendungen in Banken, Kontrolltheorie, Statistik, Robotik, Fuzzy-Control, Kryptographie, Schaltungsentwurf, Optik, Data Mining etc. erreichen nochmals einen mindestens ebenso großen Markt wie die Grundsysteme. Ich sehe zwei Gründe für diese Explosion in der Verbreitung und im Bekanntheitsgrad mathematischer Softwaresysteme:

1. Der wesentliche Grund ist ganz pragmatisch in dem Umstand zu sehen, daß einige wenige Wissenschaftler wie Stephen Wolfram (MATHEMATICA) oder David Stoutemyer (Derive) das unternehmerische Risiko auf sich genommen haben, aus dem in den vielen experimentellen Systemen vorhandenen Know-How professionelle Softwareprodukte zu machen und den Markt systematisch zu bearbeiten. Der Erfolg war durchaus nicht sicher. Der Einstieg in die Professionalität hat sich jedoch gelohnt und zwar nicht nur geschäftlich: Seit die professionellen Systeme den Markt durchdringen, gewinnt nicht nur die Problemlösepotenz dieser Systeme, sondern auch die zugrundeliegende Problemlösepotenz der Mathematik einen Grad von Aufmerksamkeit, der in der Geschichte der Mathematik wahrscheinlich einmalig ist.
2. Hand in hand mit der Kommerzialisierung der Systeme ergab sich natürlich die Notwendigkeit und die Möglichkeit, die Benutzeroberflächen der Systeme auf eine neue Ebene der Perfektion zu bringen. Das Resultat ist beeindruckend. Die Oberflächen der mathematischen Software-Systeme (Graphik, Animation, Sound, Einbindung von Hypertext, Gestaltung von interaktiven Büchern mit exekutierbaren Formeln, Integration in die elektronischen Netzwerke, Hilfen zur Gestaltung von Courseware, Integration aller Werkzeuge moderner Software-Technologie zur Strukturierung von Benutzer-Software, etc.) gehören heute wohl zu den ausgereiftesten Beispielen moderner Software-Kunst und eröffnen die mathematische Potenz der Systeme jedem Benutzer auf seiner Ebene des Verständnisses und in seiner Sprache.

Es steht also nun ein großer Teil der Mathematik in leicht bedienbaren Systemen »auf Knopfdruck« zur Verfügung, darunter viele Methoden der Mathematik, die noch bis vor kurzem als »sehr schwierig«, »intelligent« oder »nicht automatisierbar« gegolten haben, insbesondere das »symbolische Rechnen« mit Formeln, ja sogar (noch) in beschränktem Umfang das Beweisen mathematischer Sätze. Jedenfalls steht heute so ziemlich alles bzw. ein Großteil dessen, was in den höheren Schulen bzw. in den unteren Semestern an den Universitäten in Mathematik unterrichtet wird, in den mathematischen Softwaresystemen on-line in einer Art zur Verfügung, die oft keine speziellen Vorkenntnisse mehr voraussetzt.

Das wirft natürlich die Frage auf, was man heute an Mathematik unterrichten soll, ob man überhaupt noch Mathematik unterrichten soll und, wenn ja, wie man Mathematik unterrichten soll. Seit die mathematischen Software-Systeme auf den Markt (und natürlich auch auf den Bildungsmarkt) drängen, wird diese Frage von Lehrern und Professoren, Schülern und Studenten, Eltern und Bildungspolitikern heftig diskutiert. Die Antworten sind zum Teil skurril und bewegen sich zwischen den folgenden beiden Extremen:

- ◊ Verbot der Mathematiksysteme im Mathematikunterricht: Die Argumentation geht dahin, daß der Bildungsinhalt der Mathematik in der Schulung des »mathematischen Denkens« besteht. Wenn man nur mehr lernt, wie man zur Lösung eines bestimmten mathematischen Problems eine bestimmte Funktion in einem Mathematiksystem aufruft, geht der Bildungswert der Mathematik gänzlich verloren. Es ist also das beste, diese Systeme aus dem Unterricht zu verbannen.
- ◊ Ersatz des Mathematikunterrichts durch eine praktische Einschulung in die Bedienung der Mathematiksysteme: Die Argumentation geht in diesem Fall dahin, daß der Bildungsinhalt der Mathematik darin besteht, für sehr allgemeine Klassen von Problemen Lösungsmethoden parat zu haben. Es genügt also, wenn man lernt, wie man reale Probleme als mathematische Probleme formuliert (wobei in den »Packages«,

die auf den mathematischen Grundsystemen aufgebaut sind, auch dieser Schritt dem Benutzer ja zum Teil bereits abgenommen wird) und dann die mathematischen Systeme mit den geeigneten Eingaben versieht. Das Erlernen der schwierigen Mathematik hinter den Lösungsrezepten ist also Zeitvergeudung.

Eine gründliche Beschäftigung mit dieser Frage ist sowohl für die Zukunft der Mathematik und Technik also auch - in größerem Zusammenhang - für die Rolle der Mathematik und Technik in der Gesellschaft von zentraler Wichtigkeit.

Ich habe diese Frage und ihre möglichen Antworten in verschiedenen Schriften in größerem Detail diskutiert und auf einige meiner Beiträge zu dieser Diskussion (z. B. das »White-Box / Black-Box Prinzip« oder die »Kreativitätsspirale«) wird in dem vorliegenden Buch auch bezug genommen. Ich möchte deshalb meine Gedanken zu diesen Fragen hier nicht wiederholen, wohl aber auf einen Umstand besonders hinweisen, der zwar trivial erscheint, aber in der didaktischen Diskussion oft vernachläßigt wird: Eine befriedigende Nutzung der Chancen und die Vermeidung der Probleme, die sich aus den neuen mathematischen Software-Systemen für die Didaktik der Mathematik ergeben, kann nur auf einem gründlichen Verständnis der inneren Logik der Mathematik und der auf Mathematik beruhenden technischen Denkweise basieren. Dazu gehört ein klares Verständnis z. B. folgender Konzepte und Zusammenhänge:

◊ Die Rolle der Mathematik innerhalb des technischen Problemlöseprozesses.

◊ Die Rolle des Beweisens innerhalb der Mathematik. Der Unterschied zwischen Beobachten und Beweisen.

◊ Die Rolle des mathematischen Problemlösens für die Gewinnung neuer mathematischer Erkenntnisse und die Rolle des mathematischen Wissens für das mathematische Problemlösen. Damit im Zusammenhang die Einsicht, daß mathematisches Wissen und mathematisches Problemlösen in gewisser Weise äquivalent sind.

◊ Die Rolle der Sprache (Sprachen) als Mittel der Formulierung von mathematischem Wissen und mathematischen Problemlösemethoden.

◊ Der Begriff des Algorithmus und die Rolle des Computers als Werkzeug zur Ausführung von Algorithmen.

◊ Das Zusammenspiel zwischen nicht-algorithmischer Mathematik und algorithmischer Mathematik.

◊ Die Phasen in der Entwicklung von neuem mathematischen Wissen von der Beobachtung in Beispielen über die Vermutung und den Beweis zum Satz bzw. einer darauf aufbauenen Methode für bessere Beobachtungen in komplexeren Beispielen,... (die »Kreativitätsspirale«).

◊ Das Ziel der Mathematik, durch Denken auf einer höheren Ebene das Denken auf einer unteren Ebene überflüssig zu machen. (»Die Mathematik trivialisiert sich ständig selbst.«)

◊ Die Wiederholung der Erfindungsprozesse mathematischer Inhalte in der didaktischen Vermittlung der Inhalte.

Ich möchte insbesondere die Lehrer ermuntern, sich mit diesen grundlegenden Fragen auseinanderzusetzen, von deren Beantwortung die Qualität, der Erfolg, die Attraktivität und die Relevanz ihres Unterrichts unter Verwendung der neuen mathematischen Softwaresysteme entscheidend abhängen. Klarheit in der Sicht der obigen Zusammenhänge ergibt unter anderem auch einen selbstverständlichen Ausweg aus der obigen vermeintlichen Paradoxie zwischen Verbannung und Dogmatisierung der Mathematiksysteme im Unterricht, wie ich ihn im »White-Box / Black-Box Prinzip« beschrieben habe: In der Phase des Entwickeins von neuem mathematischen Wissen sollten die entsprechenden Teile der Mathematiksysteme nicht als Black-Box verwendet werden (»White-Box Phase«), während sie natürlich in dem Augenblick als Black-Box verwendet werden können, da die entsprechenden Inhalte so gründlich verstanden werden, daß ihre Anwendung auf Beispiele langweilig wird. Die »Langeweile« ist dabei ein entscheidendes psychologisches Kriterium für das Erkennen des Stadiums, in welchem ein schwieriger mathematischer Sachverhalt durch ein systematisches Verfahren (ein Wissen, auf welchem eine Problemlösemethode basiert) trivialisiert wurde. In diesem Stadium wird im mathematischen Erfindungsprozeß und im didaktischen Prozeß gleichermaßen die White-Box-Phase verlassen und es kann zur Black-Box-Phase übergegangen werden.

Es ist erstaunlich, wie wenig selbst professionelle Mathematiker über diese und ähnliche Fragen nachdenken, deren Beantwortung durch die Existenz der heutigen mathematischen Softwaresysteme mehr denn je herausgefordert werden. Zum Beispiel gibt es auch heute noch sehr viele Mathematiker, die glauben, daß mathematische Probleme in den mathematischen Softwaresystemen durch »häufiges Iterie-ren« mathematisch trivialer Schritte (was eben im Computer jetzt möglich ist und »händisch« bisher nicht möglich war) gelöst werden. Oder anders ausgedrückt: Nach Ansicht vieler Mathematiker ist die algorithmische Mathematik die Implementierung trivialer Mathematik am Computer und eigentlich eher eine Randerscheinung der Mathematik.

In Wahrheit war der Drang der Mathematik, Erkenntnisse zu gewinnen, zu einem großen Teil immer vom Willen gesteuert, gewisse Probleme systematisch zu lösen. Je schwächere Bausteine man für die Komposition von Lösungen komplexer mathematischer Probleme voraussetzt, umso schwieriger wird der mathematische Problemlöseprozeß, insbesondere der Beweis der mathematischen Sätze, die die Grundlage für die Lösungsmethode bilden. Es ist deshalb logisch selbstverständlich, daß die algorithmische Lösung von mathematischen Problemen, bei der die Problemlösungen (in vielen Schichten übereinander) letztlich auf die im Computer verfügbaren Bausteine zurückgeführt werden müssen, »mehr« Mathematik braucht (d. h. stärkere Sätze, ausgefeiltere Theorien, schwierigere Beweise) als die nicht-algorithmische »Lösung«. Deshalb darf es einen nicht wundern, daß die heutigen mathematischen Software-Systemen auf einem reichhaltiges Arsenal an neuen mathematischen Methoden mit darunterliegenden neuen mathematischen Theorien aufbauen, das zu 80 Prozent vor drei Jahrzehnten noch völlig unbekannt war.

Schon allein deshalb gibt es keinen Anlaß zu befürchten, daß die neuen mathematischen Softwaresysteme »die Mathematik überflüssig« machen werden. Im Gegenteil, mit jeder neuen mathematischen Lösung entstehen heute unter dem Druck der Perfektionierung der mathematischen Systeme neue mathematische Probleme. Es wird nur das Bewußtsein größer, daß es viele verschiedene Arten gibt, sich mit Mathematik zu beschäftigen, und dementsprechend auch viele Arten, Mathematik zu unterrichten. Die Art der Beschäftigung hängt vom Ziel der Beschäftigung mit Mathematik und innerhalb des Unterrichts von den wechselnden Unterrichtsphasen und den dementsprechenden Unterrichtszielen ab. In diesem Sinne eröffnen dieneuen Systeme eine reichhaltige, neue Welt, sich auf vielfältige und interessante Art mit Mathematik zu beschäftigen: durch spielerischen Umgang in der Exploration von Situationen, Begriffen, Objekten, Problemen; durch Formulieren und rasches Austesten von Vermutungen; durch Entwickeln von Theorien und den Beweis von Sätzen; durch Umsetzen des Inhalts konstruktiver Sätze in Algorithmen; durch Anwenden der Algorithmen auf Probleminstanzen; durch Verwenden der Systeme als Black-Boxes und die Konzentration auf die Umsetzung von Problemen aus der Sprache des Anwenders in die Sprache der in den Systemen vorhandenen mathematischen Bausteine.

Mit der Verfügbarkeit professioneller mathematischer Softwaresysteme am Markt entsteht jetzt eine Fülle von Unterrichtshilfen für Schüler, Studenten und Lehrer. Es entstehen Lehrbücher, die zum Teil vollständig in die neuen Softwaresysteme integriert sind, Beispielsammlungen für Lehrer, natürlich auch Einführungen in die Systeme und für die Lehrer auch einige wenige Abhandlungen über didaktische Prinzipien im Umgang mit den neuen Systemen.

Das vorliegende Buch von Helmut Heugl, Walter Klinger und Josef Lechner nimmt unter der neuen didaktischen Literatur in diesem Bereich eine besondere Stelle ein: Es ist meines Wissens das erste Buch, in welchem sich in systematischer Weise sowohl didaktische Prinzipien für die Verwendungen der neuen Systeme im Mathematik-Unterricht als auch zugleich zu jedem der Prinzipien praktische Beispiele finden, die zum Großteil in einem der weltweit wohl umfangreichsten Feldversuche an höheren Schulen ausprobiert wurden. Das Buch kann also in entscheidender Weise zu einem zugleich reflektierten und praktischen didaktischen Umgang mit den neuen Systemen beitragen und ich wünsche diesem Buch deshalb von Herzen sehr viel Erfolg.

Bruno Buchberger

Leiter des Forschungsinstituts für Symbolisches Rechnen

(Research Institute for Symbolic Computation)

Hagenberg, 14. Mai 1996

Vorwort der Autoren

Informationstechnologien im allgemeinen und insbesondere der Computer sind dabei, das Lehren und Lernen grundsätzlich zu verändern. Bildungsinstitutionen werden künftig ihren Auftrag nur mehr erfüllen können, wenn sie sich dieser Herausforderung stellen. Im Fach Mathematik wurde darüber hinaus im Laufe der Geschichte nicht nur das Lehren und Lernen, sondern auch die Denk- und Arbeitsweise durch die Hilfsmittel geprägt.

In Österreich hat das Ministerium für Unterricht schon sehr rasch reagiert. Mitte der achziger Jahre wurden die höheren Schulen mit Computern ausgestattet und zu Beginn der neunziger Jahre war Österreich das erste Land der Welt, in dem für alle Gymnasien die Generallizenz für ein Computeralgebra-System, nämlich DERIVE, erworben wurde. Eine naheliegende Konsequenz war, ein Forschungsprojekt mit dem Ziel in Auftrag zu geben, die Auswirkungen solcher Softwaresysteme auf das Lehren und Lernen zu untersuchen sowie Unterrichtsmaterialien und Ausbildungskonzepte zu entwickeln.

Das Autorenteam war wesentlich an diesem Projekt beteiligt und zwar einerseits in der Projektleitung und -auswertung und andererseits als Projektlehrer in Versuchsklassen. Insgesamt waren etwa 700 Schülerinnen und Schüler in 39 Klassen an diesem Projekt beteiligt. Genauer wird im Kapitel 6 über das Projekt berichtet.

Die in diesem Forschungsprojekt gemachten Erfahrungen, verbunden mit der Erkenntnis, daß es im Bereich des Computereinsatzes noch viele weiße Flecken auf der didaktischen Landkarte gibt, haben uns veranlaßt, dieses Buch zu schreiben. Thema des Buches ist der Einfluß von Computeralgebra-Systemen auf das Lernen und Lehren von Mathematik. Auch wenn entsprechend unserer Erfahrung die im Buch angebotenen Aufgaben praktisch vollständig mit DERIVE ausgeführt wurden, so glauben wir doch, daß die aus der Beobachtung von Schülern und Lehrern gewonnenen Lernstrategien und didaktischen Prinzipien auf das Arbeiten mit anderen Computeralgebra-Systemen übertragbar sind. In Klassen, in denen der Computer nur ab und zu eingesetzt wird, haben wir den Mathematikunterricht der Gegenwart untersucht. Dort überwiegt die Bedeutung des Computers als didaktisches Werkzeug. In Versuchsklassen, in denen die Schülerinnen und Schüler den Computer in jeder Arbeitssituation, also auch zu Hause und vor allem in der Prüfungssituation zur Verfügung haben, wurde der Mathematikunterricht der Zukunft erforscht. Bei einem solchen Einsatz spielt der Computer als Rechenhilfsmittel eine wichtige Rolle und darüber hinaus wagen wir die These, daß durch die neuen Möglichkeiten beim Modellieren und Interpretieren auch die Denk- und Arbeitsweisen verändert werden.

Damit soll ausgedrückt werden, daß die in diesem Buch vorgestellten Ergebnisse nicht nur in »scholastischer Weise« durch das Studium von Schriften entstanden sind, sondern wir berichten über Ergebnisse aus der Schulpraxis. Die zur Erläuterung unserer Thesen angebotenen Beispiele wurden in der Unterrichtspraxis erprobt, und zwar eben nicht in einer Laborsituation mit einigen wenigen ausgewählten Schülern, sondern in ganz normalen Klassen.

Das Angebot an Literatur zum computerunterstützten Unterricht ist sehr groß und wächst mit beachtlicher Geschwindigkeit. Meistens handelt es sich aber um Beispielsammlungen, und dabei überwiegen wieder Aufgaben mit »Verstärkereffekt«, das heißt traditionelle Aufgaben, die für einen computerunterstützten Unterricht aufbereitet wurden.

In der didaktischen Literatur findet man andererseits wieder eher Arbeiten, in denen auf einer Metaebene über didaktische Konzepte reflekiert wird und wo Beispiele aus der Unterrichtspraxis nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Wir haben das Abenteuer gewagt, diese beiden Bereiche miteinander zu verbinden. Und so ist ein didaktisches Lehrerbuch entstanden, in dem versucht wird, eine Synthese aus didaktischer Theorie und einem breiten Angebot an Beispielen aus der Unterrichtspraxis zu bilden. Damit soll einerseits die Theorie untermauert und andererseits dem Leser bzw. Benutzer eine direkte Umsetzung des hier Gelesenen im Unterricht ermöglichen.

Adressaten sind also all jene, die den Weg von Lernenden in die Mathematik begleiten, sei es in der Schule, an der Universität oder in der Erwachsenenbildung, sowie Vertreter der Fachdidaktik und nicht zuletzt Lehramtsstudenten. Bis sie in ihren Beruf eintreten, werden Computeralgebra-Systeme entweder in PC- oder in Taschenrechnerform schon zum Standardlernmedium gehören.

Um eine bessere Lesbarkeit zu erreichen, wird fast generell auf Formulierungen wie »Lehrerinnen und Lehrer«, »Schülerinnen und Schüler« etc verzichtet. Wir meinen die Bezeichnungen »Lehrer« bzw. »Schüler« jedoch nicht geschlechtsspezifisch, sondern vielmehr als Berufsbezeichnung. Jedesmal, wenn wir von »Lehrern« oder »Schülern« sprechen, schließen wir daher auch »Lehrerinnen« und »Schülerinnen« mit ein!

Stellvertretend für die vielen Menschen aus unserer Umgebung, die durch Anregungen und Diskussionen die Entstehung dieses Buches begleitet haben, danken wir besonders den Lehrern und Schüler, die am Projekt mitgearbeitet haben und durch ihre Arbeit und ihre Ideen zu den eigentlichen Impulsgebern dieses Buches wurden. Ganz speziell dafür bedanken möchten wir uns bei Herrn Prof. Buchberger - Gründer und Vorstand des RISC (Research Institute for Symbolic Computation, Schloß Hagenberg) und Erfinder der Methode der Gröbner Basen in der Computeralgebra - der auch das Vorwort zu diesem Buch geschrieben hat.

Helmut Heugl, Walter Klinger, Josef Lechner

Wien, 1. Mai 1996

1. Absichten und Konzept des Buchs

1.1. Die Entwicklung des Mathematikunterrichts

Eine der Triebfedern des zivilisatorischen Fortschritts war immer schon das Bestreben, Probleme des täglichen Lebens durch technische Hilfsmittel leichter bewältigen zu können. Beschäftigt man sich mit der Geschichte der Mathematik [vgl. dazu Kaiser/Nöbauer, 1984], so erkennt man, daß zwei Bereiche immer wieder besonders für den Fortschritt verantwortlich waren: einerseits die Rechenhilfsmittel, andererseits die Rechenverfahren und die Darstellungsweisen.

Man denke nur an die verschiedenen Formen von Rechenbrettern, die schon im Altertum weitverbreitet waren. Ein solcher Abakus ist aus dem vierten Jahrhundert v. Chr. aus Griechenland erhalten, die Chinesen legten Bambusstäbchen auf Rechenbretter. Einen weiteren Entwicklungsschub löste die Entdeckung der Logarithmen durch den Schweizer Bürgi und den Schotten Neper Ende des 16. und Anfang des 17. Jahrhunderts aus. Bis in die sechziger Jahre unseres Jahrhunderts war das Logarithmenbuch das Rechenhilfsmittel, das die Schulmathematik methodisch und inhaltlich prägte. Und schließlich war ja auch der Rechenstab nichts anderes als die mechanisierte Form des Rechnens mit Logarithmen. Zur Zeit Johannes Keplers wurden die ersten mechanischen Rechenmaschinen gebaut. Für die Entwicklung der Schulmathematik brachten dann erst die elektronischen Rechenmaschinen -die Taschenrechner - große Veränderungen.

Beispiele für den Einfluß von Darstellungsweisen wären: Die Übernahme der indischen Positionsarithmetik durch die Araber, die sich dann auch in Europa verbreitet hat, oder die Entwicklung der bis heute verwendeten algebraischen Symbolik vor allem durch Viéte und später durch Descartes. Bei der Verbreitung der Algorithmen für die vier Grundrechenarten spielte die mittelalterliche Zunft der Rechenmeister eine wichtige Rolle. Genannt wird meistens ihr bedeutendster Vertreter Adam Riese (um 1520).

Heute steht uns ein mathematisch-technisches Hilfsmittel zur Verfügung, das die oben angeführten Bereiche beeinflussen und verändern kann: *der Computer*, ein noch nie dagewesenes numerisches und algebraisches Rechenhilfsmittel und eine mathematische Maschine, die auch die schon seit dem Mittelalter tradierten Darstellungsweisen und Algorithmen verändern kann. Daß sich in der Schulmathematik parallel die Lehr- und Lernmethoden verändern werden, kann man ebenfalls aus der Geschichte lernen.

Da wir glauben, daß Evolution besser ist als Revolution, wollen wir unter der Devise 'zuerst besinnen auf das Gestern und dann denken an das Morgen' kurz die wichtigsten Entwicklungsphasen des Mathematikunterrichts der letzten fünfzig Jahre beleuchten:

Die fünfziger- und frühen sechziger Jahre waren gekennzeichnet durch eine Art '*Aufgabendidaktik*' oder volkstümlicher ausgedrückt eine 'Kochrezeptmathematik'. "Bitte erklär' mir nichts, sag mir nur wie's geht!" sagte die Tochter eines Mathematikers zu ihrem Vater. Der Kalkülaspekt stand eindeutig im Mittelpunkt. Sprüche, wie den eben zitierten, können Sie heute noch von Schülern hören.

Ende der sechziger Jahre begann der Einfluß der '*New-Math-Bewegung*' in der Schule wirksam zu werden. Angeblich unter dem Einfluß des 'Sputnikschocks' war es ein Versuch, der Krise des westlichen Bildungssystems zu begegnen, indem man den dem Wissenschaftsaspekt mehr Gewicht zu gab. Die Auswirkung für die Schulmathematik könnte man durch die Devise kennzeichnen: "Man betrachte die Universitätsmathematik durch ein Verkleinerungsglas und gehe damit in die Schule." Das Abstrakte, das Formale stand im Mittelpunkt. Eine typische Ausprägung dieser Richtung war die übertriebene Mengenlehre. Mit der größeren Abstraktheit der Gegenstände, mit denen man sich beschäftigt, wächst das Bedürfnis nach Genauigkeit des sprachlichen Ausdrucks. Daß dabei die Forderung nach Altersgemäßheit oft mißachtet wurde, sollen zwei Beispiele aus einem Lehrbuch der 5. Schulstufe zeigen:

Normalerweise wissen schon vierjährige Kinder, was ein Dreieck ist. Eine Krise kriegen Kinder wahrscheinlich, wenn sie im Schulbuch lesen: "Ein Dreieck ist die Durchschnittsmenge aus einem Winkelfeld und einem Parallelstreifen." Genauso furchterregend klingt die Definition der Division in diesem Lehrbuch für Zehnjährige: "Das Zerlegen einer (endlichen) Menge von vorgegebener Mächtigkeit in Teilmengen von gegebener gleicher Mächtigkeit führt auf eine Division."

In den *siebziger Jahren* ließ die Gegenbewegung nicht lange auf sich warten: Neben der fachlichen Dimension wurden der pädagogischen (einschließlich der gesellschaftswissenschaftlichen) Dimension, der psychologischen Dimension (Lern- und Entwicklungspsychologie, Soziologie) sowie der Beobachtung und Berücksichtigung der Schulpraxis mehr Raum gewidmet. Kennzeichen dieser Strömung der Schulmathematik waren einerseits die Betonung einer *anwendungsorientierten Mathematik* und andererseits gestützt auf Theorien von J.Piaget oder J.S.Bruner, die stärkere Beachtung des *genetischen Prinzips* bzw. des *Spiralprinzips*.

"Man kann sich für Zahlentheorie, algebraische Geometrie und Kategorien begeistern und doch einsehen, wie unendlich ärmer die Mathematik ohne die Anregungen wäre, die ihr von den Anwendungen zugeflossen sind. Die Mathematik hat als nützliche Tätigkeit angefangen, und sie ist heute nützlicher, als sie je gewesen ist. Man kann sagen: sie wäre nicht, wenn sie nicht nützlich wäre!" [Freudenthal, 1977, S. 24]

Anwendungsorientierte Mathematik bezeichnet bekanntlich kein festumrissenes Gebiet oder keine bestimmte Methode, es geht vielmehr um eine bestimmte 'Haltung' gegenüber der Mathematik [Reichel, 1996]. Charakteristische Kennzeichen sind:

◊ Die Schulung des Problemlösens.

◊ Außermathematische Anwendungen werden zum zentralen Thema gemacht.

◊ Stärkere Betonung der heuristischen Phase des Mathematiklernens.

◊ Entwicklung allgemeiner Qualifikationen des Anwendens, d.h. der Lernende soll ein Wissen ('Metawissen') über den Anwendungsprozeß selbst erwerben [Fischer, 1985].

Einige Merkmale der genetischen Methode [Wittmann, 1981, S. 131]:

◊ Anschluß an das Vorverständnis des Adressaten.

◊ Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus.

◊ Einbettung der Überlegungen in größere, ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik.

◊ Hinführen zu strengeren Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze.

◊ Allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung.

In den *achziger Jahren* begann jene Phase der Schulmathematik, um die es in diesem Buch geht: Der *computerunterstützte Mathematikunterricht*. Im ersten Abschnitt dieser Entwicklung hat der Computer - schließlich ist er ja auch ein Produkt mathematischen Denkens - die Mathematik veranlaßt, sich eine computergerechtere Form zu geben. Die verstärkte Beschäftigung mit numerischen Methoden ist ein deutliches Indiz dafür. Inzwischen ist es aber durch Cumputeralgebra-Systeme möglich geworden, weit mehr als nur numerische Verfahren computerunterstützt zu bearbeiten.

Wenn man die am Anfang dieses Kapitels formulierte These akzepiert, kann der Schluß gezogen werden, daß der Computer und Computeralgebra-Systeme einen 'Quantensprung' in der Entwicklung des Mathematikunterrichts bringen werden. Dies wird nicht nur durch die vielfältigen Möglichkeiten bewirkt, den Computer als *Rechenhilfsmittel* einzusetzen (der Computer als Tool), auch die Nutzung als *didaktisches Werkzeug* (der Computer als Tutor) trägt genauso zu einem völlig neuen Stil des Mathematikunterrichts bei. Neue und effektiver nutzbare Rechenverfahren und Darstellungsarten sind weitere Triebfedern für Veränderungen beim Lehren und Lernen von Mathematik. Daß ein solches Lernmedium auch die *Unterrichtsmethoden* verändert und erlaubt, den Unterricht schülerzentrierter zu gestalten, wird Gegenstand eines eigenen Kapitels (Kap. 5) sein.

Computeralgebra-Systeme verändern also nicht nur die Tätigkeiten, sondern auch die Objekte, mit denen die Tätigkeiten ausgeführt werden. Wir erwarten uns nicht nur einen 'Verstärkereffekt' - das heißt, daß wir dasselbe wie früher, nur eben schneller, öfter, genauer und sicherer machen - Computeralgebra-Systeme ermöglichen neue Tätigkeiten und verschieben den Schwerpunkt vom Ausführen hin zu z.B. Planen, Reflektieren, Analysieren.

1.2. Zum Aufbau den Buchs

Die drei großen Blöcke, aus denen dieses Buch besteht, spiegeln wieder, was wir vermitteln wollen: Die Einsatzmöglichkeit im Unterricht, das Lernen und das Lehren von Mathematik mit CAS.

Kapitel 2

Das Kapitel 2 mit dem Titel "*Was kann ein Computeralgebra-System?*" soll kein zweites Handbuch werden. Die Einteilung ist nicht an den Möglichkeiten eines Computeralgebra-Systems (CAS) orientiert, sondern an den Möglichkeiten und Notwendigkeiten des Unterrichts. In diesem Kapitel sollen vor allem die Beispiele aus der Schulpraxis für sich sprechen, die didaktischen Hinweise sind bewußt kurz gehalten.

Man kann drei Bereiche unterscheiden:

◊ *Das CAS als Rechenhilfsmittel*:

Zuerst wird das CAS als numerisches Hilfsmittel vorgestellt, mit Beispielen zum exakten und näherungsweisen Rechnen. Dabei wird auf den Unterschied und die neuen Möglichkeiten im Vergleich zum numerischen Taschenrechner hingewiesen. Es folgen Aufgaben, bei denen das CAS als symbolisches Hilfsmittel von der Algebra bis hin zur Analysis eingesetzt wird. Auch die Möglichkeit der Nutzung implementierter Algorithmen wird gezeigt.

◊ *Das CAS als didaktisches Werkzeug*:

Dieser Einsatzbereich spielt auch in jenen Klassen eine Rolle, in denen der Computer nur mehr oder weniger regelmäßig im Unterricht genutzt werden kann. In diesem Kapitel wird gezeigt, welche Bedeutung das CAS beim Begriffsbildungsprozeß oder beim Modellbilden spielen kann.

◊ *Das CAS als kognitives Werkzeug:*

Versteht man unter Kognition ein funktionales System, das Mensch und Werkzeug, aber auch den sonstigen materiellen und sozialen Kontext umfaßt, so können didaktisch gestaltete Softwaresysteme eine entscheidende Erweiterung und Entfaltung der Kognition der Schüler bewirken [Dörfler, 1991]. Es wird an Beispielen vorgeführt, wie der Schüler Algorithmen mit dem CAS entwickeln kann, und es wird gezeigt, daß sich durch das CAS ein neuer Lösbarkeitsbegriff entwickelt. Darüber hinaus wird das CAS als sprachliches Hilfsmittel vorgestellt. Dabei geht es um Hilfen beim Übersetzen von Umgangssprache in formale Sprache sowie um die Bereitstellung neuer Sprachelemente.

Kapitel 3

Hier wird das *Lernen von Mathematik* behandelt. Das didaktische Konzept ist stark von den Thesen Bruno Buchbergers beeinflußt. Er ist Vorstand des RISC-Institutes an der Universität Linz (Research Institute for Symbolic Computation). In verschiedenen Arbeiten und Vorträgen hat er auch zum Verhältnis Mathematik - Informatik sowie zu didaktischen Fragen des Mathematiklernens nicht nur an der Universität, sondern auch in der Schule Stellung genommen. Aus seiner Definition von Mathematik ergibt sich als wichtigster Bildungsauftrag dieses Fachs die *Schulung des Problemlösens*. Der Weg des Lernenden in die Mathematik wird als Spirale dargestellt, wir nennen sie die *Buchbergersche Kreativitätsspirale*. Man kann bei einem solchen Schleifendurchlauf drei Phasen unterscheiden: die heuristische Phase, die exaktifizierende Phase und die Anwendungsphase.

Bei unseren Untersuchungen hat sich gezeigt, daß durch die Verwendung des CAS vor allem die *heuristische Phase* des Mathematiklernens besonders gefördert, ja eigentlich erst entwikelt wird. Experimentieren und Testen werden unverzichtbare Arbeitsformen. In der exaktifizierenden Phase hilft das CAS dem Schüler, sich auf das eigentliche Problem zu konzentrieren, weil es ihm Rechenarbeit abnimmt, und in der Anwendungsphase erschließt das CAS neue Bereiche.

Einer Phase im Lernprozeß haben wir bei unseren Untersuchungen besonderes Augenmerk gewidmet: der Schnittstelle zwischen Operieren und Interpretieren. Das CAS nimmt dem Schüler viele Tätigkeiten beim Operieren ab. Wenn es aber dann gilt, die Ergebnisse des Operierens zu interpretieren - sowohl innermathematisch als auch von der Anwendungssituation aus - so muß der Lernende etwas interpretieren, was er nicht selber produziert hat. Wir wollen zeigen, daß das CAS hier auch ein wichtiges Medium zum Testen und Interpretieren ist.

Kapitel 4

In diesem Kapitel geht es, wie auch in Kapitel 5, um das *Lehren von Mathematik* mit Unterstützung von CAS. In der didaktischen Literatur wird zwischen Lehrzielen und Lernzielen unterschieden. Der Idealzustand ist dann gegeben, wenn Lehr- und Lernziele zur Deckung gebracht werden können und wenn die gesteckten Lernziele für den Schüler einsehbar und erreichbar sind. Ausgangspunkt für das Entwickeln von Unterrichtskonzepten muß also eine Beobachtung des Lernprozesses der Schüler sein, und zwar nicht nur vom inhaltlichen Standpunkt aus, sondern es müssen auch die lernpsychologische Komponente und die pädagogische Komponente bis hin zu Fragen der Motivation und der sozialen Struktur der Lerngruppe einbezogen werden. Dies bestätigt auch die Außenevaluation unseres Projekts, über die im Kapitel 6 kurz berichtet wird.

Zuerst werden einige *neue didaktische Prinzipien* als Konstruktionsanleitung für den Unterricht vorgestellt. Experten werden hier zumindest in Teilaspekten Ideen traditioneller didaktischer Prinzipien entdecken, wie zum Beispiel das genetische Prinzip oder das Spiralprinzip. Man kann in unseren didaktischen Konzepten auch all jene charakteristischen Kennzeichen eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts finden, die seit der didaktischen Reform der siebziger Jahre propagiert werden, aber in der Unterrichtspraxis noch immer nicht ausreichend umgesetzt worden sind. Unsere Untersuchungsergebnisse bestärken uns in der Annahme, daß eine Realisierung mit dem neuen Lernmedium Computer wesentlich effizienter möglich ist.

Die in diesem Buch vorgestellten didaktischen Prinzipien, wie das *White Box/Black Box-Prinzip* oder das *Black Box/White Box-Prinzip*, berücksichtigen zwar die Möglichkeit, das CAS als Black Box zu nutzen, allerdings erst dann, wenn die Inhalte dieser Lernbox für den Lernenden 'white' gemacht wurden. Diese 'Zweiphasenmodelle' des Mathematiklernens sollen einerseits Konzepten entgegengestellt werden, bei denen der Schüler nur mehr Rezepte unter Nutzung des CAS als Black Box ausführt, ohne den Inhalt zu kennen oder gar zu verstehen. Andererseits bieten sie die Chance durch Übertragen von Tätigkeiten auf das CAS, die in früheren White Boxes gelernt wurden, die jetzt dominierenden Kalkülfertigkeiten zurückzunehmen und Freiraum für das Modellieren, Begründen und Interpretieren zu schaffen.

Ein typisches CAS-Prinzip ist das *Modulprinzip*, auch wenn die Anleitung zu modularem Denken bei komplexeren Aufgaben unabhängig von der Computernutzung zu empfehlen ist. Aber erst das Lernmedium CAS ermöglicht die Anfertigung von Modulen durch den Schüler oder durch den Lehrer, die dann in der Anwendungssituation abrufbar sind. Die Chance, mehrere 'Erscheinungsformen' eines mathematischen Objektes gleichzeitig zur Verfügung zu haben und zwischen ihnen hin- und herzupendeln, wird von uns als *Window-Shuttle-Technik* bezeichnet.

Kapitel 5

Hier wird über Projektergebnisse, die die Veränderung des Unterrichts betreffen, berichtet. Wie schon einmal erwähnt, ist die signifikanteste Veränderung beim Methodeneinsatz die Verschiebung zu einem mehr schülerzentrierten, experimentellen Unterricht. Damit verändert sich natürlich auch *die Rolle des Lehrers*. Er muß mit einer zweiten Autorität im Unterrichtsprozeß fertig werden, dem CAS. Der algorithmische Gehorsam, der bisher bei starker Lehrerführung zu beobachten war, ist nicht mehr vorhanden. Selbst in der Prüfungssituation sieht man bei zwanzig Schülern bis zu zehn verschiedene Lösungswege. Das erfordert vom Lehrer hohe fachliche Kompetenz und Flexibilität. In diesem Kapitel werden auch Anleitungen zum Anfertigen und Gebrauch von Arbeitsunterlagen, wie etwa Arbeitsblättern oder Schülerfiles gegeben. Es wird auf die veränderte Bedeutung des Übens hingewiesen. Üben wird nicht überflüssig, es kommt nur zu anderen Übungsschwerpunkten.

Neue Lernformen und neue didaktische Konzepte verlangen auch andere Überprüfungsformen. Wenn man die charakteristischen Kennzeichen der didaktischen Reform der siebziger Jahre ernst nimmt, dürfte die typische Schularbeit bzw. Klassenarbeit schon jetzt nicht mehr jenes Übergewicht bei der Notenfindung haben, oder aber es müßte sich die Art der Aufgaben verändern. Meist wird in solchen Arbeiten primär Rechenfertigkeit überprüft. Durch das CAS wird eine solche Veränderung nicht nur möglich, sondern auch notwendig, da das Operieren meist dem CAS überlassen wird. An Beispielen aus der Unterrichtspraxis wird gezeigt, wie sich die Art der Aufgaben und auch die Arbeitsweise der Schüler in der Prüfungssituation ändert.

Kapitel 6

Dieses Kapitel bietet einen Bericht über das österreichische Projekt, über die Ziele, die Organisationsformen und erste Ergebnisse [Heugl, 1995]. Wir haben dieses Projekt immer als 'Weitwinkelprojekt' bezeichnet. Wir wollten die CAS-Nutzung bei möglichst vielen Inhalten von der siebenten bis zur zwölften Schulstufe untersuchen, mit verschiedensten Hardwareausstattungen, verschiedenen Klassengrößen und verschiedenen Lehrerpersönlichkeiten. Man könnte natürlich einwenden, daß am Projekt nur freiwillige, intrinsisch motivierte Lehrer beteiligt waren und daher die Gefahr bestünde, die Ergebnisse zu rosig zu sehen. Wir haben daher eine einfache Formel entwickelt: Wenn ein Konzept mit diesen Versuchsgruppen nicht realisierbar war, ist es mit großer Wahrscheinlichkeit zu verwerfen, wenn es erfolgreich war, darf noch nicht der Schluß gezogen werden, daß damit eine Erfolgsgarantie im 'Normalunterricht' gegeben ist. Aber es lohnt sich, solche Unterrichtskonzepte den Lehrern verbunden mit Unterrichtsmaterialien anzubieten. Dazu ist eine begleitende Untersuchung auch in der Zukunft notwendig.

Wir haben natürlich nicht nur Antworten, sondern auch viele Fragen produziert. In zukünftigen Projekten, wir nennen sie 'Teleobjektivprojekte' wollen wir einige solcher Fragen herausgreifen und genauer untersuchen. Im Bereich der Hardware lautet unser Ergebnis: Ideal wäre ein computeralgebratauglicher Taschenrechner, den der Schüler in jeder Arbeitssituation zur Vergfügung hat, verbunden mit der Nutzung von CAS wie etwa DERIVE am PC im EDV-Raum, wenn der Computer als didaktisches Werkzeug eingesetzt wird, und vor allem, wenn der große Farbschirm eine didaktische Notwendigkeit ist. Wichtig wäre dann auch, daß der Algebrarechner des Schülers und das CAS am PC kompatibel sind. Der jetzt auf den Markt gekommene TI-92 ist ein erster Schritt in diese Richtung. Auch bezüglich des didaktischen Konzepts solcher Algebrarechner wird es ein 'Teleobjektivprojekt' geben. In Österreich gibt es bereits Versuchsklassen, die mit dem TI-92 ausgestattet sind [Kutzler, 1996].

1.3. Wie das Buch zu lesen ist

Da wir ein didaktisches Lehrerbuch schreiben wollen, d.h. eine Synthese aus didaktischer Theorie und Aufgaben aus der Unterrichtspraxis anstreben, ist es notwendig drei Ebenen zu vernetzen:

◊ die Lehrer-Schüler-Ebene

◊ die didaktische Ebene

◊ die softwarspezifische Ebene

Auch der Lehrer ist ständig mit diesen drei Ebenen in der Unterrichtspraxis konfrontiert. Gerade dort, wo die Beispiele aus der Unterrichtspraxis auch zur Untermauerung der Theorie dienen und wo noch dazu das DERIVE-Handling dem Leser kurz erläutert werden soll, ist eine scharfe Trennung dieser Ebenen nicht möglich.

Die Beispiele sind derart geschrieben, daß beim Lesen die dargestellten Bearbeitungen gleichzeitig am Computer nachvollzogen werden können. Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß dieses Buch nicht als Ersatz für das Handbuch oder für programmtechnische Literatur gedacht ist. Wichtige, für das Verständnis der Aufgaben erforderliche Derive Befehle und Funktion werden am Ende des Kapitels 2 zusammengefaßt und kurz erklärt..

Die Enstehungsgeschichte der einzelnen Zeilen eines Arbeitsblattes wird dadurch dokmentiert, daß in jeder Zeile entweder rechts oder über der Nummer (z. B. #39) die dazugehörige Annotationen angegeben ist, z. B.:

```
#38: √2                                                 User
#39: 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769       Approx(#38)
```

Hier liefert der Approx-Befehl eine numerische Näherung für die Wurzel aus 2 in der eingestellten Genauigkeit (#39).

Da die meisten Beispiele mit DERIVE bearbeitet sind, wurden die programmspezifischen Informationen mit eigenen Hervorhebungen belegt. Unterschiedlich dargestellt sind drei verschiedene Bereiche:

- ◊ Optionen die direkt im Hauptmenü angewählt werden können (z. B. **calculus**)
- ◊ Einstellungen, die durchgeführt werden können (z. B. `Approximate`) und
- ◊ die Namen der Funktionen, die entweder im Programm implementiert sind oder neu erzeugt wurden (z. B. VECTOR).

Der besseren Lesbarkeit halber werden die häufig auftretenden Begriffe Computeralgebra-System bzw. Computeralgebra durch die Abkürzungen CAS und CA ersetzt.

2. Was kann ein Computeralgebra-System?

Es ist erstaunlich, mit welchen Problemen ein CAS zurechtkommen und in welch kurzer Zeit es korrekte Ergebnisse liefern. Wenn auch die einzelnen Systeme in ihrer Funktionalität und die der Art ihrer Benutzung oft beträchtliche Unterschiede aufweisen, so sind sie doch von ihrem Leistungsumfang, wenn man nur die schulrelevanten Komponenten betrachtet, durchaus vergleichbar. Hier entscheidet oft die leichtere Verfügbarkeit und Berücksichtigung didaktischer Erfordernisse. DERIVE zählt zu den didaktisch ausgereiftesten Systemen, die derzeit erhältlich sind. Es hat gegenüber anderen Mathematikprogrammen zudem den Vorteil, daß es verhältnismäßig leicht zu benutzen ist und nur geringste Hardwareanforderungen stellt. Durch die Implementierung solcher Systeme auf Taschenrechnerbasis - die mit dem Erscheinen eines CA-Taschenrechners bereits konkrete Gestalt angenommen hat - ist auch eine Zukunftsvision des letzten Jahrzehnts dabei, Realität zu werden: Der Taschenrechner hat das traditionelle Rechnen vollkommen verändert, Rechenschieber sind in der Folge genauso aus unserem Blickfeld verschwunden wie endlose Tabellen für elementare mathematische Funktionen. Mit der Verfügbarkeit von CAS ist es durchaus möglich, daß dessen Verwendung im Mathematikunterricht, an Hochschulen und in der Anwendung der Mathematik und der Naturwissenschaften bald ebenso selbstverständlich wird, wie dies heute der Taschenrechner ist.

Es ist schwer, die ungeheure Palette möglicher Einsatzformen eines CAS auf einigen Seiten darstellen zu wollen. Je mehr man sich damit beschäftigt, desto vermessener erscheint ein solches Vorhaben. Es sollen deshalb hier nur einige wenige - insbesondere aus didaktischer Sichtweise - ausgewählte Bereiche betrachtet werden, für die der Einsatz von CAS im Rahmen des Mathematikunterrichts von Relevanz ist. Es mag erstaunen, daß hier CAS als grafisches Hilfsmittel nicht eigens angeführt wird. Im CAS steht Grafik und damit die Möglichkeit der Visualisierung permanent und unmittelbar zur Verfügung, so daß sie in gleicher Weise zur Darstellung der Lösungen einer Differentialgleichung wie als Voraussetzung von CA als methodisches Hilfsmittel dient. Die besondere Rolle dieser durchgehenden grafischen Unterstützung soll im Rahmen der Window-Shuttle-Technik (Kap.4.4) eingegangen werden.

2.1. Numerisches Hilfsmittel

Stellt man sich die Frage, inwiefern CAS in numerischer Hinsicht über die Möglichkeiten eines Taschenrechners hinausgehen, so treten hier - was den Mathematikunterricht betrifft -vor allem drei Aspekte ins Blickfeld: CAS erlauben es erstens, *Rechnungen* mit Symbolen auszuführen. Sind wir an numerischen Approximationen interessiert, so können wir zweitens im Unterschied zum Taschenrechner selbst die *Genauigkeit* steuern. Drittens lassen sich beinahe alle *Umformungen*, die wir mit Zahlen auszuführen gewohnt sind, auch mühelos in der Umgebung des CAS durchführen. Was ist der Preis, um den wir diese 'erweiterten Kalkülfertigkeiten' erkaufen? Wir müssen darauf achten, daß auf der einen Seite notwendige und wesentliche 'Handkalkülfertigkeiten' nicht verlorengehen - wie vielfach befürchtet wird -, daß auf der anderen Seite aber entsprechende 'Strategiekalkülfertigkeiten', die für einen sinnvollen Einsatz von CAS erforderlich sind, aufgebaut werden.

2.1.1. Exaktes Rechnen

CAS sind imstande, Brüche und Wurzeln als Brüche und Wurzeln zu behandeln und diese so zu verknüpfen, wie wir dies in der Mathematik zu tun gewohnt sind .

```
#1:  Precision := Exact                              User

#2:  Notation := Rational                            User
```

Zu #1 und #2 findet sich am Ende dieses Kapitels die programmtechnische Anmerkung 1.

#3: $$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{(2 - \sqrt{3})}}{2 - \sqrt{3}} = 3$$ User=Simp(User)

#4: $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{2}$$ User=Simp(User)

#5: $$(\sqrt{5}+2)^{1/3} - (\sqrt{5}-2)^{1/3} = 1$$ User=Simp(User)

Erst wenn wir eine Näherung haben wollen, liefert das System eine solche entweder mit der Menü-Option **approX** oder mit der Einstellung **Option Precision** *Approximate*:

```
#6:  Precision := Approximate                                User

User=Simp(User)
```

#7: $$\frac{(2+\sqrt{3})}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}} \cdot \frac{(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}} = 0.333333$$

2.1.2. Rechnen mit großer Genauigkeit

Da wir die Möglichkeit haben, zwischen exaktem und näherungsweisem Rechnen hin und her zu pendeln, sind wir nun auch in der Lage, Grenzen des Taschenrechners zu simulieren und verstehend zu überschreiten.

Im Wesen irrationaler Zahlen liegt es, daß wir sie nur mit Symbolen darstellen können, die numerische Annäherung ist zwar beliebig genau möglich, bleibt aber stets eine vorläufige. Mit einem Taschenrechner ist etwa $\sqrt{2}$ nur als Näherung darstellbar, durch Quadrieren können wir damit niemals wieder 2 erhalten. Viele - neuere - Taschenrechner liefern nach Betätigung der Wurzeltaste und Quadrattaste allerdings wieder den exakten Wert. Dies liegt an den "Schutzstellen", d.h. an zusätzlichen Stellen, die bei der Berechnung mitgeführt werden. Beim Quadrieren kommt dann durch entsprechendes Runden der gewünschte ursprüngliche Wert zustande.

Im Folgenden betrachten wir ein Näherungsverfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$.

Beispiel 2.1: Heron-Verfahren

Berechne die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt 2 cm^2 beträgt!

Ein Zugang zur Lösung dieses Problems stammt von Heron (um 100 n. Chr.): Obwohl die Seitenlänge eines Quadrats gesucht wird, betrachten wir eine Folge von Rechtecken, die alle denselben Flächeninhalt (A = 2 cm^2) haben und sich dem gesuchten Quadrat annähern. Es wird eine beliebige Länge des Rechtecks angenommen (z.B.: l = 2 cm). Nun läßt sich die Breite aus der Flächeninhaltsformel berechnen (b = 1 cm). Um aus diesen Angaben ein Rechteck zu erhalten, welches dem Quadrat angenähert ist, bildet man aus den beiden vorhergehenden Seitenlängen das arithmetische Mittel und erhält damit eine neue Seitenlänge. Man berechnet wieder die dazugehörige andere Seite unter der Bedingung, daß der Flächeninhalt gleich bleiben soll. Das Quadrieren dieser Mittelwerte ergibt jeweils einen zu großen Flächeninhalt, die Folge dieser Mittelwerte nähert sich der gesuchten Seitenlänge des Quadrats mit gesuchtem Flächeninhalt!

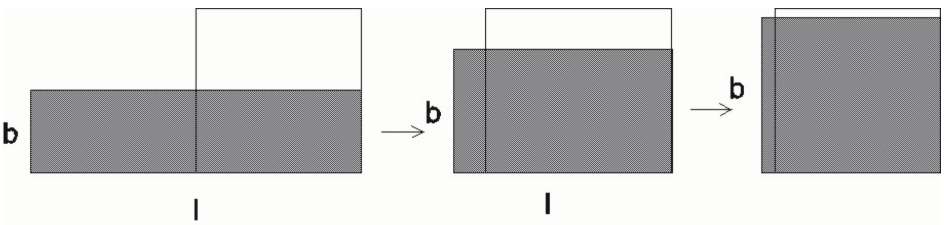


Abb. 2.1: Aus Rechtecken wird ein Quadrat

Man benötigt folgende Beziehungen, wobei *l* und *b* die Seitenlängen des Rechtecks sind. Die Variable *s* bezeichnet die Länge des neuen Rechtecks oder die Näherung zur gesuchten Seitenlänge des Quadrats.

$$l \cdot b = 2 \;\Rightarrow\; b = \frac{2}{l}$$

$$l + b = 2 \cdot s \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2} \cdot (l + b) \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2} \cdot (l + \frac{2}{l})$$

Aus der zuerst intuitiv gewählten Länge *l* (SEITEALT) entsteht ein neues s (SEITENEU), und dieses wird wieder zur Länge eines neuen Rechtecks (SEITEALT) wodurch eine geeignetere Rechtecksseitenlänge *s* (SEITENEU) entsteht. Also allgemein mit Wortvariablen:

$$\text{SEITENEU} = \frac{1}{2} \cdot (\text{SEITEALT} + \frac{\text{FLAECHE}}{\text{SEITEALT}})$$

Diese Vorgehensweise zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ läßt sich mit einem numerischen Taschenrechner durch die begrenzte Anzahl der sichtbaren Stellen nicht geeignet generieren.

Wir verwenden die Einstellungen **Option Input** *Word, Sensitive* und rechnen im *Exact*-Modus mit 20 Stellen (*Digits*). Dieser Modus ermöglicht die Darstellung der Näherungswerte als Brüche.

```
#1:  InputMode := Word                                   User
#2:  CASeMode := Sensitive                               User
#3:  Precision := Exact                                  User
#4:  PrecisionDigits := 20                               User
```

Die allgemeine Beziehung wird im **Author** eingegeben:

#5: $\text{SEITENEU} = \frac{1}{2} \cdot \left[\text{SEITEALT} + \frac{\text{FLÄCHE}}{\text{SEITEALT}}\right]$ User

Mit **Manage Substitute** wird die Fläche mit 2 festgelegt:

#6: $\text{SEITENEU} = \frac{1}{2} \cdot \left[\text{SEITEALT} + \frac{2}{\text{SEITEALT}}\right]$ Sub(#5)

Wir substituieren für SEITEALT den frei gewählten Anfangswert 2

#7: $\text{SEITENEU} = \frac{1}{2} \cdot \left[2 + \frac{2}{2}\right]$ Sub(#6)

und berechnen mit **Simplify** und **approX** die neue Seitenlänge. Dadurch erhalten wir die erste Näherung als Bruch und als Dezimalzahl.

#8: $\text{SEITENEU} = \frac{3}{2}$ Simp(#7)

#9: $\text{SEITENEU} = 1.5$ Approx(#8)

Es wird nun so getan, als wäre dies die Seite eines Quadrats, und wir testen den Flächeninhalt.

$$\#10: \left[SEITENEU = \frac{3}{2}\right]^2 \qquad \text{User}$$

$$\#11: SEITENEU^2 = 2.25 \qquad \text{Approx(\#10)}$$

Es zeigt sich, daß diese neue Seite, interpretiert als Quadratseite, einen zu großen Flächeninhalt liefert.

Die neue Seite wird wieder in die allgemeine Formel #6 eingesetzt, und durch Mittelwertberechnung wird die nächste Näherung generiert.

$$\#12: SEITENEU = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right] \qquad \text{Sub(\#6)}$$

$$\#13: SEITENEU = \frac{17}{12} \qquad \text{Simp(\#12)}$$

$$\#14: SEITENEU = 1.4166666666666666666 \qquad \text{Approx(\#13)}$$

$$\#15: \left[SEITENEU = \frac{17}{12}\right]^2 \qquad \text{User}$$

Der Test des neuen Flächeninhalts zeigt bereits eine akzeptablere Näherung.

$$\#16: SEITENEU^2 = 2.0069444444444444444 \qquad \text{Approx(\#15)}$$

Wird diese Vorgehensweise mehrmals angewendet, ergibt sich, daß die neue Seite sich immer besser eignet. Der Flächeninhalt des neuen Quadrats liegt immer näher bei 2 cm^2.

$$\#17: SEITENEU = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right] \qquad \text{Sub(\#6)}$$

$$\#18: SEITENEU = \frac{577}{408} \qquad \text{Simp(\#17)}$$

$$\#19: SEITENEU = 1.4142156862745098039 \qquad \text{Approx(\#18)}$$

$$\#20: \left[SEITENEU = \frac{577}{408}\right]^2 \qquad \text{User}$$

$$\#21: SEITENEU^2 = 2.0000060073048827374 \qquad \text{Approx(\#20)}$$

$$\#22: SEITENEU = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}\right] \qquad \text{Sub(\#6)}$$

$$\#23: SEITENEU = \frac{665857}{470832} \qquad \text{Simp(\#22)}$$

$$\#24: SEITENEU = 1.4142135623746899106 \qquad \text{Approx(\#23)}$$

$$\#25: \left[SEITENEU = \frac{665857}{470832}\right]^2 \qquad \text{User}$$

$$\#26: SEITENEU^2 = 2.0000000000045109504 \qquad \text{Approx(\#25)}$$

$$\#27: SEITENEU = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{665857}{470832} + \frac{2}{\frac{665857}{470832}}\right] \qquad \text{Sub(\#6)}$$

$$\#28: SEITENEU = \frac{886731088897}{627013566048} \qquad \text{Simp(\#27)}$$

$$\#29: SEITENEU = 1.4142135623730950488 \qquad \text{Approx(\#28)}$$

$$\#30: \left[SEITENEU = \frac{886731088897}{627013566048}\right]^2 \qquad \text{User}$$

$$\#31: SEITENEU^2 = 2 \qquad \text{Approx(\#30)}$$

Haben wir es geschafft?

Die meisten Schüler lehnen sich erfahrungsgemäß zurück und behaupten, sie wüßten wie groß $\sqrt{2}$ sei! Das würde bedeuten, daß $\sqrt{2}$ ein Bruch wäre, der zwar eine große Zahl im Zähler und Nenner hätte, aber ein Element der Menge der rationalen Zahlen wäre. Hier stehenzubleiben würde einen völlig falschen Eindruck entstehen lassen. Mit einem CAS lassen sich jedoch Rundungsprobleme und Näherungsverfahren erlebbar machen, indem die Anzahl der Stellen erhöht wird.

```
#32: PrecisionDigits := 50                                User
```

$$\#33: SEITENEU = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{665857}{470832} + \frac{2}{\frac{665857}{470832}}\right] \qquad \text{Sub(\#6)}$$

In #33 wurde zur Berechnung von SEITENEU nochmals der Wert von #23 verwendet. Es entsteht im *Exact*-Modus derselbe Bruch wie in #31,

$$\#34: SEITENEU = \frac{886731088897}{627013566048} \qquad \text{Simp(\#33)}$$

mit **approX** jedoch eine Nährungszahl mit 49 Dezimalstellen

```
Approx(#34)
#35: SEITENEU =
          1.4142135623730950488016896235025302436149819257761
```

$$\#36: \left[SEITENEU = \frac{886731088897}{627013566048}\right]^2 \qquad \text{User}$$

und ein Flächeninhalt, der schon sehr nahe bei 2 cm² liegt, jedoch dieses Maß noch nicht erreicht hat (#37).

Approx(#36)

$$\#37:\ \mathrm{SEITENEU}^2 = 2.000000000000000000000002543584239585437205842792 7$$

Diese Vorgangsweise läßt sich beliebig oft wiederholen. Es ergeben sich immer genauere neue Quadratseitenlängen. Die Berechnung des Flächeninhalts zeigt, daß jede neue Seite nur eine noch bessere Näherung ist.

Der Vergleich mit der Approximation von $\sqrt{2}$ 1 (#39) zeigt, daß bereits 23 Dezimalstellen übereinstimmen!

#38: $\sqrt{2}$ User

Approx(#38)
#39: 1.414213562373095048801688724209698078569671875376 9

Wir erhalten als Näherungen immer Brüche, aber $\sqrt{2}$ dürfte keine Bruch sein. Was dann? Eine neue, bisher noch nicht bekannte Zahl? Eine nicht periodische unendliche Dezimalzahl?

Ein solcher Schritt kann in dieser experimentellen Phase nicht vollzogen werden. Jedoch kann dadurch der Schüler folgende Idee mitnehmen: "Der Schritt zur irrationalen Zahl besteht darin, daß man die Möglichkeit, sich dieser Zahl zu nähern, zur Zahl erklärt."

Diese Vorgangsweise kann im Schüler in einem frühen Stadium des Lernprozesses die Grundidee eines iterativen Lösungsmodells entstehen lassen und die Begriffsbildung fördern. Das CAS stellt für Iterationen die Funktionen ITERATES und ITERATE zur Verfügung (Siehe programmtechnische Anmerkung 2, am Ende dieses Kapitels). Im Unterricht sollten jedoch vor der Anwendung dieser Funktion viele Einsetzdurchgänge durchgeführt werden, damit ein Schüler mit dieser zyklischen Maschine vertraut wird.

Die Funktion ITERATES wird mit Startwert 2 und 6 Iterationsschritten eingegeben, als 'Laufvariable' ersetzen wir SEITEALT durch *a*.

$$\#40:\ \mathrm{ITERATES}\left[\frac{1}{2}\cdot\left[a + \frac{2}{a}\right],\ a,\ 2,\ 6\right] \qquad \text{User}$$

Die Vereinfachung liefert den Startwert und sechs Näherungen. Wir erhalten dieselben Brüche wie beim Substitutionsweg.

Simp(#40)

$$\#41:\ \left[2,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \frac{665857}{470832},\ \frac{886731088897}{627013566048},\ \frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}\right]$$

Die Brüche werden näherungsweise in #42 mit 49 Dezimalstellen dargestellt. Man sollte jedoch bei der Anwendung dieser Funktion die Einstellung *Approximate* vornehmen.

```
Approx(#41)

#42: [2, 1.5,
        1.41666666666666666666666666666666666666666666666666,
        1.4142156862745098039215686274509803921568627450980,
        1.4142135623746899106262955788901349101165596221157,
        1.4142135623730950488017192736932823969631777892360,
        1.4142135623730950488017192736932823969631777892360]
```

Wird keine Anzahl von Iterationsschritten angegeben, so wird das Verfahren solange angewendet, bis erstmalig der neue Wert gleich dem alten Wert ist, sonst entsteht eine Endlosschleife. Damit läßt sich auch zeigen, daß es sehr wohl Flächen gibt, bei denen sich, bei geeintetem Startwert, die Seitenlänge nicht mehr ändert.

Ist etwa $\sqrt{4}$ 2 eine irrationale Zahl?

#43: PrecisionDigits := 20 User

#44: $\text{ITERATES}\left[\frac{1}{2}\cdot\left[a+\frac{4}{a}\right],\ a,\ 2,\ 6\right]$ User

#45: [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] Simp(#44)

Die Auswertung von #44 ohne Angabe der Iterationsschritte

#46: $\text{ITERATES}\left[\frac{1}{2}\cdot\left[a+\frac{4}{a}\right],\ a,\ 2\right]$ User

liefert

#47: [2,2] Simp(#46)

Im Unterricht erscheint es sinnvoll, Iterationsschritte anzugeben, da bei auftretenden Endlosschleifen der Schüler vor der Frage steht, ob er die Iteration mit **Esc** abgebrechen soll oder ob eine weitere Wartezeit noch eine Lösung liefern könnte.

2.1.3. Arithmetische Grundtätigkeiten

CAS beherrschen alle arithmetischen Grundtätigkeiten, die wir vom Taschenrechner kennen, wobei vor allem mit der Faktorisierung eine neue Dimension hinzukommt. An einigen - willkürlich herausgegriffenen - Beispielen sei dies aufgezeigt:

User=Simp(User)

#1: $\frac{10^{317}-1}{9}=$

```
1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111
```

Diese Repunit-Zahl (= eine Zahl, die aus lauter Einsen besteht) zeigt nicht nur die Fähigkeit von CAS, sehr lange Zahlen manipulieren zu können, sondern ist auch ein Beispiel für eine eigenwillige Primzahl. (Zur PRIME-Funktion siehe Anmerkung 3, Ende dieses Kapitels.)

$$\#2:\quad \text{PRIME}\left[\frac{10^{317} - 1}{9}\right] = \text{true} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Eine andere Zahl, von der lange Zeit angenommen wurde, daß sie eine Primzahl wäre, ist die Zahl $2^{67} - 1$. Zuerst hat dies bekanntlich Mersenne vermutet, später hat Lucas gezeigt, daß dem nicht so sein kann, und erst 1903 hat Cole nach der Investition von drei Jahren Sonntagsarbeit ("three years of sundays") die beiden Primfaktoren angegeben.

$$\#3:\quad 2^{67} - 1 = 147573952589676412927 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#4:\quad \text{PRIME}(2^{67} - 1) = \text{false} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#5:\quad \text{FACTOR}(2^{67} - 1) = 193707721\cdot761838257287 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

CAS rechnen auch mit komplexen, transzendenten und irrationalen Zahlen meist problemlos:

$$\#4:\quad \hat{e}^{\hat{\imath}\cdot\pi} = -1 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#5:\quad \hat{e}^{2\cdot\hat{\imath}\cdot\pi} = 1 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Nun noch ein Beispiel zum Rechnen mit komplexen Zahlen.

Beispiel 2.2: Wechselstromwiderstände

Ermittle den Betrag des Wechselstromwiderstands und den auftretenden Phasenwinkel einer Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands von R = 75 Ω und einer Spule mit einer Induktivität von L = 0,5 H. Die Parallelschaltung sei an das Lichtnetz angeschlossen.

Für die Parallelschaltung von Widerständen gilt bekanntlich: $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Da bei induktiven Widerständen (Spule) die Stromstärke der Spannung nacheilt, beträgt (bei sehr kleinem ohmschen Widerstand der Spule) die Phasenverschiebung ungefähr $+90^0$ und wir können für den Widerstand einer Spule $R_L = i\ \omega\ L$ ansetzen. Damit lassen sich die gewünschten Werte leicht ermitteln. Der Wechselstromwiderstand (Impedanz) wird hier - wie bei den Elektrotechnikern üblich - mit *Z* bezeichnet.

```
#1:  [CASeMode := Sensitive, Angle := Degree]          User

#2:  RL := •·L·î                                       User
```

$$\#3:\quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{RL} \qquad \text{User}$$

Nachdem wir nun die Informationen, die uns die Physik für unsere Aufgaben bereitstellt, angeschrieben haben, können wir nach *Z* auflösen und anschließend die konkreten Daten der gegebenen Schaltung einsetzen.

$$\#4: \quad Z = \frac{L^2 \cdot R \cdot \bullet^2}{L^2 \cdot \bullet^2 + R^2} + \frac{\hat{\imath} \cdot L \cdot R^2 \cdot \bullet}{L^2 \cdot \bullet^2 + R^2} \qquad \text{Solve(\#3)}$$

$$\#5: \quad Z = \frac{0.5^2 \cdot 75 \cdot 220^2}{0.5^2 \cdot 220^2 + 75^2} + \frac{\hat{\imath} \cdot 0.5 \cdot 75^2 \cdot 220}{0.5^2 \cdot 220^2 + 75^2} \qquad \text{Sub(\#4)}$$

$$\#6: \quad Z = 51.1988 + 34.9083 \cdot \hat{\imath} \qquad \text{Approx(\#5')}$$

Zur weiteren Auswertung ist es von Vorteil, die Größe *Z* mit der erhaltenen komplexen Zahl zu belegen. Dazu definieren wir:

$$\#7: \quad Z := 51.1988 + 34.9083 \cdot \hat{\imath} \qquad \text{User}$$

$$\#8: \quad |Z| \qquad \text{User}$$

$$\#9: \quad 61.9669 \qquad \text{Approx(\#8)}$$

Die Eingabe des Betragzeichens und die Funktion PHASE wird in Anmerkung 4 am Ende dieses Kapitels erklärt.

$$\#10: \quad \text{PHASE(Z)} \qquad \text{User}$$

$$\#11: \quad 34.2868 \qquad \text{Approx(\#10)}$$

Mit #9 und #11 können wir nun den Widerstand der Parallschaltung mit etwa 62Ω und Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung mit ca. 34^0 angeben.

Die komplexe Arithmetik, die mit dem Symbol i rechnet, führt uns zu jenem Bereich, um den es beim Einsatz von CAS in erster Linie geht: das symbolische Rechnen.

2.2. Symbolisches Hilfsmittel

Der große Fortschritt eines CAS zeigt sich darin, daß auch mit Symbolen algebraische Umformungen möglich werden. Dies ist Grundvoraussetzung für das allgemeine Lösen von Gleichungen, das Bestimmen von Ableitungen und unbestimmten Integralen oder das Lösen von Differentialgleichungen.

2.2.1. Lösen von Gleichungssystemen

Sehr häufig treten in der Schulmathematik bei Modellierungsvorgängen Bedingungen an Punkte einer Funktion auf. Die dabei entstehenden Gleichungssysteme sind zwar im Prinzip von den Schülern lösbar, der tatsächliche Zeitaufwand und die einhergehende Fehlerhäufigkeit lassen jedoch aufwendigere Gleichungssysteme nicht zu. Wenn die Betrachtung der Funktion im Mittelpunkt steht, kann das Gleichungssystem vom CAS gelöst werden.

Beispiel 2.3: Polynomfunktion - Umkehrung der Kurvendiskussion

Von einer Polynomfunktion sechsten Grades kennt man alle rellen Nullstellen, $N_1 = (-2{,}0)$, $N_2 = (-1.5{,}0)$, $N_3 = (-0.8{,}0)$, $N_4 = (1.5{,}0)$, $N_5 = (2.5{,}0)$ und zwei weitere Punkte des Schaubildes $P = (0, 45/2)$ und $Q = (1, 243/16)$!

Berechne die Funktionsgleichung!

Voreinstellungen:

#1: InputMode := Word   User

#2: CASeMode := Sensitive   User

Wir definieren eine allgemeine Funktion *F* als Polynom sechsten Grades mit unbekannten Koeffizienten.

#3: $F(x) := a\cdot x^6 + b\cdot x^5 + c\cdot x^4 + d\cdot x^3 + e\cdot x^2 + f\cdot x + g$ User

Wir benötigen zur Bestimmung der Koeffizienten *a* bis *g* sieben Gleichungen mit sieben Unbekannten.

Die Angaben der Punkte werden in Gleichungen übersetzt, wir erhalten sieben Gleichungen:

#4: $F(-2) = 0$ User

#5: $F(-1.5) = 0$ User

#6: $F(-0.8) = 0$ User

#7: $F(1.5) = 0$ User

#8: $F(2.5) = 0$ User

#9: $F(1) = \frac{243}{16}$ User

#10: $F(0) = \frac{45}{2}$ User

Durch Vereinfachung erhalten wir:

#11: $64\cdot a - 32\cdot b + 16\cdot c - 8\cdot d + 4\cdot e - 2\cdot f + g = 0$ Simp(#4)

#12: $\frac{729\cdot a}{64} - \frac{243\cdot b}{32} + \frac{81\cdot c}{16} - \frac{27\cdot d}{8} + \frac{9\cdot e}{4} - \frac{3\cdot f}{2} + g = 0$ Simp(#5)

Simp(#6)

#13: $\frac{4096\cdot a}{15625} - \frac{1024\cdot b}{3125} + \frac{256\cdot c}{625} - \frac{64\cdot d}{125} + \frac{16\cdot e}{25} - \frac{4\cdot f}{5} + g = 0$

Simp(#7)

#14: $\frac{729\cdot a}{64} + \frac{243\cdot b}{32} + \frac{81\cdot c}{16} + \frac{27\cdot d}{8} + \frac{9\cdot e}{4} + \frac{3\cdot f}{2} + g = 0$

Simp(#8)

#15: $\frac{15625\cdot a}{64} + \frac{3125\cdot b}{32} + \frac{625\cdot c}{16} + \frac{125\cdot d}{8} + \frac{25\cdot e}{4} + \frac{5\cdot f}{2} + g = 0$

$$\#16:\ a + b + c + d + e + f + g = \frac{243}{16} \qquad \text{Simp(\#9)}$$

$$\#17:\ g = \frac{45}{2} \qquad \text{Simp(\#10)}$$

Als einzige Variable ist *g* in #17 festgelegt. Beim handschriftlichen Rechnen müßte nun ein Gleichungssystem mit sechs Gleichungen und sechs Unbekannten gelöst werden. Mit einem CAS kann dies durch die Eingabe der Bedingungen (begrenzt durch eckige Klammern) mit **soLve** erfolgen.

User

$$\#18:\ \left[F(-2)=0, F(-1.5)=0, F(-0.8)=0, F(1.5)=0, F(2.5)=0, F(1)=\frac{243}{16}, F(0)=\frac{5}{2}\right]$$

Es entsteht der Lösungsvektor #19.

Solve(#18)

$$\#19:\ \left[a=-1, b=\frac{11}{5}, c=\frac{42}{5}, d=-\frac{289}{20}, e=-\frac{1907}{80}, f=\frac{171}{8}, g=\frac{45}{2}\right]$$

Wir setzen die berechneten Koeffizienten in die in #3 definierte Funktion *F* ein

Sub(#3)

$$\#20: F(x) := (-1)\cdot x^6 + \frac{11}{5}\cdot x^5 + \frac{42}{5}\cdot x^4 + \left(-\frac{289}{20}\right)\cdot x^3 + \left(-\frac{1907}{80}\right)\cdot x^2 + \frac{171}{8}\cdot x + \frac{5}{2}$$

und vereinfachen den Funktionsterm.

Simp(#20')

$$\#21:\ F(x) := -x^6 + \frac{11\cdot x^5}{5} + \frac{42\cdot x^4}{5} - \frac{289\cdot x^3}{20} - \frac{1907\cdot x^2}{80} + \frac{171\cdot x}{8} + \frac{45}{2}$$

Dieser Term wird faktorisiert

Fctr(#21')

$$\#22:\ F(x) := \frac{(x+2)\cdot(2\cdot x+3)\cdot(3-2\cdot x)\cdot(2\cdot x-5)^2\cdot(5\cdot x+4)}{80}$$

und gezeichnet (Abb. 2.2)

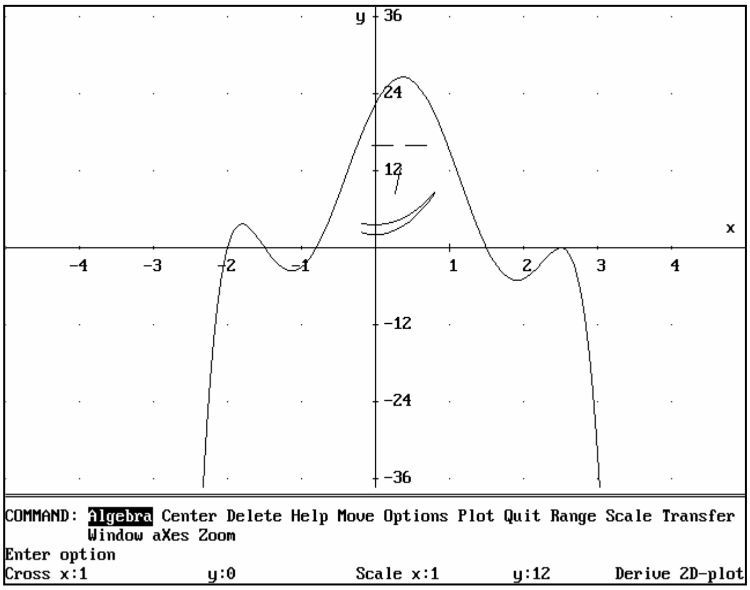


Abb. 2.2: Was sieht man beim Betrachten dieser Kurve? Vgl. mit Kap. 3.2

Es können die Nullstellen überprüft werden, Monotonieintervalle, lokale Extremstellen oder Wendepunkte rechnerisch oder im Grafikfenster mit **F3** durch Wanderung auf dem Funktionsschaubild näherungsweise gefunden werden.

2.2.2. Differenzieren und Integrieren

Ein Schwerpunkt der Schulmathematik besteht in der Herleitung und Interpretation der Differentialquotienten und in der Berechnung und im Verstehen der Bedeutung von bestimmten und unbestimmten Integralen.

In welcher Beziehung stehen Differentiation und Integration? Das folgende Beispiel soll einen Zugang zu dieser Frage öffnen.

Beispiel 2.4: Zusammenhang: Differenzieren - Integrieren

Erhält man wieder die Ausgangsfunktion, wenn eine Funktion zuerst differenziert und danach die Ableitungsfunktion integriert wird? Dieser Zusammenhang ist zu untersuchen, die Auswirkungen des

Differenzierens und Integrierens sollen hinterfragt werden!

Besteht der Schwerpunkt eines Beispiels im Bearbeiten von Termen, erweist es sich als günstig, mit der Einstellung **Option Precision** *Exact* zu arbeiten.

```
#1:   Precision := Exact                                        User
```

Eine Funktion *F* wird definiert

$$\#2:\quad F(x) := \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} \qquad \text{User}$$

und die rechte Seite von #2 mit **Factor** bearbeitet.

$$\#3: \quad F(x) := \frac{x^2 - x + 2}{(x + 1)\cdot(x - 2)} \qquad \text{Fctr(\#2')}$$

Diese rationale Funktion hat zwei Unstetigkeitsstellen (keine hebbaren Lücken), die Funktion ist über ℝ\{-1,2} definiert. Der Graph kann sofort gezeichnet werden.

Mit **Calculus Differentiate** wird der Term der Funktion nach *x* differenziert.

$$\#4: \quad \frac{d}{dx} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} \qquad \text{Dif(User,x)}$$

Der Differentialquotient wird durch den vereinfachten Term #5 und den faktorisierten Term #6 beschrieben.

$$\#5: \quad \frac{4\cdot(1 - 2\cdot x)}{(x^2 - x - 2)^2} \qquad \text{Simp(\#4)}$$

$$\#6: \quad \frac{4\cdot(1 - 2\cdot x)}{(x + 1)^2\cdot(x - 2)^2} \qquad \text{Fctr(\#5)}$$

Dieser Term wird mit **Calculus Integrate** nach *x* integriert, das Ergebnis des unbestimmten Integrals faktorisiert und mit der gegebenen Funktion *F* verglichen.

$$\#7: \quad \int \frac{4\cdot(1 - 2\cdot x)}{(x^2 - x - 2)^2}\, dx \qquad \text{Int(\#5,x)}$$

$$\#8: \quad \frac{4}{x^2 - x - 2} \qquad \text{Simp(\#7)}$$

$$\#9: \quad \frac{4}{(x + 1)\cdot(x - 2)} \qquad \text{Fctr(\#8)}$$

Zur besseren Übersicht werden die beiden Funktionen in #10 und #11 definiert und einer Betrachtung unterzogen.

Die beiden Terme haben ein sehr unterschiedliches Aussehen, so daß die Vermutung naheliegt, daß diese beiden Funktionen außer dem Definitionsbereich wenig gemeinsam haben. Der Zähler der neu entstandenen Funktion ist durch eine Zahl festgelegt, der Zähler der Stammfunktion *F* ist ein Polynom 2.Grades. Besteht nun ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen?

$$\#10: \quad F1(x) := \frac{4}{(x + 1)\cdot(x - 2)} \qquad \text{User}$$

$$\#11: \quad F(x) := \frac{x^2 - x + 2}{(x + 1)\cdot(x - 2)} \qquad \text{Fctr(\#2')}$$

Ein möglicher Versuch, die Beziehung zwischen den Termen allgemein zu beschreiben, besteht im Subtrahieren der beiden Funktionsterme:

$$\#12:\ F1(x) - F(x) = -1 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Wir erhalten als Differenz -1. Dieser Sachverhalt läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die neue Funktion *F1* unterscheidet sich an jeder Stelle des Definitionsbereichs von der Funktion *F* dadurch, daß an jeder Stelle von *F1* der Funktionswert um 1 kleiner ist als die Werte der Funktion *F*. Dies bedeutet, daß die Funktion *F1* aus einer Verschiebung des Graphen von *F* entlang der y-Achse hervorgeht. Beide Funktionen haben dieselbe Ableitungsfunktion.

Werden die Terme der Funktionen *F* und *F1* expandiert wird offensichlich, daß die Terme einander nur durch das konstante Glied 1 unterscheiden.

$$\#13:\ F(x) := \frac{4}{3\cdot(x-2)} - \frac{4}{3\cdot(x+1)} + 1 \qquad \text{Expd(\#2')}$$

$$\#14:\ F1(x) := \frac{4}{3\cdot(x-2)} - \frac{4}{3\cdot(x+1)} \qquad \text{Expd(\#10')}$$

Es ist also zu erkennen, daß beim Differenzieren und nachträglichem Integrieren der konstante Summand *c* zu beachten ist. Durch die Funktion *FA* ist also eine Schar von Stammfunktionen gegeben:

$$\#15:\ FA(x) := \frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)} + c \qquad \text{User}$$

Eine weitere Bedingung der Funktion aus #2, z.B.: *F*(0)=-1, führt durch Lösen einer Gleichung mit einer Unbekannten zur Festlegung von *c*.

$$\#16:\ FA(0) = -1 \qquad \text{User}$$

$$\#17:\ c = 1 \qquad \text{Solve(\#16)}$$

Wird *c* eingesetzt und der Funktionsterm faktorisiert, erhalten wir tatsächlich unsere ursprüngliche Funktion *F*:

$$\#27:\ FA(x) := \frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)} + 1 \qquad \text{Sub(\#24)}$$

$$\#28:\ FA(x) := \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)\cdot(x-2)} \qquad \text{Fctr(\#27')}$$

Diese Beziehung läßt sich grafisch darstellen (Abb. 2.3)

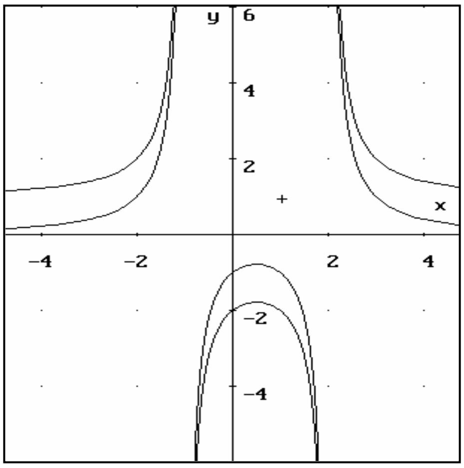


Abb. 2.3: Die Stammfunktion F und die verschobene Funktion F1

Ohne CAS muß bei derartigen Beispielen die Partialbruchzerlegung händisch durchgeführt werden. Jetzt wird diese zeitaufwendige Vorgangsweise an das CAS übertragen, und die Interpretation kann im Mittelpunkt des Interesses stehen.

Beispiel 2.5: Berechnung bestimmter Integrale

Berechne von der Funktion F aus Beispiel 2.4 die bestimmten Integrale in den Grenzen von -0.5 bis 1 und von -1 bis 0.

Mit der Befehlsfolge **Calculus Integrate** wird nach dem zu integrierenden Term, der Integrationsvariablen und nach den Integrationsgrenzen gefragt.

$$\#1: \quad \int_{-0.5}^{1} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}\, dx \qquad \text{Int(User,x)}$$

Die Auswertung ergibt bei Vereinfachung den Ausdruck #14. Das CAS liefert manchmal unerwartete Ausgaben, die der Schüler eventuell noch nicht kennengelernt hat. Die einfachste Form des Computeralgebra-Systems ist oftmals nicht identisch mit der erwarteten Darstellung.

$$\#2: \quad \frac{3}{2} - \frac{4 \cdot LN(10)}{3} \qquad \text{Simp(\#1)}$$

Mit **approX** erhalten wir einen negativen Wert für das bestimmte Integral. Dieser läßt sich durch die grafische Interpretation aus Abb. 2.4 erklären.

```
#3:  -1.57011                                    Approx(User)
```

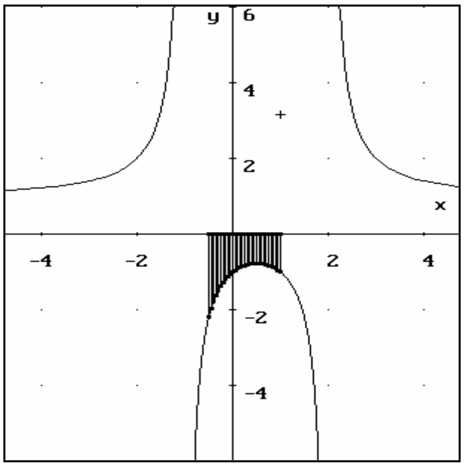


Abb. 2.4: Graph der Funktion F

Das bestimmte Integral in den Grenzen von -1 bis 0 liefert -∞. Auch das läßt sich grafisch (Abb. 2.4) einsichtig machen.

$$\#4:\quad \int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x + 2}{(x + 1)\cdot(x - 2)}\,dx \qquad \text{Int(User,x)}$$

$$\#5:\quad -\infty \qquad \text{Simp(\#4)}$$

Für eine genauere Betrachtung der Ergebnisse bei der Ermittlung bestimmter Integrale vergleiche Kap. 5.2.1 (Ergebniskritik).

2.2.3. Lösen von Differentialgleichungen

Die Behandlung einfacher Differentialgleichungen steht am Ende und am Rande der Schuanalysis. Dies vor allem deswegen, weil der damit einhergehende Aufwand für die Lösung häufig zu groß ist. Gerade in einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht treten Probleme, die auf Differentialgleichungen führen, häufiger ins Blickfeld. Bei der Verwendung von CAS stehen aber in erster Linie die Modellbildung und die Interpretation der Ergebnisse im Vordergrund.

Beispiel 2.6: Wann ist die Pizza fertig?

Walter hat seine Freundin Regina zur ersten selbstgebackenen Pizza eingeladen. Leider hat er vergessen, das Rohr vorzuwärmen. Die Pizza soll 20 Minuten bei ca. 200 °C gebacken werden. Es ist 18 Uhr, Regina kommt um 18.45. Die Temperatur des Backrohres nach dem Einschalten läßt sich beschreiben durch $O(t) = 200 - 180e^{-0.3t}$ *(in °Celsius).*

Die Temperaturzunahme ist proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des Backrohrs und der Pizza mit einem Proportionalitätsfaktor von 0.2 .

Nach wieviel Minuten erreicht die Pizza 95% der Endtemperatur? Wenn Walter von da an 20 Minuten wartet, kann er dann noch rechtzeitig fertig werden?

Die Temperaturzunahme der Pizza, die zugleich mit dem Einschalten in den Herd kommt, ergibt sich durch:

$$\frac{dP}{dt} = 0.2\,(\,O(t) - P(t)\,)$$

Die DERIVE-Funktion DSOLVE1(u,v,x,y,x0,y0) versucht die Lösung der Differentialgleichung $u(x,y) + v(x,y)\,y' = 0$ mit der Anfangsbedingung $x0,\ y0$ zu finden. Mit Hilfe von DSOLVE1 können wir uns nun an die Lösung obiger Fragestellung (Differentialgleichung) heranwagen.

#1: $O(t) := 200 - 180\cdot \hat{e}^{-0.3\cdot t}$ User

Zur Übersetzung der mathematischen Schreibweise in die Notation des DSOLVE1-Moduls: die rechte Seite obiger Differentialgleichung wird zu $u(t,p)$, für $v(t,p)$ ergibt sich -1, x entspricht t und y entspricht der gesuchten Temperatur der Pizza p. Zum Zeitpunkt 0 nehmen wir eine Anfangstemperatur von 20°C an (Zimmertemperatur).

#2: DSOLVE1(0.2·(O(t) - p), -1, t, p, 0, 20) User

#3: $(200 - p)\cdot(\hat{e}^{t})^{1/5} + \dfrac{360}{(\hat{e}^{t})^{1/10}} - 540 = 0$ Simp(#2)

#4: $p = -\dfrac{540}{(\hat{e}^{t})^{1/5}} + \dfrac{360}{(\hat{e}^{t})^{3/10}} + 200$ Solve(#3)

Nun sind wir bereits in der Lage, den Temperaturverlauf bei Backrohr und Pizza grafisch darzustellen. Die Grafik (Abb. 2.5) zeigt auch bereits, daß die Pizza rechtzeitig fertig wird.

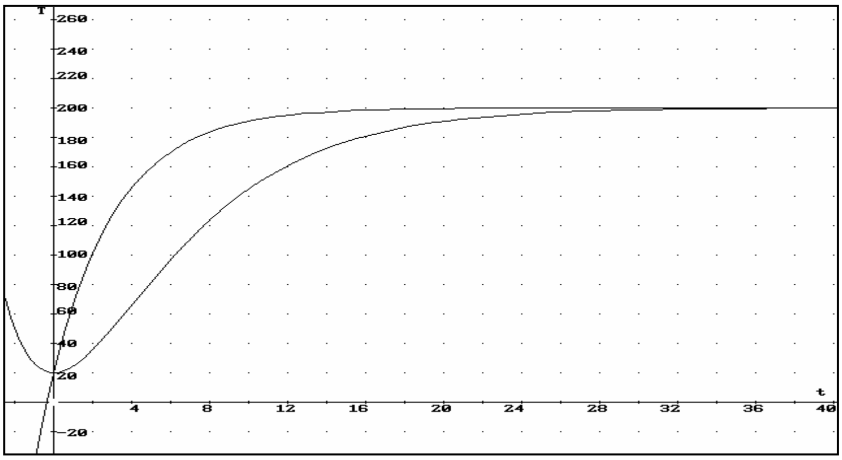


Abb. 2.5: Temperaturzunahme

Wir wollen uns aber noch rasch vergewissern, ob dem wirklich so ist:

#5: Precision := Approximate User

#6: $-\dfrac{540}{(\hat{e}^{t})^{1/5}} + \dfrac{360}{(\hat{e}^{t})^{3/10}} + 200 = 200\cdot 0.95$ User

Gleichung #6 wird nun näherungsweise gelöst. Dazu ist es notwendig, sinnvolle Intervallgrenzen vorzugeben. Diese können hier nur aufgrund des Problemkontextes bzw. der Grafik gefunden werden., z.B. [0;20]

```
#7:  t = 19.4436                                    Solve(#6)
```

Walter hat damit sogar noch genügend Zeit, Blumen für Regina auf den Tisch zu stellen.

2.2.4. Summen und Produkte

Im Unterschied zum Arbeiten mit dem numerischen Taschenrechner können wir uns auch Summen und Produkte symbolisch - d.h. hier allgemein - berechnen lassen.

Summen

Beispiel 2.7: Die Restschuld

Leite eine Formel für die Restschuld bei der Tilgung eines Kredits her, wenn du nur berücksichtigst, daß für den aufgenommenen Kredit Zinsen berechnet werden und die Rückzahlung abgezogen wird.

Beginnen wir damit, daß wir den Vorgang so formulieren, daß wir dabei der Alltagssprache noch nahe bleiben. Mit Wortvariablen ausgedrückt ergibt sich also für die jeweils neue Restschuld nach Ablauf einer weiteren Zinsperiode:

```
#1:  [InputMode:= Word, Precision:= Approximate,
      Notation:=Dezimal]                                 User
User
#2:  schuld_neu := schuld_alt +
```

$$\frac{schuld\_alt \cdot zinssatz}{100} - rückzahlung$$

Simp(#2')

$$\text{#3: } schuld\_neu := schuld\_alt \cdot \left[1 + \frac{zinssatz}{100}\right] - rückzahlung$$

Etwas stärker formalisiert bekommen wir die Berechnungsvorschrift

```
#4:  s0·q - r                                            User
```

mit s_0 als ursprüngliche Schuld, $q = 1 + \frac{Zinssatz}{100}$ 4 als Aufzinsungsfaktor und r als Höhe der Rückzahlungsrate.

Berechnen wir nun die Restschuld nach ein, zwei, drei, vier Verzinsungsperioden, indem wir schrittweise das jeweilige Ergebnis wieder in die ursprüngliche Berechungsvorschrift #5 (mit **Manage Substitute**) einsetzen:

```
#5:  s0·q - r                                                    User

#6:  (s0·q - r)·q - r                                        Sub(#5)

#7:  ((s0·q - r)·q - r)·q - r                                Sub(#5)

#8:  (((s0·q - r)·q - r)·q - r)·q - r                        Sub(#5)
```

Wenn wir die einzelnen Terme der Reihe nach vereinfachen, sehen wir, worauf die Ermittlung der Restschuld hinausläuft:

```
#9:  s0·q - r                                                    User
                                2
#10: (s0·q - r)·q - r = q ·s0 - q·r - r            User=Simp(User)

User=Simp(User)
                                      3       2
#11: ((s0·q - r)·q - r)·q - r = q ·s0 - q ·r - q·r - r

User=Simp(User)

#12: (((s0·q - r)·q - r)·q - r)·q - r =

                                4       3       2
                                q ·s0 - q ·r - q ·r - q ·r - r
```

Wir haben so eine Vermutung erhalten, wie die Formel für die Restschuld aussehen muß. Nun können wir die Beziehung für die Restschuld mit Hilfe von SUM formulieren:

$$\text{\#13: RESTSCHULD}(n, s0, q, r) := q^n \cdot s0 - \sum_{i=1}^{n-1} q^i \cdot r \qquad \text{User}$$

Mit Hilfe des Befehls **Simplify** wird nun die formal angeschriebene Summe auch berechnet:

Simp(#13')

$$\text{\#14: RESTSCHULD}(n, s0, q, r) := q^n \cdot \left[s0 - \frac{r}{q-1}\right] + \frac{q \cdot r}{q-1}$$

Natürlich sollte es einem Schüler keine Schwierigkeit bereiten, die Summe auch händisch zu ermitteln, es wäre ein Training zur Anwendung der geometrischen Reihe. Man muß sich nur klar darüber sein, welche Ziele man verfolgen will. Wenn wir die Beziehung für die Restschuld im CAS formulieren, haben wir die Möglichkeit, bei der Beantwortung vieler Fragen, die im Zusammenhang mit Krediten auftauchen können, auf einer Ebene zu arbeiten, die der umgangssprachlichen Form sehr nahe ist. Einige Beispiele dieser Art sollen dies verdeutlichen.

Mit der Funktion aus #14 können wir darangehen, Fragen zu beantworten, wie etwa: Wie entwickelt sich die Restschuld? Wie lange dauert es bei einer bestimmten Rückzahlungsrate *r*, bis die Schuld völlig getilgt ist? Wie groß muß die Rückzahlungsrate *r* sein, damit das ausgeliehene Kapital (Schuld) innerhalb einer bestimmten Zeit getilgt ist?

Die Schuld soll z.B. nach 10 Jahren bei 10% Verzinsung getilgt werden, wie hoch muß die Rückzahlungsrate gewählt werden?

```
#15: RESTSCHULD(10, 100000, 1.1, rückzahlungsrate) = 0   User

#16: rückzahlungsrate = 17364.0                        Solve(#15)
```

Oder: Nach wie vielen Jahren ist die Schuld getilgt, wenn jährlich 12 000,- zurückgezahlt werden?

```
#17: RESTSCHULD(jahre, 100000, 1.1, 12000) = 0           User

#18: jahre = 19.7992                                   Solve(#17)
```

Ein kleiner Test unserer Beziehung zeigt weiters, daß z.B. eine Schuld von 100 000,- bei einer Verzinsung von 10% p.a. und einer Rückzahlung von 11 000.- weiter anwächst, anstatt geringer zu werden.

```
User=Simp(User)

#19: RESTSCHULD(5, 100000, 1.1, 11000) = 104894.9
```

Produkte

Durch die symbolische Berechnung von Summen und Produkten ergeben sich neue Möglichkeiten, im Mathematikunterricht zu herkömmlichen Aufgaben experimentelle Zugänge zu eröffnen. Dazu eine bekannte Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Beispiel 2.8: Das Geburtstagsproblem

Wie viele Personen müssen im Zimmer sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% sagen kann, daß mindestens zwei von ihnen am selben Tag des Jahres Geburtstag haben?

Das Reizvolle an dieser Aufgabe ist, daß die Lösung genauso einfach wie überraschend ist. Wären z.B. fünf Personen in dem Raum, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß alle an verschiedenen Tagen des Jahres ihren Geburtstag feiern:

$$\text{P(Geburtstag an verschiedenen Tagen)} = 1\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\frac{361}{365} =$$

$$(1-\frac{1}{365})\cdot(1-\frac{2}{365})\cdot(1-\frac{3}{365})\cdot(1-\frac{4}{365}) = \prod_{i=1}^{4}(1-\frac{i}{365})$$

Mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit ergibt sich damit folgender Ansatz:

$$1-\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{i}{365}) \geq 0,5$$

Wir sehen (Abb. 2.6): Liegt bei fünf anwesenden Personen die Wahrscheinlichkeit bereits bei 2,7% (#3), so ergibt sich bei 23 Personen bereits eine Wahrscheinlichkeit von über 50% (#5). Da die Klassenschülerzahl oft in diesem Bereich liegt, kann bei dieser Aufgabe leicht die Probe aufs Exempel gemacht werden.

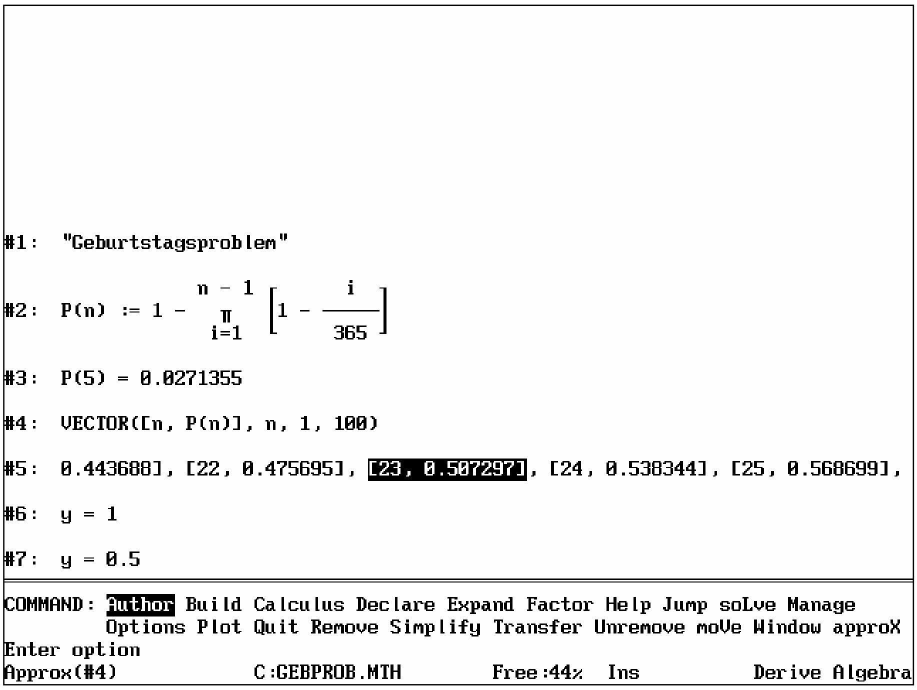


Abb.2.6: Wann ist die Wahrscheinlichkeit 50% ?

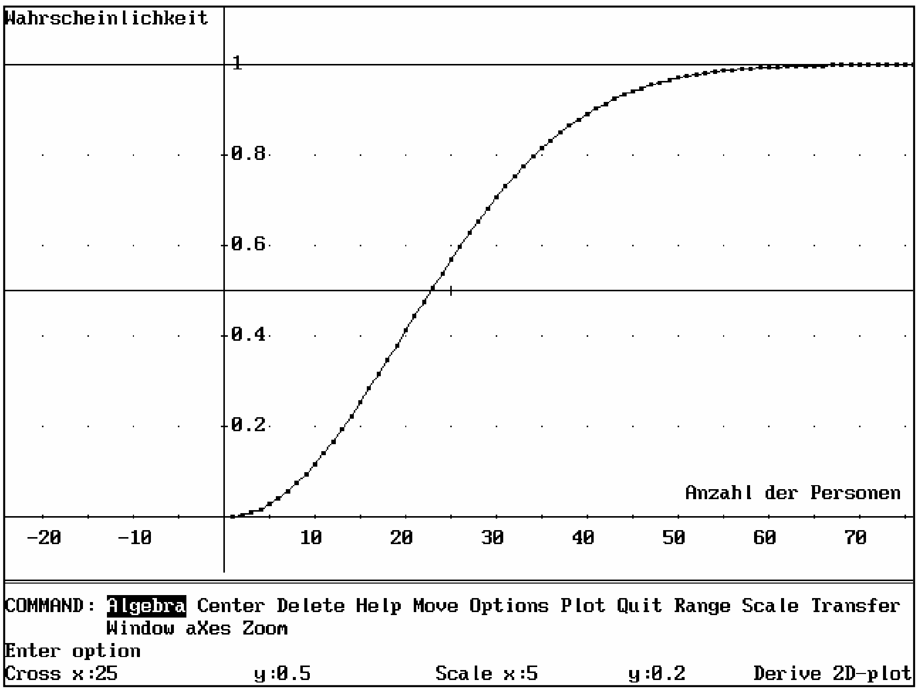


Abb. 2.6: Geburtstagsproblem

Wie die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, mit der Anzahl der anwesenden Personen ansteigt, zeigt Abb. 2.7, die entsteht, wenn wir die Wertepaare aus #5 plotten.

Beziehung #2 liefert uns im Zusammenwirken mit der Rechenleistung des Systems Informationen, die weit über die ursprüngliche Problemstellung hinausgehen. Wir sehen nun, wie die Wahrscheinlichkeit mit der Personenanzahl zusammenhängt - dies nicht nur an einer Stelle.

2.3. Das Computeralgebra-System als algorithmisches Hilfsmittel

Roland Fischer spricht in seinem Buch 'Mensch und Mathematik' von der "Chance der materiellen Auslagerung bestimmter Fähigkeiten des Menschen mit Hilfe des Computers" [Fischer, 1985, S.259]. Durch Computeralgebra-Systeme ergibt sich vor allem die Möglichkeit der Auslagerung algorithmischer Fertigkeiten, aber auch die Neufassung des Begriffs Algorithmus.

2.3.1. Ausführen implementierter Algorithmen

Der erste Schritt ist das Nutzen der Algorithmen, die vom CAS zur Verfügung gestellt werden. Das können einerseits solche sein, die exakte Lösungen liefern, und andererseits Algorithmen, die zu Näherungslösungen führen. Das folgende Beispiel soll das näherungsweise Lösen mit einem CAS zeigen.

Beispiel 2.9: Das Plancksche Strahlungsgesetz [vgl. Dorninger, 1988**]**

Das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers ist gegeben durch die Funktion E(λ) in Zeile #2. Dabei bedeuten λ die Wellenlänge der Strahlung, t die absolute Temperatur des Körpers, c die Lichtgeschwindigkeit und k die Boltzmannsche Konstante (alle Größen sind positiv). Man bestimme das Maximum von E(λ) für λ > 0!

Die erste Ableitung wird vom CAS berechnet. (Für λ werden -mittels Declare Variable- nur positive reelle Zahlen zugelassen.)

$$\#1: \quad \lambda :\varepsilon \text{ Real } (0, \infty) \qquad \text{User}$$

$$\#2: \quad E(\lambda) := \frac{c^2 \cdot h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\hat{e}^{c \cdot h/(k \cdot \lambda \cdot t)} - 1} \qquad \text{User}$$

$$\#3: \quad \frac{d}{dl} E(\lambda) \qquad \text{Dif(\#2',l)}$$

$$\#4: \quad \frac{c^2 \cdot h \cdot (\hat{e}^{c \cdot h/(k \cdot \lambda \cdot t)} \cdot (c \cdot h - 5 \cdot k \cdot \lambda \cdot t) + 5 \cdot k \cdot \lambda \cdot t)}{k \cdot \lambda^7 \cdot t \cdot (\hat{e}^{c \cdot h/(k \cdot \lambda \cdot t)} - 1)^2} \qquad \text{Simp(\#3)}$$

Man stellt fest, daß der Ausdruck sehr komplex ist. In solchen Fällen versucht man häufig, durch Substitution zu einfacheren, überschaubaren Termstrukturen zu kommen. Man ersetzt den Exponenten durch die Variable *x*.

$$\#5: \quad x = \frac{c \cdot h}{k \cdot \lambda \cdot t} \qquad \text{User}$$

Die Gleichung muß nun nach λ aufgelöst werden, um λ durch einen Term, der von *x* abhängt, zu ersetzen.

$$\#6: \quad \lambda = \frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x} \qquad \text{Solve(\#5)}$$

$$\#7: \quad \lambda := \frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x} \qquad \text{User}$$

$$\#8: \quad \frac{k^6 \cdot t^6 \cdot x^6 \cdot (\hat{e}^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^4 \cdot h^5 \cdot (\hat{e}^{2 \cdot x} - 2 \cdot \hat{e}^x + 1)} \qquad \text{Simp(\#4)}$$

Im *Approximate*-Modus kann man näherungsweise die Nullstellen mit dem **soLve**-Befehl ermitteln. Wenn man den Bruchterm genauer betrachtet, erkennt man, daß es genügt, die Nullstellen der Funktion in Zeile #10 zu suchen. DERIVE fragt nach dem Intervall, in dem gesucht werden soll. Akzeptiert man das vom CAS vorgeschlagene Intervall [-10,+10], liefert DERIVE den Wert $x = 0$ (Zeile #11). Dieser Wert ist aber unbrauchbar.

```
#9:  Precision := Approximate                              User
```

$$\#10: \quad F(x) := \hat{e}^x \cdot (x - 5) + 5 \qquad \text{User}$$

```
#11: x = 0                                              Solve(#10)
```

Ohne Visualisierung wäre es nicht leicht, ein brauchbares Intervall zu finden (Abb. 2.8).

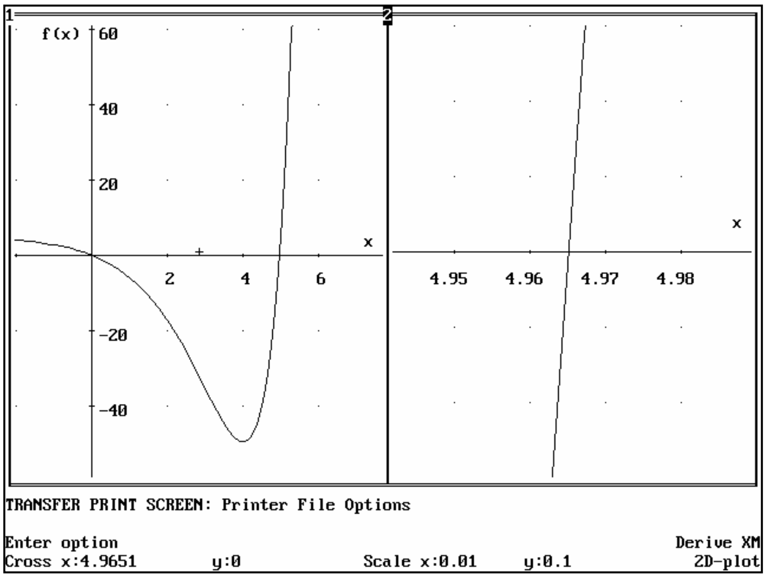


Abb. 2.7:Nullstellen durch Visualisieren

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) Man ermittelt die Nullstelle gleich aus der Zeichnung. Um zu einer besseren Genauigkeit zu kommen, vergrößert man den Ausschnitt um die gesuchte Nullstelle durch **Zoom** oder mit Hilfe des **Range**-Befehls so lange, bis die Nullstelle mit ausreichender Genauigkeit im Grafikfenster abgelesen werden kann (siehe Fenster 2). In Abb. 2.8 zeigt *Cross* im Fenster links unten die Position des Cursors an. Man erhält $x \approx 4.9651$.

(2) Man nimmt aus dem Grafikfenster das geeignete Intervall, um die Nullstelle von #10 mit **soLve** im *Approximate*-Modus zu ermitteln. Das kann entweder mit dem **soLve**-Befehl erfolgen, dann fragt das CAS nach dem Intervall, oder man verwendet wie in Zeile #12 die SOLVE-Funktion und gibt das Intervall sofort mit ein.

```
#12: SOLVE(F(x), x, 4, 6)                                  User

#13: [x = 4.96511]                                      Simp(#12)
```

Wie man sieht, ist die Genauigkeit der aus dem Graphen ermittelten Nullstelle nicht viel schlechter. Sollte die Genauigkeit nicht ausreichen, kann sie, wie in Zeile #14 zu sehen ist, erhöht werden.

```
#14: PrecisionDigits := 20                                  User

#15: [x = 4.9651142317442804596]                        Simp(#12)
```

Schließlich wäre jetzt auch noch λ durch Einsetzen zu ermitteln.

An weiteren Beispielen werden wir deutlich machen, daß natürlich nicht alle Algorithmen 'Black Boxes' bleiben sollen. Der von uns vertretene didaktischen Ansatz wird in Kap. 3 und Kap. 4 näher erläutert.

2.3.2. Implementieren von Algorithmen durch den Benutzer

Nicht immer sind jene Algorithmen im CAS verfügbar, die im Unterricht gerade betrachtet werden. Dafür kann es zwei Gründe geben:

Der gewünschte Algorithmus ist im System nicht vorhanden (dies ist bei der enormen Leistungsfähigkeit und wachsenden Vielseitigkeit der CAS natürlich immer seltener der Fall), oder der gewünschte Algorithmus ist nicht direkt zugänglich. Dies liegt vor allem daran, daß der Kern der CAS nicht für den Benutzer einsehbar ist. (Beim Vorgänger von DERIVE - dem Programmpaket µ-MATH - war dies noch der Fall. Hier konnten die einzelnen LISP-Programme noch eingesehen werden. Dies war für all jene Benutzer interessant, die im LISP-Dialekt µ-LISP sattelfest waren). Fehlen solche spezifischen Programmiersprachenkenntnisse, so ist auch ein offenes System nicht unbedingt ein Vorteil. Für die tägliche Benutzung ist sicher ein gut dokumentierter, möglichst vielseitiger Satz von Programmierbefehlen hilfreicher.

In DERIVE - das ebenfalls in µ-LISP [Rich/Stoutemyer, 1994] entwickelt wurde und wird - steht ein solcher Satz leistungsfähiger Kommandos zur Verfügung. Algorithmen müssen in DERIVE funktional dargestellt werden, d.h., Programme werden dadurch geschrieben, daß Funktionen ineinandergeschachtelt werden. Dies erfordert sicher für jemanden, der es gewohnt ist, prozedural zu denken und zu programmieren, anfangs eine Umstellung. Die funktionale Programmierweise ist aber sehr effizient und letztendlich liegt darin auch das Geheimnis der Brauchbarkeit des Gesamtsystems DERIVE bei gleichzeitig minimalem Platten- und Hauptspeicherbedarf.

Die gängigen CAS stellen auch durchwegs Umgebungen zum Implementieren von Algorithmen, wie sie z.B. im Rahmen des Mathematikunterrichts auftreten, dar.

Das näherungsweise Lösen einer Gleichung wie z.B. $e^x \cdot (x - 5) + 5 = 0$ läßt sich vom CAS elegant und mühelos durchführen (Bsp. 2.9), das Unbefriedigende daran ist aber, daß der Lösungsvorgang als Black Box abläuft und der Benutzer keinerlei Hinweis darauf erhält, wie das System zu der gewünschten Lösung gekommen ist. Im Unterricht kommt daher sehr bald der Wunsch einer Aufklärung auf.

Es wird zwar nicht möglich sein, lückenlos aufzuzeigen, was im CAS beim Lösen der Gleichung genau abläuft, aber diese Situation läßt sich im Unterricht konstruktiv zur Implementation eigener Algorithmen nützen.

Bemerkung: Was macht DERIVE nun tatsächlich bei der näherungsweisen Suche nach Nullstellen? "DERIVE uses the bisection method, terminating when a midpoint abscissa rounds to one of the endpoints at the current precision level. Thus, the accuracy is the maximum that you could expect, considering roundoff error in evaluating the expression.

The method often succeeds even when the expression values at the initial endpoints are both positive or both negative: In those respective cases, bisection converges toward a local minimum or maximum until either a midpoint value has the opposite sign or a local extremum is reached, where the expression value is compared with 0." [Rich/Stoutemyer, The International DERIVE Journal, 1/1994, p.14]

Beispiel 2.10: Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen

Entwickle einen Algorithmus zur näherungswise Bestimmung der Nullstelle einer Funktion durch binäres Suchen. Basis für diesen Algorithmus sei folgender Satz:

Ist f auf [a,b] stetig und gilt f(a) < 0 ∧ f(b) >0 oder f(a) >0 ∧ f(b) < 0, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in]a,b[.

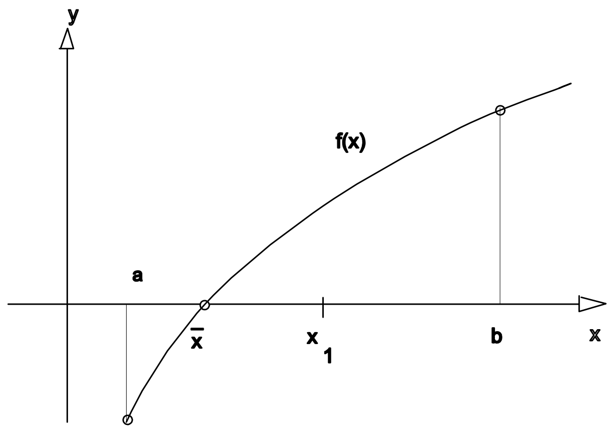


Abb. 2.8:Bisektionsverfahren

Versuchen wir nun daraus einen Algorithmus zu bilden:

Algorithmus in Worten	**Algorithmus formalisiert**
a) Bilde den Mittelwert der Intervallgrenzen.	a) `Intervall  := [a,b]` `Mittel(Intervall):= (a+b)/2`

b) Wähle jenes Teilintervall, bei dem die Funktionswerte der Grenzen verschiedene Vorzeichen haben.	b) `Wenn (f(a)*f((a+b)/2)< 0,`
	`dann Intervall_neu:=[a,(a+b)/2],`
	`sonst Intervall_neu:=[(a+b)2,b])`

c) Iteriere b)	c) `Wende das Ergebnis von b)` `wieder auf b) an`

Algorithmus im CAS

```
#1:  "Binäres Suchen"                                        User
                             x
#2:  F(x) := ê ·(x - 5) + 5                                  User
```

a) Berechnung der Intervallmitte: Dazu wird zuerst allgemein ein Intervall I und damit dann eine CA-Funktion für die Berechnung des arithmetischen Mittels der Intervallgrenzen definiert.

$\#3:\quad \mathtt{i := [a, b]}$ User

$$\#4:\quad \mathrm{MITTEL(i)} := \frac{i_1 + i_2}{2} \qquad \text{User}$$

Ein kurzer Test dieser CA-Funktion:

```
#5:  MITTEL([4, 5]) = 4.5                     User=Simp(User)
```

b) Ermittlung des nächsten Intervalls: Wir übertragen dazu die oben entwickelte Wenn-Dann-Sonst - Beziehung direkt in die Sprache des CAS:

User

$$\#6:\quad \mathrm{NEXT\_INT(i)} := \mathrm{IF}\left(\mathrm{F}(i_1)\cdot \mathrm{F(MITTEL(i))} < 0,\ \left[i_1,\ \mathrm{MITTEL(i)}\right],\ \left[\mathrm{MITTEL(i)},\ i_2\right]\right)$$

```
#7:  NEXT_INT([4, 5]) = [4.5, 5]              User=Simp(User)
```

c) Der letzte Schritt besteht nun in der Iteration des Vorgangs:

```
#8: ITERATES(NEXT_INT(i), i, [4, 5], 17)             User
```

$$\#9:\quad \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4.5 & 5 \\ 4.75 & 5 \\ 4.875 & 5 \\ 4.9375 & 5 \\ 4.9375 & 4.96875 \\ 4.95312 & 4.96875 \\ 4.96093 & 4.96875 \\ 4.96484 & 4.96875 \\ 4.96484 & 4.96679 \\ 4.96484 & 4.96582 \\ 4.96484 & 4.96533 \\ 4.96508 & 4.96533 \\ 4.96508 & 4.96520 \\ 4.96508 & 4.96514 \\ 4.96508 & 4.96511 \\ 4.96510 & 4.96511 \\ 4.96511 & 4.96511 \end{bmatrix} \qquad \text{Approx(\#8)}$$

Nach 17 Iterationsschritten haben wir somit die 2. Nullstelle der Funktion $f(x)$ auf 5 Nachkommastellen genau bestimmt.

Abschließend können wir noch alle drei Schritte, aus denen unser Algorithmus besteht, in eine einzige CA-Funktion packen und damit diesen Algorithmus zu einem neuen CA-Kommando machen, das uns künftig zur Verfügung steht. (Ein Hinweis: Wird an Stelle von **ITERATES** der Befehl **ITERATE** verwendet, so erhält man lediglich das Ergebnis des letzten Iterationsschritts.)

```
#10: BIN_SUCH(startintervall, schrittzahl):=

     ITERATE(NEXT_INT(i),i,startintervall,schrittzahl)   User

#11: BIN_SUCH([4,5],17) = [4.96511,4.96511]   User=Simp(User)
```

Weitere Anregungen zum algorithmischen Vorgehen finden sich in Kapitel 4.3 - Modulprinzip.

2.4. Methodisches Hilfsmittel

Das didaktisch interessanteste Einsatzgebiet von CAS liegt sicher in ihrem Einsatz als methodische Hilfsmittel. "Über diese Rolle als Rechen- und Zeichenknecht hinaus können Computer [...] als methodische Hilfsmittel neuer Art (neben den bewährten) eingesetzt werden, welche zur Förderung gerade anspruchsvollerer Ziele beitragen und die Aneignung mathematischer Ziele für Schüler erleichtern sollen", schreibt W.Blum [Postel/Kirsch/Blum,1991, S.75]. Und als Beispiele führt er u.a. an: "Vertrautwerden mit Funktionen und deren Eigenschaften durch zielgerichtetes und systematisches Verändern von Parametern im Term der behandelten Funktionen" oder auch die "vielfältigen Möglichkeiten für Simulationen, z.B. bei exponentiellen Prozessen oder bei ökologischen Systemen, wodurch sowohl die betreffenden Realsituationen besser verstehen als auch allgemeine Einsichten in Modellbildungsprozesse gewinnen können" [a.a.O,S.76].

2.4.1. Hilfe bei der Modellbildung

Modellbildung ist ein zentrales Thema jedes anwendungsorientierten Mathematikunterrichts (siehe Kap. 3.4). Dem Schüler sollen neben einer geeigneten Arbeitsumgebung Grundmodelle zur Verfügung stehen.

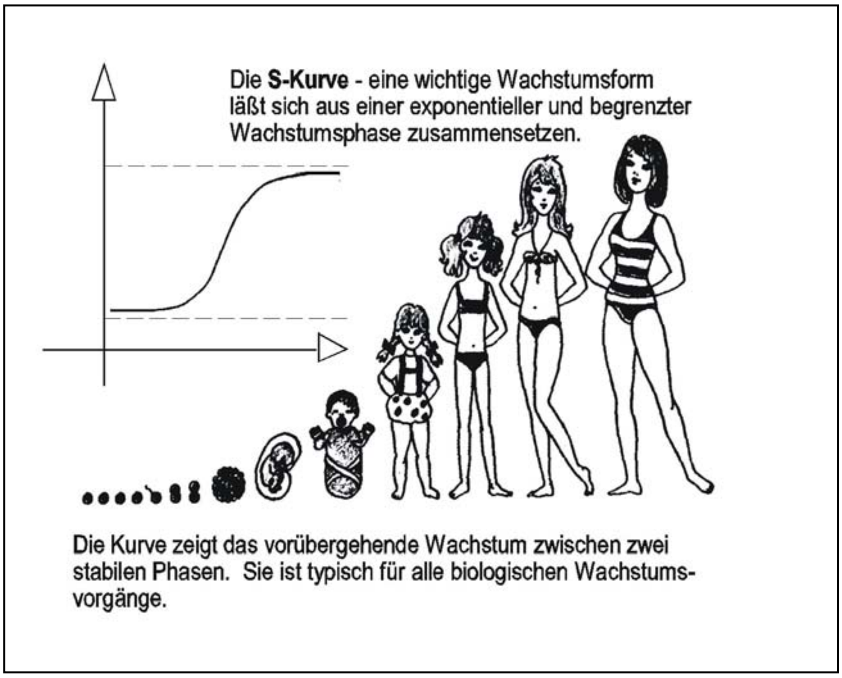


Abb. 2.9: Logistisches Wachstum

Visualisierung

CAS stellen eine ideale Umgebung zur Untersuchung grundlegender Wachstumstypen dar, die als Bausteine zur Modellbildung verstanden werden können. Dabei soll speziell auf die Möglichkeit der Visualisierung und Untersuchungen mit Parametervariationen hingewiesen werden. Als wesentliche Grundmodelle sind das lineare (additive) Wachstum, das freie Wachstum (exponentielles Wachstum/Zerfall), das beschränkte oder begrenzte Wachstum, das logistische und das hyperbolische (explosives oder überexponentielles) Wachstum zu nennen.

Untersuchung von Wachstumsprozessen - exponentielles Wachstum

Beispiel 2.11: Freies Wachstum - Variation der Basis

Untersuche die Auswirkungen der Veränderung der Basis a auf die Lage des Graphen der Exponentialfunktion $y = c\,a^x$ *! Wähle jeweils c = 1 und a als eine positive relle Zahl! Welche besonderen Eigenschaften können aus dieser Untersuchung hergeleitet werden?*

Zuerst wird die Gleichung der zu untersuchenden Funktionsklasse allgemein angegeben.

```
                 x
#1:   y = c·a                                           User
```

Wir setzen den konstanten Multiplikationsfaktor *c* gleich 1.

```
               x
#2:   y = a                                             User
```

Aus dieser Funktionsgleichung in #2 werden durch Einsetzen von Zahlen für die Basis *a* mit **Manage Substitute** einzelne Funktionen erzeugt. Wir verwenden als jeweilige Basis die Zahlen 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, und 2 .

Wir wählen an dieser Stelle bewußt einen 'langsamen' Weg mit **Manage Substitute**, weil der Schüler dadurch auf die einzelnen Funktionen leicht zugreifen kann (Diese Funktionen ließen sich auch mit einem VECTOR-Befehl erzeugen).

```
                 x
#3:   y = 0.2                                         Sub(#2)
                 x
#4:   y = 0.4                                         Sub(#2)
                 x
#5:   y = 0.6                                         Sub(#2)
                 x
#6:   y = 0.8                                         Sub(#2)
               x
#7:   y = 1                                           Sub(#2)
                 x
#8:   y = 1.2                                         Sub(#2)
                 x
#9:   y = 1.4                                         Sub(#2)
                 x
#10:  y = 1.6                                         Sub(#2)
                 x
#11:  y = 1.8                                         Sub(#2)
               x
#12:  y = 2                                           Sub(#2)
```

Die einzelnen Funktionen werden mit dem Cursor unterlegt und mit **Plot Overlay Plot** gezeichnet.

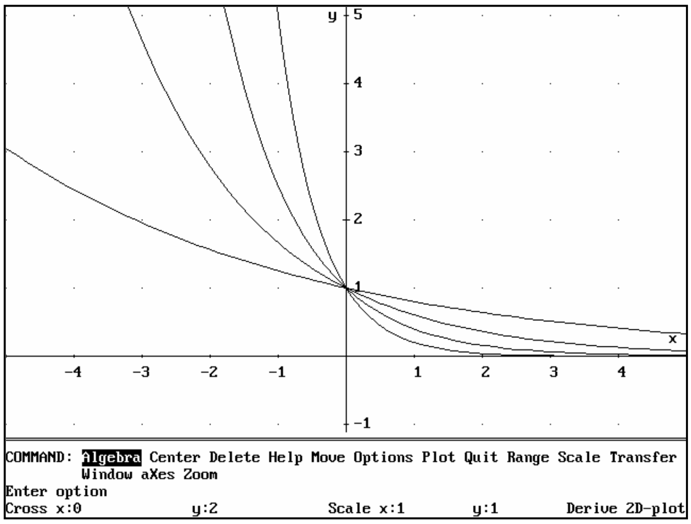


Abb. 2.10: Basis: $0 < a < 1$

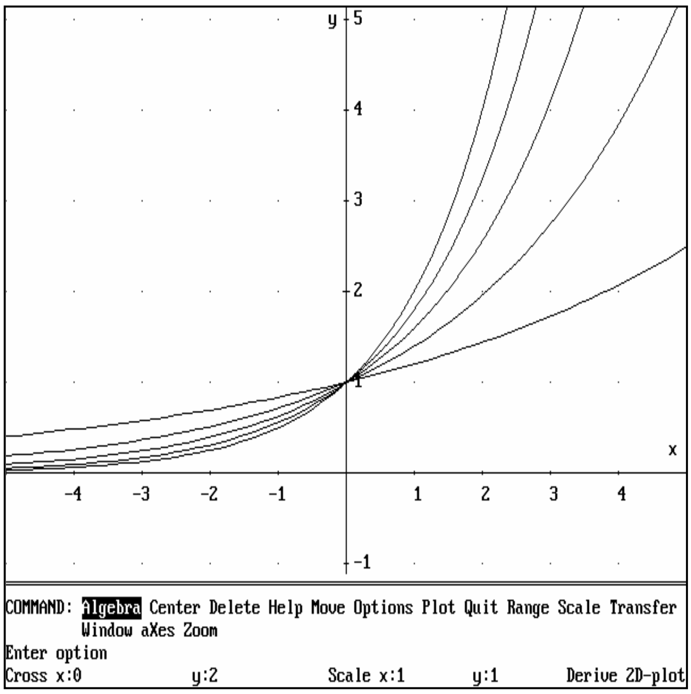


Abb. 2.11: Basis: $a > 1$

Es zeigt sich, daß mit $a = 1$ eine Gerade parallel zur x-Achse mit der Gleichung $y = 1$ festgelegt ist. Die Funktionen aus #3 bis #6, also wenn $0 < a < 1$, sind streng monoton fallend, die Grundmenge kann alle rellen Zahlen beinhalten und alle Funktionswerte sind positiv (Abb. 2.11). Die Funktionen dieses Typs sind Beschreibungen von Zerfallsprozessen ("Sterbeprozesse").

Bei gleichbleibender Grund- und Zielmenge zeigen die Funktionen aus #8 bis # 12 mit $a > 1$ streng monoton steigende Graphen (Abb. 2.12). Diese Funktionen stellen unbegrenzte Wachstumsvorgänge ("Geburtsprozesse") dar.

Es ist zu erkennen, daß alle Graphen der Funktionen durch den Punkt (0,1) gehen, da $c = 1$ gewählt wurde. Darüber hinaus läßt sich durch die Lage der Graphen die Vermutung aufstellen, daß sich zu jeder fallenden Exponentialfunktion ($0 < a < 1$) eine dazugehörende steigende ($a > 1$) finden läßt, so daß die beiden Funktionen durch Spiegelung an der y-Achse auseinander hervorgehen. Die Funktionen können 'nachgeplottet' (sie werden in einer neuen Farbe gezeichnet) und gespiegelte Funktionen herausgefunden werden, z.B. #6 und #8.

Beispiel 2.12: Freies Wachstum - Variation des Anfangswerts

Untersuche die Auswirkungen der Veränderung des Faktors c auf die Lage des Graphen der Exponentialfunktion $y = c\,a^x$ *! Wähle für a zuerst 1.2 und danach 0.8!*

Welche besonderen Eigenschaften können aus dieser Untersuchung hergeleitet werden?

```
                  x
#1:   y = c·a                                         User
```

Die Funktionsgleichungen können durch Einsetzen (**Manage Substitute**) wie in dem vorherigen Beispiel erzeugt werden. Eleganter und schneller läßt sich eine Schar von Funktionen mit Hilfe des VECTOR-Befehls #2 (für *c* werden Werte zwischen -10 und 10 mit Schrittweite 1 eingesetzt) erzeugen.

```
                               x
#2:   VECTOR([y = c·1.2 ], c, -10, 10)                User
```

Die Vereinfachung dieses Ausdrucks in #2 liefert 21 Funktionen, die gemeinsam gezeichnet werden können:

```
                    0.182321·x
#3:   [[ y = - 10·ê           ] , ...     ]       Approx(#2)
```

Die Abbildung 2.13 zeigt die Graphen aus #3.

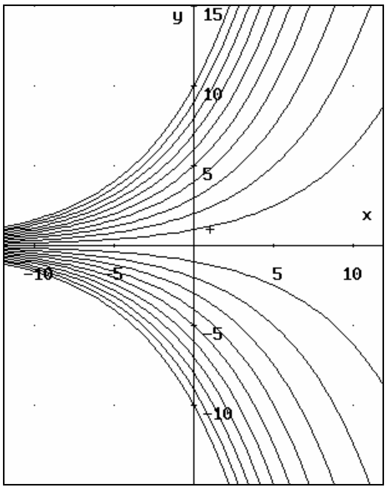


Abb. 2.12: Variieren von c bei a = 1.2

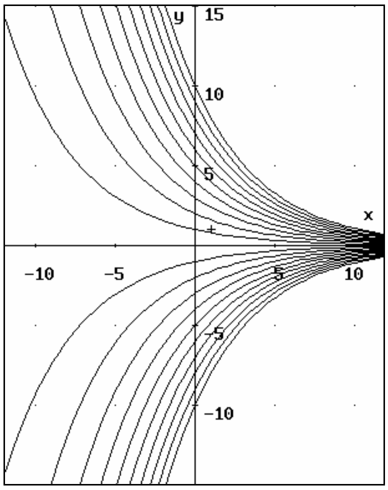


Abb. 2.13: Variieren von c bei a=0.8

Die Übersetzung der Basis 1.2 in eine e-Potenz läßt sich leicht nachvollziehen.

```
                 λ
#4:   1.2 = ê                  User
                 ┌ 5 ┐
#5:   λ = - LN│───│       Solve(#4)
                 └ 6 ┘
#6:   λ = 0.182321      Approx(#5)
```

Ersetzt man den Parameter *c* durch dieselben Werte und wählt die Basis 0.8, ensteht der VECTOR-Befehl #7.

```
#7:  VECTOR([y = c·0.8^x], c, -10, 10)                    User
```

Die Funktionen werden mit **approX** #7 erzeugt und gezeichnet (Abb. 2.14).

Der Faktor c gibt die y-Koordinate für $x = 0$ an, also einen 'Startwert' y_0. Des weiteren zeigen sich bei negativem c die an der x-Achse gespiegelten Funktionen zu den Wachstums- oder Zerfallsprozessen mit positivem c.

Wir können also die Funktionen $y = y_0\, a^t$ durch die Gleichung $y = y_0\, e^{\lambda t}$ darstellen, wobei $a = e^{\lambda}$ und $\lambda = \ln(a)$ ist. Ist $a > 1$, sprechen wir von unbegrenztem exponentiellen (freien) Wachstum.

Wachstum mit Beschränkung

Beispiel 2.13: Untersuchung exponentieller Annäherung an einen Gleichgewichtswert

Simuliere die Auswirkungen der Veränderungen eines Ausgangswerts auf den Graphen eines begrenzten exponentiellen Wachstums an einen vorgegebenen Sättigungswert $G = 100$. [vgl. Timischl, 1988, S.65]

Wir arbeiten mit folgenden Einstellungen:

```
#1:  [InputMode := Word, CASeMode := Sensitive]          User
```

Die allgemeine Beziehung eines beschränkten exponentiellen Wachstums wird in #2 angegeben. Es wird x als die vergangene Zeit und y als jene Variable angenommen, die den Zustand eines Systems beschreibt (z.B. Temperatur eines Körpers, Höhe eines Baums oder die Konzentration eines gelösten Stoffs in einer Zelle).

Dazu machen wir mittels Exponentialfunktion die Differenz zum Sättigungswert G immer kleiner. Die Variable y_0 wird für den Ausgangswert zum Zeitpunkt 0 verwendet.

```
                           - λ·x
#2: y = G + (y0 - G)·ê                              User
```

Mit **Manage Substitute** wird der Sättigungswert mit 100 und der Anfangswert mit 5 festgelegt. Wir wählen für λ eine positive reelle Zahl, bei dieser Untersuchung den Wert 1.

```
                                - 1·x
#3:  y = 100 + (5 - 100)·ê                          Sub(#2)
```

Die Vereinfachung des Terms liefert folgende Funktion:

```
                      -x
#4:  y = 100 - 95·ê                               Simp(#3')
```

Weitere Anfangswerte werden eingegeben ($y_0 = 50$, $y_0 = 150$ und $y_0 = 200$) und die Terme vereinfacht.

Es werden also Startwerte y_0 einerseits kleiner, andererseits größer als der Sättigungswert (die Grenze) gewählt.

```
                                 - 1·x
#5:  y = 100 + (50 - 100)·ê                         Sub(#2)
                      -x
#6:  y = 100 - 50·ê                               Simp(#5')
                                  - 1·x
#7:  y = 100 + (150 - 100)·ê                        Sub(#2)
                  -x
#8:  y = 50·ê    + 100                            Simp(#7')
                                  - 1·x
#9:  y = 100 + (200 - 100)·ê                        Sub(#2)
                   -x
#10: y = 100·ê    + 100                           Simp(#9')
```

Darüber hinaus wird die Gerade, der sich diese Funktionen asymptotisch nähern (der angenäherte Gleichgewichtszustand) angegeben.

```
#11: y = 100                                              User
```

Die vier Funktionen, die ein begrenztes exponentielles Wachstum beschreiben, werden mit der Geraden gezeichnet (Abb. 2.15).

Es ist zu erkennen, daß bei einem Ausgangswert $y_0 < G$ eine streng monoton wachsende Funktion mit Grenzwert 100 entsteht. Bei $y_0 > G$ erfolgt die Annäherung an G durch streng monoton fallende Funktionen.

Wenn $y_0 = G$ ist, kommt es zu einem Gleichgewichtszustand, also zu einer Geraden $y = 100$. Weitere Untersuchungen mit Veränderung des Sättigungswerts, der Startwerte und anderen $\lambda > 0$ können vorgenommen werden.

Für die weiteren Überlegungen verwenden wir die definierte Funktion B.

```
                          - λ·x
B(x) := G + (y0 - G)·ê
```

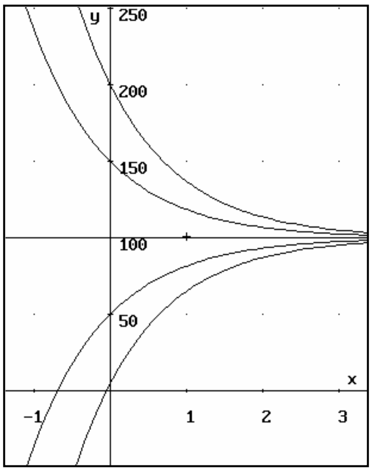


Abb. 2.14: Sättigungswert 100 und Ausgangswert variabel

Logistisches Wachstum

Beispiel 2.14: Die innere Struktur des logistischen Wachstums [vgl. Timischl 1988, S.67]

Stellt man das Wachstum eines Organismus oder einer Population in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar, so erhält man eine Wachstumskurve. Diese Wachstumskurven besitzen oft einen S-förmigen Verlauf.

a) Untersuche die logistische Funktion durch Ableitungen und gib Wendestellen an!

b) Läßt sich diese Funktion durch andere Wachstumsmodelle (unbegrenztes exponentielles Wachstun, begrenztes Wachstum, lineares Wachstum) näherungsweise beschreiben?

Zeigt das logistische Wachstum Eigenschaften, die bereits bei anderen Wachstumsprozessen untersucht wurden?

Voreinstellungen:

```
#1:  [InputMode := Word, CASeMode := Sensitive]          User
```

Wir wählen für diese Untersuchungen den Sättigungswert G mit 100 und definieren den Anfangswert der Wachstumsfunktion mit 5. Der Koeffizient λ der Basis e wird mit 1 festgelegt (vgl. Beispiel 2.17). Wir setzen also $k.G = \lambda = 1$, daraus folgt $k = 0.01$).

#2: $G := 100$ User
#3: $y0 := 5$ User

Die allgemeine Beziehung wird als logistische Funktion *L* definiert. Im Unterricht könnte eine Herleitung des logistischen Wachstums über Differentialgleichungen erfolgen (siehe wieder Beisp. 2.17). An dieser Stelle arbeiten wir bereits mit dem fertigen Modell und versuchen dieses durch bereits bekannte Modelle zu verstehen.

#4: $$L(x) := \frac{G}{1 + \left[\frac{G}{y0} - 1\right]\cdot \hat{e}^{-1\cdot x}}$$ User

Der Klammerausdruck im Nenner ist ein Maß für die Entfernung vom Endzustand. Mit der Zeit nimmt der 'Wachstumsdrang' ab und nähert sich einem Gleichgewichtszustand. Vereinfachen wird diesen Klammerausdruck, so erhalten wir

#5: $$L(x) := \frac{G}{1 + 19\cdot \hat{e}^{-x}}$$ Simp(#4')

sowie bei Vereinfachung des ganzen Terms:

#6: $$L(x) := \frac{100\cdot \hat{e}^{x}}{\hat{e}^{x} + 19}$$ Simp(#5')

Die Formeln aus #5 und #6 erhält man durch einfachen Umformungen, die jederzeit auch händisch nachvollzogen werden können. In den einzelnen Lehr- und Sachbüchern werden weitere Formeln angegeben, die die logistische Funktion beschreiben. Alle lassen sich auf eine bereits angeführte Darstellung zurückführen.

Diese Funktion *L* wird bezüglich Monotonieverhalten und Krümmungsverhalten untersucht, die auftretende Wendestelle wird grafisch nährungsweise mit dem Cursor gesucht (Abb. 2.16) und dann berechnet.

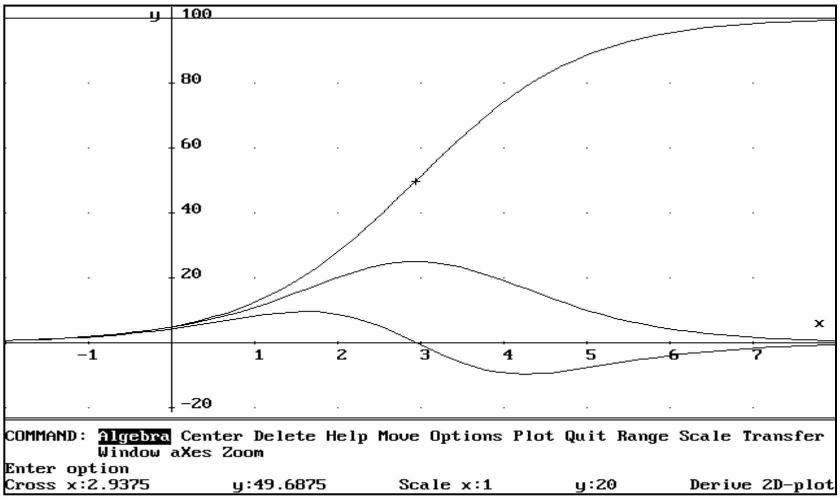


Abb. 2.15: Funktion und die Ableitungen

Die Ableitungen lassen sich direkt mit der Funktion **DIF** berechnen und mit Anfügen des Gleichheitszeichens auswerten.

$$\#7:\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^1 L(x) = \frac{1900\cdot ê^x}{(ê^x + 19)^2} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#8:\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^2 L(x) = \frac{1900\cdot ê^x\cdot(19 - ê^x)}{(ê^x + 19)^3} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Aus der Grafik wird das Intervall, in dem sich die Nullstelle der zweiten Ableitung befindet, mit [2,4] festgelegt und im *Approximate*-Mode **(Option Precision)** die Nullstelle berechnet.

```
#9:  Precision := Approximate                        User
```

$$\#10:\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^2 L(x) = 0 \qquad \text{User}$$

$$\#11:\quad \frac{1900\cdot ê^x\cdot(19 - ê^x)}{(ê^x + 19)^3} = 0 \qquad \text{Simp(\#10')}$$

```
#12: x = 2.94445                                  Solve(#10)
```

Die Lösung dieser Gleichung zeigt, daß im Zähler nur der Ausdruck $(19 - e^x)$ Null zu setzen ist (alle anderen Teile sind positiv), so daß man die Lösung $x = ln(19)$ erhält.

Dieser Sachverhalt kann im *Exact*-Modus nachgewiesen werden.

```
#13: Precision := Exact                              User

#14: x = LN(19)                                   Solve(#10)
```

Die weiteren Lösungen lauten: ∞, $-\infty$ und $\infty + î\,\pi$.

Der Funktionswert an der Wendestelle ist die Hälfte des Sättigungswerts.

```
#15: L(LN(19)) = 50                          User=Simp(User)
```

Nach Abschluß dieser Kurvendiskussion wenden wir uns Teil b) der Aufgabenstellung zu. Wir definieren eine unbegrenzte Wachstumsfunktion *E* mit dem Anfangswert 5 und dem Wachstumskoeffizienten $\lambda = 1$.

$$\#16:\quad E(x) := y0\cdot ê^x \qquad \text{User}$$

$$\#17:\quad E(x) := 5\cdot ê^x \qquad \text{Simp(\#16')}$$

Des weiteren definieren wir eine beschränkte Wachstumsfunktion *B* mit den vorgegebenen Werten für den Anfangswert und den Sättigungswert mit $\lambda = 1$.

-x

```
#18: B(x) := G + (y0 - G)·ê                                User

                                -x
#19: B(x) := 100 - 95·ê                               Simp(#18')
```

Wenn man die logistische Funktion aus #6 und die beiden Funktionen *E* und *B* in eine Grafik einzeichnet, erkennt man, daß zu Beginn die Funktion *E* eine sehr gute Näherung des Anfangsverhaltens der logistischen Funktion darstellt und die Funktion *B* ziemlich gut das Näherungsverhalten an den Sättigungswert angibt, wenn man die Funktion *B* um das Argument des Wendepunkts nach rechts verschiebt (Abb. 2.17).

```
                                - (x - LN(19))
#20: B(x) := 100 - 95·ê                                      User
```

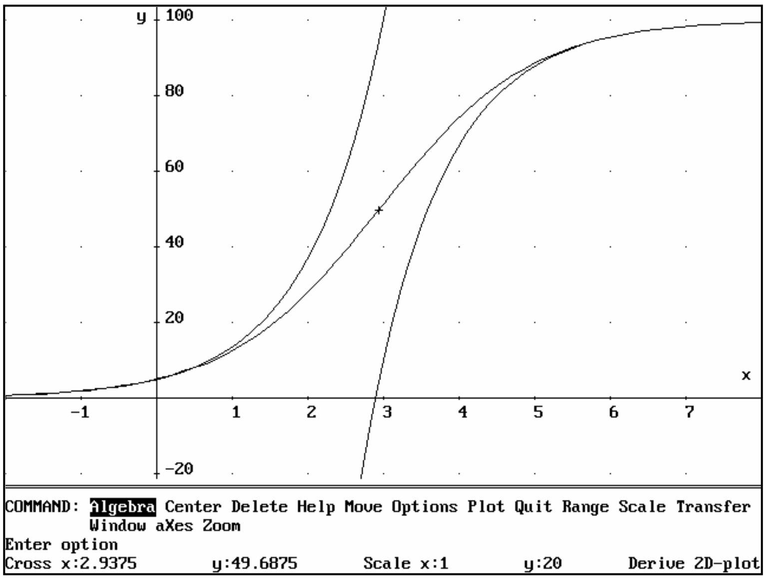


Abb. 2.16: Erster Versuch einer Approximation

Wir schließen daraus, daß sich zu Beginn die logistische Funktion *L* 'exponentiell' verhält, dann eine 'lineares' Verhalten zeigt und danach 'beschränkt exponentiell' verläuft.

Das kann auch folgendermaßen beschrieben werden: zuerst ein 'embryonales', rasant anwachsendes Stadium, dann eine 'lineare' Entwicklungsphase und später eine Endphase mit verringertem Wachstum bis zum 'Stillstand'.

Wir können nun versuchen, diesen Vorgang durch eine zusammengesetzte Funktion darzustellen. Dazu müssen wir geeignete Stellen verwenden, so daß aus der Grafik ersichtlich ist, daß bis dorthin die Funktionen als gute Näherung verwendet werden können. Wir wählen für die unbegrenzte Wachstumsfunktion *E* den Bereich $0 \le x \le 1$ und für die begrenzte Wachstumsfunktion *B* Argumente ab $2 \ln(19) - 1 \le x$. An diesen Stellen ist die Differenz der Funktionswerte der jeweiligen Näherungsfunktion und der logistischen Funktion gering. Wir haben also Intervalle für eine geeignete Approximation gefunden. Als 'Klebstoff' verwenden wir die IF-Funktion und legen den linearen Anteil vorübergehend mit dem Funktionswert der Wendestelle fest.

```
#21: LKLEB(x):=IF(x≤1,E(x),IF(2·LN(19)-1≤x,B(x),50))       User
```

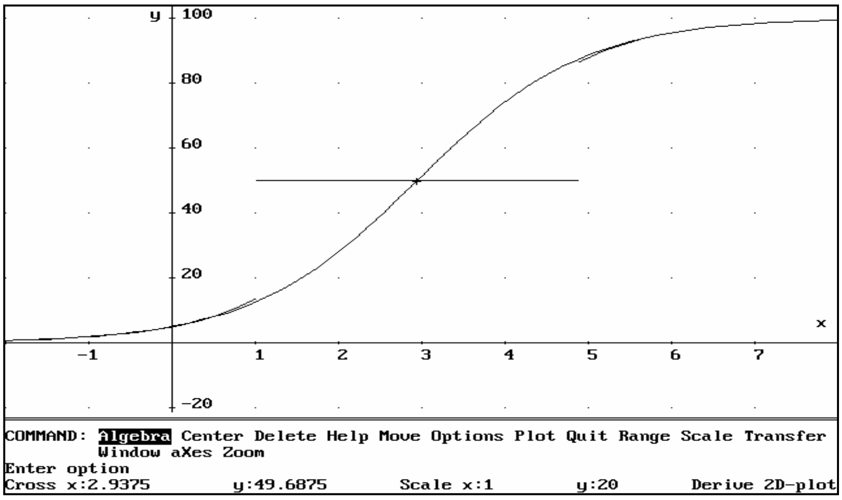


Abb. 2.17: Zweiter Versuch der Approximation

Diese stückweise zusammengesetzte Funktion wird in Abb. 2.18 über die logistische Funktion gezeichnet.

Dann 'basteln' wir den linearen Teil als 'Fortsetzung' durch das Erstellen einer Geraden, die die beiden Grenzstellen mit den Funktionen *E* und *B* verbindet. Wir lösen ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten.

```
#22: E(1) = 5·ê                                   User=Simp(User)

#23: B(2·LN(19) - 1) = 100 - 5·ê                  User=Simp(User)

#24: y = k·x + d                                            User

#25: 5·ê = k·1 + d                                      Sub(#24)

#26: 100 - 5·ê = k·(2·LN(19) - 1) + d                   Sub(#24)

#27: [5·ê = k·1 + d, 100 - 5·ê = k·(2·LN(19) - 1) + d]     User
```

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die Steigung *k* der Geraden und die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse *d*.

$$\#28: \left[d = \frac{5\cdot(ê\cdot \mathrm{LN}(19) - 10)}{\mathrm{LN}(19) - 1},\ k = \frac{5\cdot(10 - ê)}{\mathrm{LN}(19) - 1}\right] \qquad \mathrm{Solve}(\#27)$$

Wir definieren *k* und *d* und die lineare Funktion *G:*

$$\#29: k := \frac{5\cdot(10 - ê)}{\mathrm{LN}(19) - 1} \qquad \mathrm{User}$$

$$\#30: d := \frac{5\cdot(ê\cdot \mathrm{LN}(19) - 10)}{\mathrm{LN}(19) - 1} \qquad \mathrm{User}$$

```
#31: G(x) := k·x + d                                        User
```

```
                  5·(ê·LN(19) + x·(ê - 10) - 10)
#32: G(x) := ──────────────────────────────────────          Simp(User')
                           1 - LN(19)
```

Diese sehr eigenwillige Darstellung der für unser Problem benötigten Verbindungsgeraden wird als 'Klebeband' verarbeitet. Die Funktion *L* wird damit gut approximiert.

```
#33: LKLEB(x):=IF(x≤1,E(x),IF(2·LN(19)-1≤x,B(x),G(x)))    User
```

Abschließend werden die einzelnen Phasen mit Zuordnungslinien gekennzeichnet, so daß der Verlauf und die stückweise definierte Funktion besser ersichtlich werden. Wir verwenden eine Funktion ZOL für das Zeichnen von Zuordnungslinien.

```
                 ┌ x  0 ┐
#34: ZOL(x, f) := │ x  f │                                   User
                 └ 0  f ┘
```

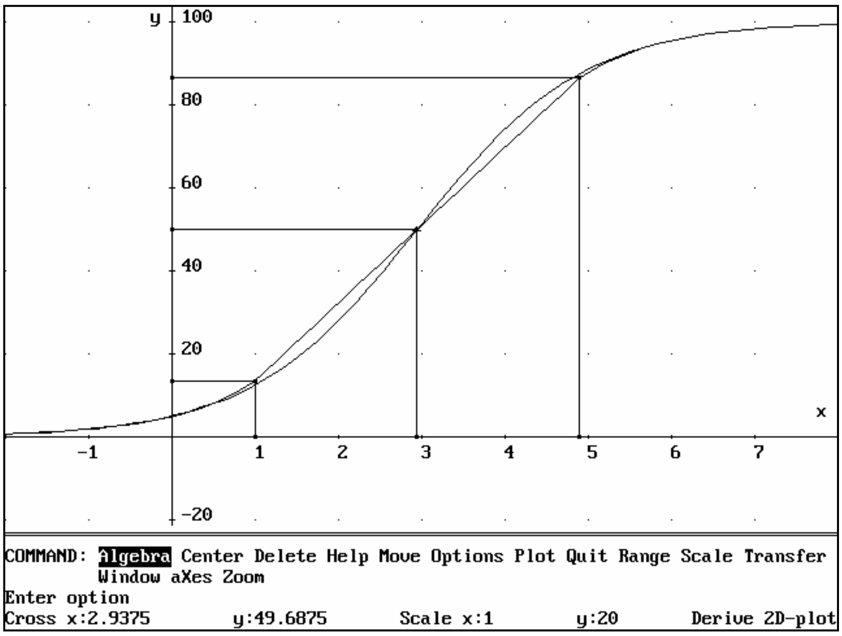


Abb. 2.18: Dritter Versuch: Nur geklebt und hält doch!

Die Auswertung dieser Funktion ZOL

```
(ZOL(1, E(1)), ZOL(LN(19), L(LN(19))),
 ZOL(2·LN(19)-1, B(2·LN(19)-1))
```

liefert die eingezeichneten Abszissen und Ordinaten an den Stellen, an denen sich das schon beschriebene typische Verhalten ändert (Abb. 2.19).

Simulation

Das CAS ist - wie wir in Beispiel 2.14 gesehen haben - auch ein Werkzeug zur Untersuchung von Wachstumsvorgängen und vernetzten Systemen. Gelingt es, die Änderung eines Zustands von einem Zeitschritt zum nächsten zu beschreiben, so lassen sich diese Zustandsänderungen iterieren, und wir können aus der lokalen Beschreibung eine globale Sicht gewinnen. Wir erhalten Einblick in das Langzeitverhalten eines Systems und können durch die Simulation einen Blick auf ein mögliches Entwicklungsszenario werfen.

Beispiel 2.17: Ein gefährdetes Gleichgewicht? [Nach Sziruscek, 1990, S.181]

Ein großer Teich bietet rund 400 Fischen Platz. Wie lange wird es dauern, bis der Teich bis zur Grenze seiner Aufnahmefähigkeit mit Fischen besetzt ist, wenn zur Zeit 20 Fische vorhanden sind? Annahmen: Das Wachstum der Fische sei proportional zum bereits vorhandenen Fischbestand und proportional zum noch vorhandenen Freiraum. Der monatliche Wachstumsfaktor (Proportionalitätsfaktor) sei $k_1=0{,}001$.

Es soll eine Simulation des Wachstums des Fischbestands erstellt werden. Wie würde sich ein geringfügig stärkeres Wachstum auswirken?

Die Entwicklung der Fischpopulation läßt sich mit Hilfe einer Differenzengleichung beschreiben:

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = k_{\Delta t} \cdot y(t) \cdot (G - y(t))$$

bzw.

$$y(t+\Delta t) = y(t) + k_{\Delta t} \cdot y(t) \cdot (G - y(t)) \cdot \Delta t$$

$y(t)$ sei hier der Fischbestand zur Zeit t, G die Wachstumsgrenze. Setzt man den Zeitraum eines Monats als eine Zeiteinheit an, also $\Delta t=1$, so ergibt sich für den monatlichen Zuwachs:

$$y(t+1) = y(t) + 0{,}001 \cdot y(t) \cdot (400 - y(t))$$

Allgemein läßt sich ein beliebiger diskreter Wachstumsvorgang mit einer Änderungsrate $r(t,y)$ somit folgendermaßen beschreiben:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + r(\,t\,,\,y(t)\,) \cdot \Delta t$$

Iterieren wir nun diese Gleichung, so ergibt sich die Langzeitentwicklung der betrachteten Fischpopulation. Dazu definieren wir im ersten Schritt die Zuwachsrate des Fischbestands (die vom Bestand y und der Zeit t abhängt) als eigenständige CA-Funktion:

```
#1:  R(t, y) := 0.001·y·(400 - y)                    User
```

Nun können wir eine zweite universell einsetzbare CA-Funktion festlegen, die mit konkreten Werten belegt, eine Tabelle für den diskreten Wachstumsvorgang liefert und die sich zudem unmittelbar plotten läßt. Iteriert wird hier eine Liste, die aus zwei Komponenten besteht: Die erste ($t+\Delta t$) beschreibt, wie man von einem Zeitpunkt zum nächsten gelangt, die zweite beschreibt, wie der Bestand y (hier an Fischen) in der Zeitdauer Δt zunimmt. Durch das Kommando ITERATES werden die derart berechneten Werte stets wieder als Ausgangswerte für t bzw. y verwendet (sz gibt die Schrittzahl an).

```
User
 #2:  WACHSTUM(t0, y0, δt, sz) :=

      ITERATES([t + δt, y + R(t,y)·δt], [t, y], [t0, y0], sz)
```

Mit den Anfangswerten $t_0 = 0$ für die Zeit und $y_0 = 20$ für den Bestand ergibt sich bei einem Zeitschritt $\Delta t = 1$ für zehn Iterationsschritte die Tabelle (#4).

```
#3:  WACHSTUM(0, 20, 1, 10)                          User
```

$$\#4: \quad \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 1 & 27.6 \\ 2 & 37.8782 \\ 3 & 51.5947 \\ 4 & 69.5706 \\ 5 & 92.5588 \\ 6 & 121.015 \\ 7 & 154.776 \\ 8 & 192.731 \\ 9 & 232.678 \\ 10 & 271.610 \end{bmatrix} \qquad \text{Approx(\#2)}$$

Für die ersten 50 Monate ergibt sich damit folgende Simulation (siehe Abb. 2.20):

```
#5:  WACHSTUM(0, 20, 1, 50)                                  User
```

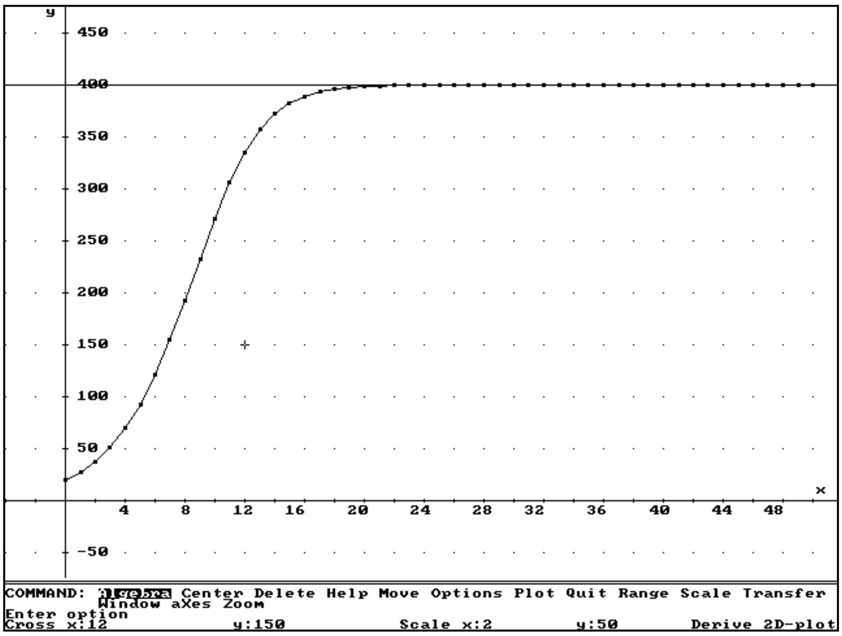


Abb.2.20: Diskretes logistisches Wachstum

Wenn wir das Wachstum etwas verstärken, indem wir herumexperimentieren und den Proportionalitätsfaktor des monatlichen Wachstums erhöhen, können wir das für das diskrete logistische Wachstum charakteristische Abdriften ins Chaos beobachten. Wir definieren dazu die Änderung des Fischbestands schrittweise neu und vereinfachen dazwischen stets Ausdruck #5, um eine plotbare Tabelle zu erhalten:

```
#6:  R(t, y) := 0.00375·y·(400 - y)                         User
#7:  R(t, y) := 0.005·y·(400 - y)                           User
#8:  R(t, y) := 0.00625·y·(400 - y)                         User
#9:  R(t, y) := 0.0075·y·(400 - y)                          User
```

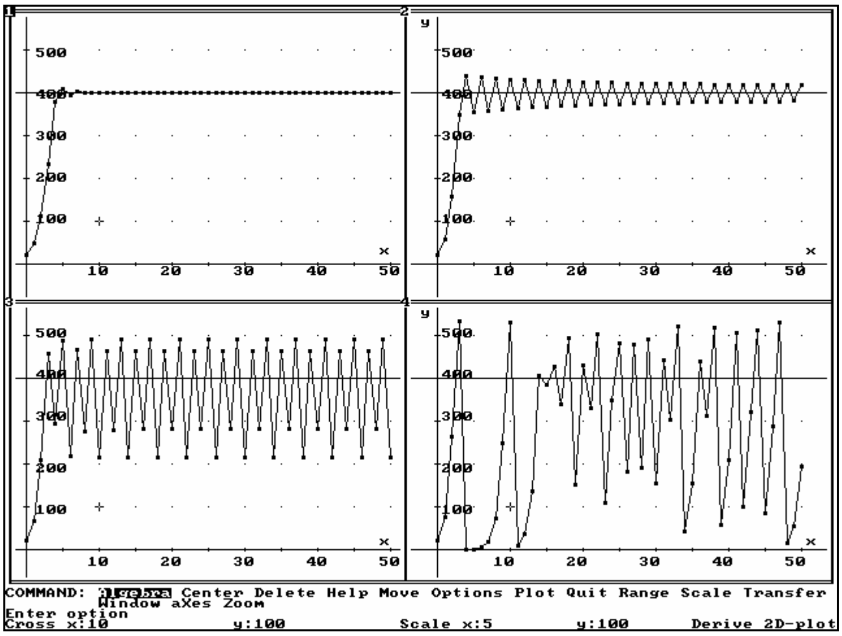


Abb. 2.19:Diskretes logistisches Wachstum und Abgleiten ins Chaos

Tritt dieser Effekt auch bei der Beschreibung dieser Wachstumssituation mit Hilfe des kontinuierlichen Modells auf? Verwenden wir zur Klärung dieser Frage die oben gewonnene Funktion für das logististische Wachstum:

$$y(t) = \frac{y_0 \cdot G}{y_0 + (G - y_0) \cdot e^{-k \cdot G \cdot t}}$$

Wenn wir nun der Reihe nach diskretes und kontinuierliches Wachstum gegenüberstellen, so können wir beobachten, daß beim Vergrößern der Wachstumsrate bei kontinuierlichem Wachstum das "Abdriften" ins Chaos nicht eintritt (Abb. 2.22).

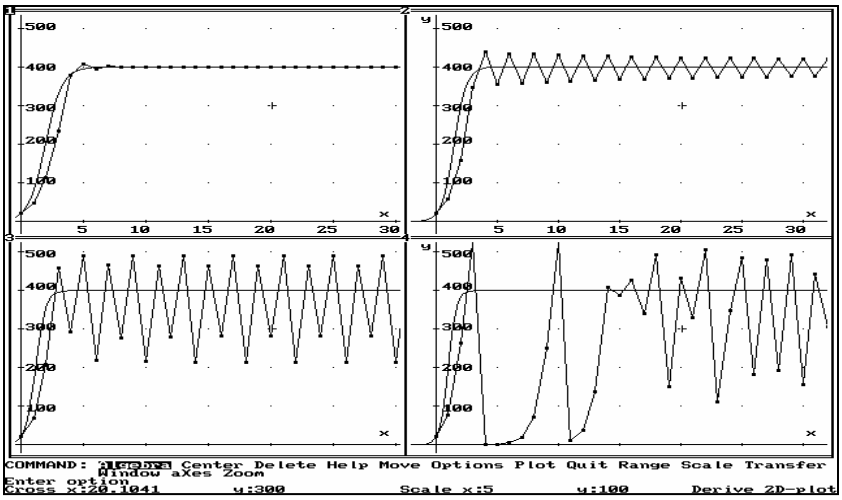


Abb. 2.20:Diskretes und kontinuierliches logistisches Wachstum

Zusammenfassend sehen wir, daß die diskrete Modellierung zu völlig anderen Ergebnissen führen kann als die kontinuierliche. Beide Arten der Modellierung sind nicht einfach zwei alternative Zugänge, sondern es gibt offenbar einen qualitativen Unterschied zwischen diskret und kontinuierlich.

2.4.2. Das CAS als Hilfsmittel beim Begriffsbildungsprozeß

Wesentlich erscheint nun der Prozeß, der zum Begriff führt, den Begriff verändert und exaktifiziert, zu sein, nicht aber das fertige Produkt 'Begriff', von dem R. Fischer sagt: "Bei fast keinem grundlegenden mathematischen Begriff gelingt es, ihn durch eine exakte Definition ganz in den Griff zu bekommen." [Fischer, 1985, S. 145]

In diesem Buch werden mehrere Beispiele angeboten, die zeigen, welche Rolle das CAS beim Begriffsbildungsprozeß spielen kann, wie etwa beim Begriff der irrationalen Zahl (Kap. 2.1.2). Eine Begriffsdeutung kann durch den Computer sehr gut vorbereitet werden.

Das folgende Beispiel soll eine Möglichkeit zeigen, mit dem CAS die Begriffe 'Linearisierung'und 'Differenzierbarkeit' zu entwickeln:

Beispiel 2.18: Differenzierbarkeit und Linearisierung

Die fundamentale Idee der Linearisierung, der Begriff der Differnzierbarkeit.

Versucht man diese zentralen Begriffe der Analysis gleich symbolisch und abstrakt an die Schüler heranzubringen, wird man viele nicht erreichen. Für einen ersten Zugang ist die Visualisierung unbedingt notwendig.

Zeichnet man den Graphen einer Polynomfunktion $V(x)$, geht im *TRACE*-Modus mit dem Cursor an irgendeine (möglichst gekrümmte) Stelle und vergrößert immer weiter, so erscheint die Funktion im Grafikfenster bei ausreichender Vergrößerung in der Umgebung des Kurvenpunkts als Gerade (siehe Abb. 2.22). Ziel dieser experimentellen Phase ist die Idee, daß eine (differenzierbare) Funktion in einer kleinen Umgebung eines Punkts durch eine Gerade ersetzt werden kann. In einer exaktifizierenden Phase gilt es dann, diese Gerade auch zu finden.

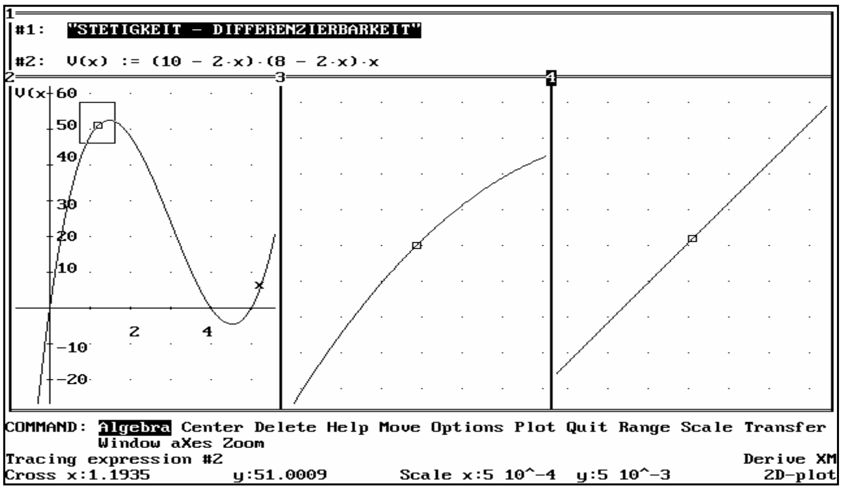


Abb. 2.21: Linearisierung

Die Skalierungen in den einzelnen Fenstern:

Fenster (2): x:=1;y:=10. Fenster (3): x:=0.05;y:=0.5. Fenster (4): x:=0.0005;y:=0.005.

Daß diese Idee der Linearisierung nicht bei jeder beliebigen Funktion an jeder Stelle funktioniert, kann man an Hand einer Betragsfunktion untersuchen (siehe Abb. 2.23). Am besten nimmt man gleich $|V(x)|$ und wandert mit dem Cursor an eine 'heikle' Nullstelle. Bei noch so starker Vergrößerung wird hier keine Linearisierung zu beobachten sein. Die Betragsfunktion ist eben an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Skalierungen in den Grafikfenstern der folgenden Abbildung:

Fenster (2):x:=1;y:=10. Fenster (3):x:=0.2;y:=2. Fenster (4):x:=0.00005;y:=0.0005

Die Vergrößerung erfolgte nach der Cursorwanderung im *TRACE*-Modus mit Hilfe des **ZOOM**-Befehls.

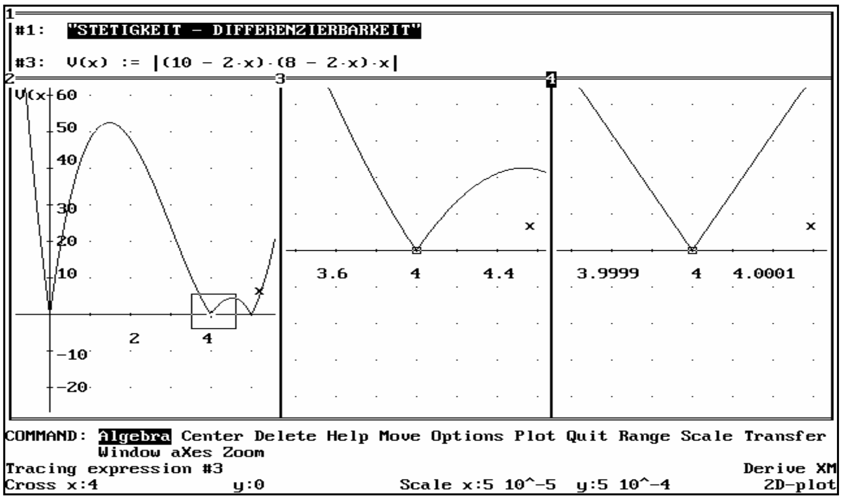


Abb. 2.22: Linearisierung nicht möglich!

Natürlich sollte vor allem in höher dotierten Schulformen damit der Begriffsbildungsprozeß nicht abgeschlossen sein. Aber mit diesem Vorverständnis müßte die Exaktifizierung durch den Lehrer leichter möglich sein.

2.5. Sprachliches Hilfsmittel

2.5.1. Hilfe beim Übersetzen von Umgangssprache in die formale Sprache der Mathematik

In einem CAS-unterstützten Unterricht gewinnen sicher Übungen zum Mathematisieren von Situationen und Übungen zum Modellbilden an Bedeutung, Mathematik wird wichtig als Sprache und Darstellungsmittel. Bisher war es üblich, Beziehungen möglichst rasch und vollständig zu formalisieren. Durch den Einsatz von CAS können auch Zwischenschritte auf diesem Weg von der Umgangssprache zum Formalismus didaktisch interessant werden.

Beispiel 2.19: Prozentrechnung. Nach [Mauve/Moos, 1994, S.20]

Umgangssprache	**->**	**Wortformel**	**->**	**formale Darstellung**
"Anteil =		Anteil =		
p Prozent vom Grundwert		p . Prozent_von . Grundwert		$A = \frac{p}{100} \cdot G$ 5

Hier wird sozusagen eine Zwischenstufe eingezogen, mit der mit DERIVE auch schon gearbeitet werden kann. Die Wortformel wird durch das CAS lebendig:

	`Prozent_von:= 1/100`	
" 15% von 250 ? "	`15 . Prozent_von . 250`	A= 250 . 0,15
		Simplify bzw. approX liefert `37.5`

Solche Wortformeln können eine wesentliche Hilfe beim Übersetzungsprozeß von Sprache in Formalismus darstellen. Genauso wichtig ist natürlich, stets darauf hinzuweisen, warum es günstig ist, die Mühen dieses Übersetzungsvorgangs auf sich zu nehmen (das Problem wird durch den Vorrat an mathematischen Techniken und Methoden besser bearbeitbar bzw. lösbar, ökonomischer Aspekt der Mathematik). Natürlich sollte dieses Ziel - eine möglichst effiziente Berechnung (rechte Spalte im Beispiel) - nicht aus dem Auge verloren werden. Insofern kann die Wortformel aber auch nur eine didaktisches Hilfsmittel, ein Übergangszustand sein.

Beispiel 2.20: Prozentrechnen 'leicht gemacht'. Nach einer Idee von [Josef Böhm, 1995]

Ein Lehrer zahlt monatlich 21% seines Gehalts für seine Wohnung. Nun erhöhte sich sein Monatsgehalt um 1900 Schilling, so daß die Miete nur noch 19% des (neuen) Gehalts ausmacht. Berechne, wie hoch das ursprüngliche Gehalt war! Wie hoch ist die Miete?

```
                             1
#1:  prozent_von :=  ───────                          User
                           100
User
#2:  21·prozent_von·gehalt = 19·prozent_von·(gehalt + 1900)

#3:  gehalt = 18050                                Solve(#2)

#4:  miete = 18·prozent_von·18050                       User

#5:  miete = 3249                                   Simp(#4)
```

Solche Wortformeln ('Wortmodelle') können neben Zinsaufgaben für die verschiedensten Typen von Textaufgaben (= 'verkürzte Modellbildungsprozesse') erstellt werden. Wesentlich ist, daß der Schüler erstens mit der betrachteten Situation etwas anfangen kann. Dies ist oft bei Bewegungs-, Mischungs- oder Leistungsaufgaben deswegen nicht der Fall, weil dem Schüler z.B. der Leistungsbegriff selbst nicht klar ist. Zweitens soll der Schüler mit der betrachteten Situation umgehen können. Hier sind die verwendeten Wortvariablen eventuell hilfreich, weil man dem umgangssprachlichen Text noch näher ist, aber (mit DERIVE) auch schon richtig damit rechnen kann.

Beim Übersetzungsvorgang darf man aber auch nicht Beispiele wie "auf 1 Professor kommen 6 Studenten" (Rosnick-Clement-Phänomen, nach [Fischer/Malle, 1985]) außer acht lassen, wo der Weg von der Sprache zur Formel leicht auf das falsche Gleis (nämlich $1P = 6S$!) führt. Hier können verschiedene andere Formulierungen in der Umgangssprache (z.B. etwa "das sechsfache der Anzahl der Professoren ist gleich der Anzahl der Studenten") bzw. Plausiblitätsüberlegungen weiterhelfen.

2.5.2. Bereitstellung neuer Sprachelemente

Die Sprache der Mathematik besteht aus vielen verschiedenen Konstrukten: Zahlen, Operatoren, Termen, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen, Vektoren, Matrizen, logischen Ausdrücken und Algorithmen, um einige bekannte zu nennen. All diese Sprachelemente helfen uns, Probleme zu beschreiben, bei denen Mathematik irgendwie nützlich sein kann. Ist es einmal gelungen, ein Problem zu mathematisieren, so steht ein ungeheurer Vorrat an Fertigkeiten, Techniken, Methoden und Kalkülen bereit, der uns in der Problembearbeitung weiterhelfen und uns einer Lösung näherbringen kann. CAS können in diesem Zusammenhang als kompakte und interaktive Sammlungen solchen Vorratswissens betrachtet werden. Und sie stellen auch eine neue Art von Objekten zur mathematischen Beschreibung von Sachverhalten bereit, die in der Literatur noch keinen einheitlichen Namen gefunden haben, oft werden sie nur als CA-Funktionen bezeichnet. Wir wollen sie hier Objekte nennen.

Beispiel 2.21: Ein Objekt als Baustein der Sprache Mathematik

Mittels CAS sollen verschiedenste Aspekte des Objekts/Begriffs "Kreis" erschlossen werden.

Wir definieren das Objekt KREIS, indem wir ihm die Kreisgleichung zuweisen:

```
                                  2           2    2
#1:  KREIS(x, y, m, n, r) := (x - m)  + (y - n)  = r      User
```

Objekte entstehen im CAS durch/über den Zuweisungsoperator (:=). Sie haben die Eigenschaft, sich in verschiedene Darstellungsebenen 'projizieren' zu lassen. Die wichtigsten dieser Ebenen sind die grafische (ikonische), die numerische, die symbolische und die logische Ebene.

```
#2:  "Projektionen des Objekts:"                          User
```

a) Projektion in die grafische Ebene (**Plot Plot**):

```
#3:  KREIS(x, y, 0, 2, 2)                                 User
```

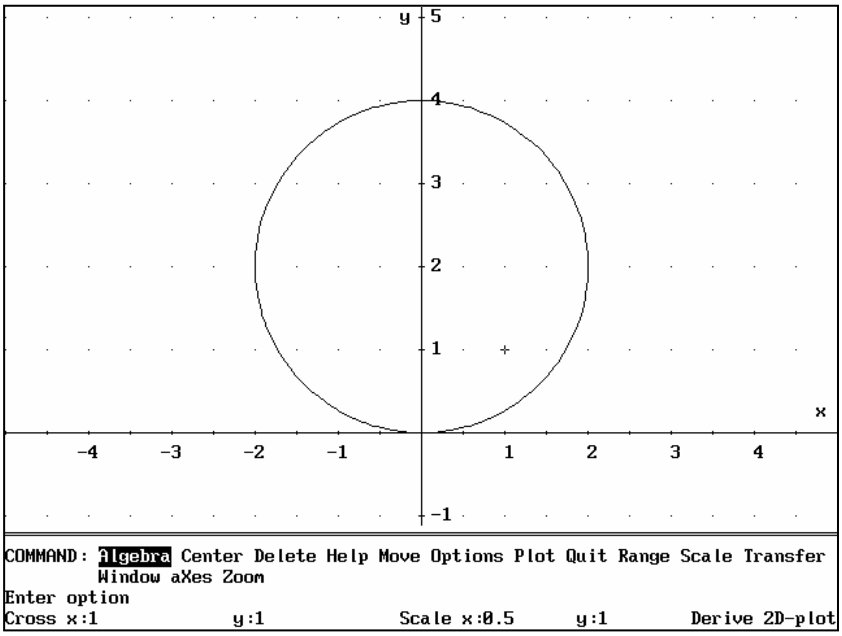


Abb. 2.23:Objekt Kreis projiziert in die Graphikebene

b) Projektion in die symbolisch-algebraische Ebene:

#3: KREIS(x, y, 0, 2, 2) User

#4: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ Simp(#3)

Die folgende Projektion in die symbolisch-algebraische Ebene liefert die Mittelpunkte aller Kreise, die den Punkt P(0/4) als Element besitzen:

#5: KREIS(0, 4, m, n, 2) User

#6: $m^2 + (n - 4)^2 = 4$ Approx(#5)

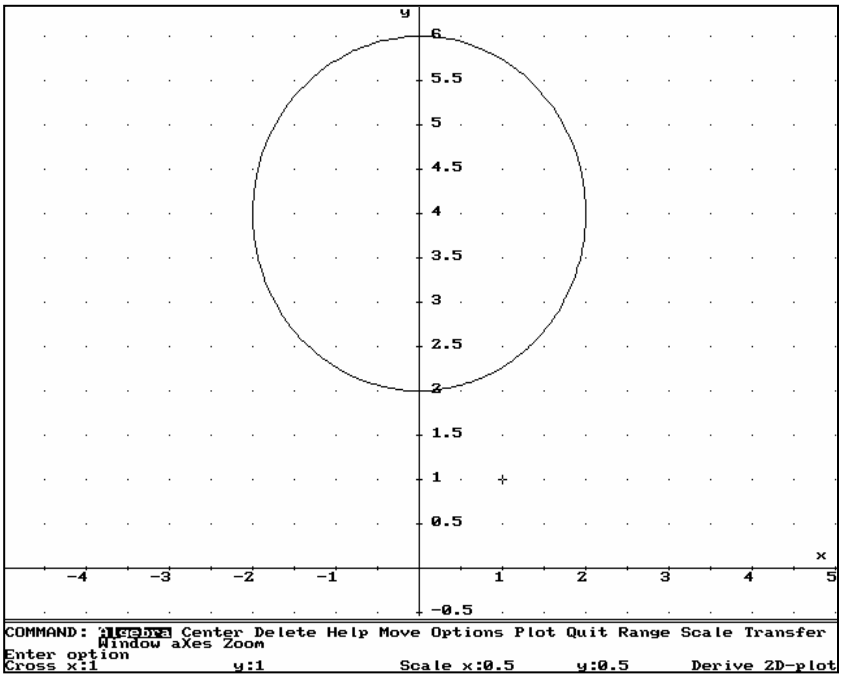


Abb. 2.24: Mittelpunkte aller Kreise

Eine weitere Projektion in die symbolisch-algebraische Ebene:

#7: $\text{KREIS}(x, y, a, 2\cdot b - c, (u - v)^2)$ User

Simp(#7)

$x^2 - 2\cdot a\cdot x + y^2 + 2\cdot y\cdot(c - 2\cdot b) + a^2 + (2\cdot b - c)^2 = (u - v)^4$

Wir können unser Kreis-Objekt auch differenzieren:

#8: Y(x) := User

#9: $\frac{d}{dx}\text{KREIS}(x, Y(x), 0, 2, 2)$ User

#10: $\left[\frac{d}{dx}Y(x)\right]\cdot(2\cdot Y(x) - 4) + 2\cdot x = 0$ Approx(#9)

#11: $\left[\frac{d}{dx}Y(x)\right]\cdot(2\cdot Y(x) - 4) = - 2\cdot x$ Simp(User)

#12: $\frac{d}{dx}Y(x) = \frac{x}{2 - Y(x)}$ Simp(User)

c) Projektion in die numerische Ebene:

#13: SOLVE(KREIS(x, y, 0, 2, 2), y) User

#14: $\left[y = \sqrt{(4 - 1^2)} + 2, y = 2 - \sqrt{(4 - 1^2)}\right]$ Sub(#13)

#15: [y = 3.73205, y = 0.267949] Approx(#14)

d) Projektion in die logische Ebene:

Liegt der Punkt P(2/1) am Kreis?

#16: KREIS(2, 1, 0, 2, 2) User

#17: 5 = 4 Simp(#16)

Wir erhalten eine falsche Aussage, da P(2/1) nicht die Kreisgleichung erfüllt, bei Q (0 /4) ist dies anders:

#18: KREIS(0, 4, 0, 2, 2) User

#19: 4 = 4 Simp(#17)

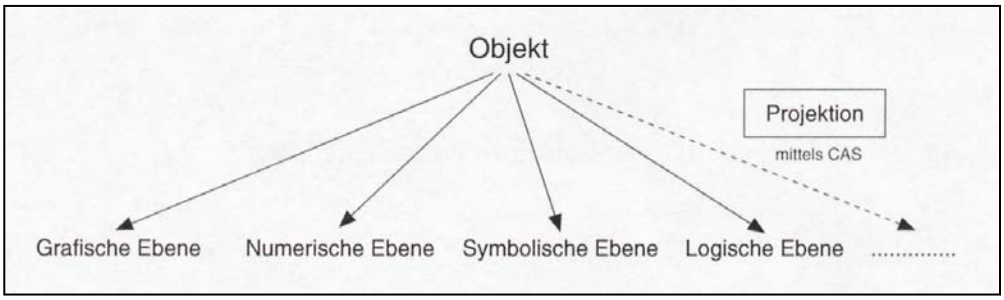


Abb. 2.25:Projektionen eines mathematischen Objekts

Das wesentliche an solchen neuen mathematischen Sprachobjekten, die durch das CAS zur Verfügung gestellt werden, besser: mit Hilfe des CAS durch den Benutzer generiert werden, ist die Möglichkeit mit Begriffen (wie eben dem Begriff 'Kreis') auf eine neue Art zu operieren. All diese vorgestellten Projektionen sind nur verschiedene Ausprägungen ein und desselben Objekts, die miteinander korrespondieren. Damit werden dem Schüler auch vielfältige Aspekte eines Begriffs leichter zugänglich. Was hier noch wichtig ist: Man wird auf neue Ideen kommen, es eröffnen sich Ansätze einer neuen Betrachtungsweise mathematischer Objekte.

Programmtechnische Anmerkungen:

Anmerkung 1:

Sehr oft treten am Beginn eines Arbeitsfiles Zeilen wie

```
#1:  Precision:=Exact
#2:  Notation:=Rational
```

auf. Dies sind Programmvoreinstellungen, die mit dem Hauptmenüpunkt **Option** gesetzt werden. Solche Voreinstellungen kann man platzsparend in eine Liste zusammenfassen:

```
#1:  [Precision := Exact, Notation := Rational]
```

Weitere Hinweise zu diesen Voreinstellungen finden sich in Kap. 5.2.3, "Unterrichtsvorbereitungen und Arbeitsunterlagen".

Anmerkung 2:

ITERATES(u,x,x0,n) wird mit vier Parametern aufgerufen:

1.Parameter: zu iterierender Term — 2.Parameter: 'Laufvariable'

3.Parameter: Startwert — 4.Parameter: Anzahl der Iterationsschritte

Beispiel: F(x):= Leerfunktion

`ITERATES(F(x),x,a,3)` liefert eine Liste mit vier Werten

`[a,F(a),F(F(a)),F(F(F(a)))]`

ITERATE(u,x,x0,n) liefert bei gleicher Syntax nur den letzten Wert

Anmerkung 3:

PRIME(n) ist eine logische Funktion, die überprüft, ob n eine Primzahl ist, NEXT_PRIME(n) liefert die nächste Primzahl, die größer als n ist.

Anmerkung 4:

ABS(z) liefert den Absolutbetrag der komplexen Zahl (= Abstand zwischen z und dem Ursprung in der komplexen Zahlenebene).

Die Eingabe von ABS(*a*+î .*b*) wird in der Form |*a* + î · *b*| dargestellt und zu

√(a² + b²) ausgewertet.

PHASE(z) liefert den Phasenwinkel des Arguments *z*, wobei (bei Einstellung im Gradmaß) gilt:

$-90° < \text{PHASE(z)} \leq 90°$

Noch ein Hinweis: Die imaginäre Einheit i wird über **ALT**+i eingegeben.

Anmerkung 5:

DSOLVE1 ist Teil der Hilfsdatei ODE1.MTH (Ordinary Differential Equations) und kann als Utility-File geladen werden. Hilfsdateien sind Sammlungen von Funktionsdefinitionen (im informatischen bzw. Ca-Sinn) und Variablenzuweisungen. Zur Lösung von Differentialgleichungen stehen in DERIVE standardgemäß die Zusatzdateien ODE1.MTH (Differentialgleichungen 1.Ordnung), ODE2.MTH (Differentialgleichungen 2.Ordnung) und ODE_APPR.MTH (Näherungsmethoden für Differentialgleichungen) zur Verfügung.

Anmerkung 6:

SUM(Term(i),i,m,n) liefert die Summe über alle Summanden der Gestalt `Term(i)`, wobei i von der unteren Grenze *m* bis zur oberen *n* läuft. Zum Beispiel (Die Grenzen müssen aber nicht endlich sein):

```
100
 Σ  k = 5050
k=1
 ∞    1
 Σ   ───   = 1
n=1    2
      n
```

Es kann auch über eine Liste von Werten summiert werden:

```
   2
Σ(i  , i, [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17]) = 666
```

*Anmerkung 7***:**

VECTOR(u,k,a,b) wird mit vier Parametern aufgerufen. Dieser Befehl entspricht einer Zählschleife, die von a bis b läuft und ihr Ergebnis in Form einer Liste liefert.

1.Parameter: Ausdruck (meist von k abhängig) 2.Parameter: 'Laufindex'

3.Parameter: untere Grenze 4.Parameter: obere Grenze

Beispiel: VECTOR(k^2,k,1,3) = [1,4,9]

Anstelle der Grenzen für den 'Laufindex' kann auch eine Liste verwendet werden.

Beispiel: VECTOR(k^2,k,[1,4,9]) = [1,16,81]

Anmerkung 8:

SOLVE(u,x) wird mit zwei Parametern aufgerufen und löst Gleichungen exakt.

1.Parameter: Gleichung/Term der mit 0 verglichen wird 2.Parameter: Lösungsvariable

Beispiel: SOLVE(x^2-4,x) = [x=-2,x=2]

SOLVE(u,x,a,b) löst Gleichungen im einem vorgegebenen Intervall [*a,b*] im Näherungsmodus und liefert die erste gefundene Lösung.

Beispiel: SOLVE(x^2-4,x,1,3) = [x=2]

Anmerkung 9:
Bei der Definition von MITTEL(i) wird der Befehl SUB verwendet, der es gestattet, im CAS einen Index zu verwenden. SUB ist eigentlich ein Operator, mit dem man über den Index ein Element aus einem Vektor (Liste) oder einer Matrix herausgreifen kann.

Die Eingabe von ["ene","mene","mu"] SUB 2 führt zu

$$[\text{"ene"},\text{"mene"},\text{"mu"}]_2 = \text{"mene"}$$

Anmerkung 10:
DIF(u,x,n) wird mit drei Parametern aufgerufen:

1. Parameter: Funktionsterm

2. Parameter: Ableitungsvariable

3. Parameter: Ordnung der Ableitung

Beispiel: DIF(F(x),x,2) liefert dann beim Vereinfachen den Term der 2.Ableitung

Anmerkung 11:
IF(u,r,s,t) hat vier Parameter.

1. Parameter: Bedingung(en) - logischer Ausdruck

2. Parameter: Anweisung 1 - Then-Zweig

3. Parameter: Anweisung 2 - Else-Zweig

4. Parameter: Anweisung 3 - Unknown-Zweig

Der Else- und Unknown-Zweig können entfallen. Jede Anweisung kann wieder ein IF enthalten. Damit lassen sich verschachtelte Verzweigungen aufbauen.

IF((0<x<3,x^2,2x) liefert in [0,3] die Parabelwerte, ansonsten Werte der Geraden 2 x.

Dieser Ausdruck läßt sich sofort graphisch darstellen.

3. Der Weg in die Mathematik mit Computeralgebra-Systemen

Beschäftigt man sich mit der Geschichte der Mathematik oder mit Arbeiten von Wissenschaftstheoretikern, wie Popper oder Lakatos, so findet man immer wieder sehr dynamische Modelle von Wissenschaft im allgemeinen und speziell von Mathematik [vgl. Lakatos, 1982]. Laut Popper ist die Entwicklung von Wissenschaft ein asymptotischer Prozeß: Sie kommt im Laufe ihrer Geschichte der 'Wahrheit' immer näher, ohne sie jemals zu erreichen. Poppers heuristische Regel, 'Erfinde Vermutungen, die höheren empirischen Gehalt besitzen als ihre Vorläufer', kann auch für didaktische Konzepte des Mathematikunterrichts eine brauchbare Regel sein. Lakatos beschreibt die Entwicklung von Wissenschaft als eine Konkurrenz fortschreitender Forschungsprogramme, die an die Stelle degenerierender treten.

Wenn man dazu noch Piagets These akzeptiert, daß die Genese von Wissen in den Wissenschaften und im Individuum nach den gleichen Mechanismen erfolgt [Wittmann, 1981, S.59], so führt dies zu einem sehr dynamischen Modell für das Lernen von Mathematik.

Man kann sich das Vordringen in eine Wissenschaft als einen spralförmigen Weg vorstellen. Wittmann spezifiziert bei der Beschreibung des Spiralprinzips [Wittmann, 1981, S 9] drei Ebenen:

(1) Unterrichten auf einer naiven Basis

(2) Unterrichten auf einer intuitiven Basis

(3) Unterrichten auf einer systematischen Basis

3.1. Die Kreativitätsspirale

Eine sehr anschauliche Darstellung dieses *Wegs in die Mathematik* stammt von Bruno Buchberger [Buchberger, 1993]. Seine Überlegungen gehen davon aus, wie sich Mathematik als Wissenschaft entwickelt hat, und auch er kommt zum Modell der Spirale. Wir nennen sie nach ihrem Schöpfer die *Buchbergersche Kreativitätsspirale*. Die Phasen, die bei ihm durchlaufen werden, sehen etwas anders aus als bei Wittmann, die Verwandtschaft ist aber deutlich erkennbar - letztlich eine Realisierung der oben zitierten Piagetschen These.

Uns erscheint die Buchbergersche Spirale eine anschauliche Leitlinie für ein Konzept des Mathematiklernens zu sein. Vor allem aber beschreibt dieses Modell besonders gut den Weg des computerunterstützten Lernens.

Die Antriebskraft, die die Bewegung auf der Spirale in Gang setzt und aufrechterhält, ist entweder Wissensgewinnung, also Begriffe zu entwickeln, Theoreme zu formulieren und zu beweisen, oder das Lösen von Problemen. In der heutigen Bildungsdiskussion hat man oft den Eindruck, als handle es sich um ein Gegensatzpaar: "Weniger Wissenserwerb, dafür mehr Schlüsselqualifikationen, wie etwa Problemlösefähigkeit, Teamfähigkeit usw." wird immer wieder gefordert. Dabei handelt es sich eher um die zwei Seiten einer Medaille: Um Probleme lösen zu können, muß man auch das nötige Wissen haben oder erwerben. Und schließlich sollte ja Wissenserwerb auch nicht nur das Speichern von Daten und Fakten sein, die auf Knopfdruck unreflektiert abgerufen werden können, sondern ein Vernetzen mit schon gefestigtem Wissen, das Absichern durch Begründen und Beweisen und ein verstehendes Nutzen dieses Wissens. Kurz gesagt: Wissenserwerb verlangt auch Problemlösefähigkeit.

3.1.1. Die Buchbergersche Kreativitätsspirale

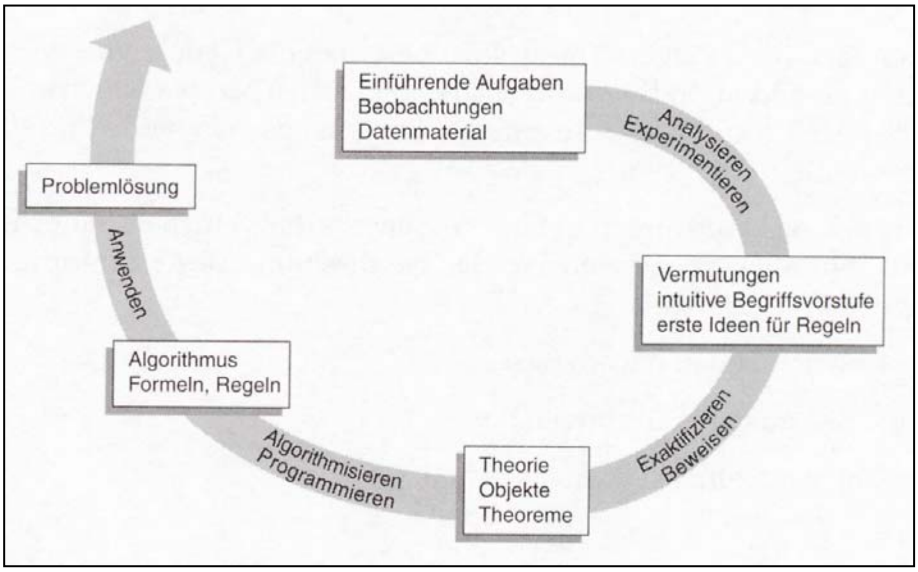


Abb.3.1: Buchbergersche Kreativitätsspirale

Ausgangspunkt eines Spiraldurchlaufs sind Beobachtungen, Datenmaterial oder Probleme, zu deren Lösung die Entwicklung von Algorithmen nötig ist oder neue Begriffe geschaffen werden müssen.

Durch Analysieren, Experimentieren oder allgemeiner durch heuristische Strategien werden Vermutungen gefunden, Sätze formuliert und erste Beweisideen gesucht.

Durch Beweisen und Begründen, also durch Exaktzifizieren erreicht man die nächste Station auf der Spirale: Theoreme und Sätze, die nun als gesichert angesehen werden.

Nun gilt es, gestützt auf das erworbene Wissen, Algorithmen oder Programme zu entwikeln, die für die Problemlösung notwendig sind. Testen und Festigen des entwickelten Algorithmus durch Üben gehört auch zu dieser Phase.

Mit dem nächsten Schritt wird der Spiraldurchlauf abgeschlossen. Die erworbenen Kenntnisse und Strategien werden beim Lösen des Ausgangsproblems oder verwandter Probleme angewendet.

Bei Auftreten neuer Probleme kann es passieren, daß neues Wissen notwendig ist, neue Algorithmen entwickelt werden müssen - neue Schleifen werden durchlaufen.

Spiralförmig bewegt sich also der Lernende, die Erfahrungen früherer Spiraldurchläufe nutzend, immer weiter in die Mathematik hinein. Natürlich wird es in der Unterrichtsrealität manchmal nötig sein, von diesem für die Mathematik als Wissenschaft charakteristischen Weg abzuweichen.

3.1.2. Die Kreativitätsspirale in der Unterrichtspraxis

Wie schon an einigen Stellen diese Buchs ausgeführt, ist die Schulmathematik immer wieder Modetrends ausgesetzt. Man denke nur an die New-Math-Bewegung in den siebziger Jahren oder an die Gegenströmung, die durch das genetische Konzept beziehungsweise durch stärkere Anwendungsorientierung gekennzeichnet ist. Ein weiterer Einfluß kommt von der Zahl der zur Verfügung stehenden Wochenstunden und von der Forderung verschiedenster Instituitionen nach neuen, aktuellen Lerninhalten. Nicht zuletzt - das ist ja Thema dieses Buchs - sind es die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel, die den Weg der Lernenden in die Mathematik beeinflussen.

Betrachtet man, auch unter Berücksichtigung der altersgemäßen Behandlung der Lerninhalte, die Buchbergersche Kreativitätsspirale, so stellt man fest, daß in der Schulmathematik häufig je nach Modetrend, Inhalt, Alter der Schüler und Medium die Spirale mehr oder weniger abgeändert wird.

Solche 'Abweichungen' von der Kreativitätsspirale im Bereich des Analysisunterrichts hat M. Kronfellner von der Technischen Universität Wien untersucht. Vieles, was er in der Analysis konstatierte, kann aber auch auf andere Bereiche des Mathematikunterrichts übertragen werden.

Folgende Abweichungen sind zu beobachten, oder könnten bei Nutzung des Computers auftreten:

Es wird entweder die heuristische oder die exakte Phase stärker betont.

(1) Die *New-Math-Spirale*:

In der New-Math-Zeit lag der Schwerpunkt beim Wissenserwerb im Bereich der exaktifizierenden Phase. Der Anwendungsaspekt, insbesondere Anwendungen aus der Erfahrungswelt der Schüler, hatte nur geringe Bedeutung. Oft wurde die heuristische Phase bei Vorgehen nach einem axiomatischen Konzept vollkommen weggelassen. So wurden etwa in einem Schulbuch der siebziger Jahre zum Thema Analysis 39 Definitionen und 65 Sätze vor dem ersten Anwendungsbeispiel gezählt.

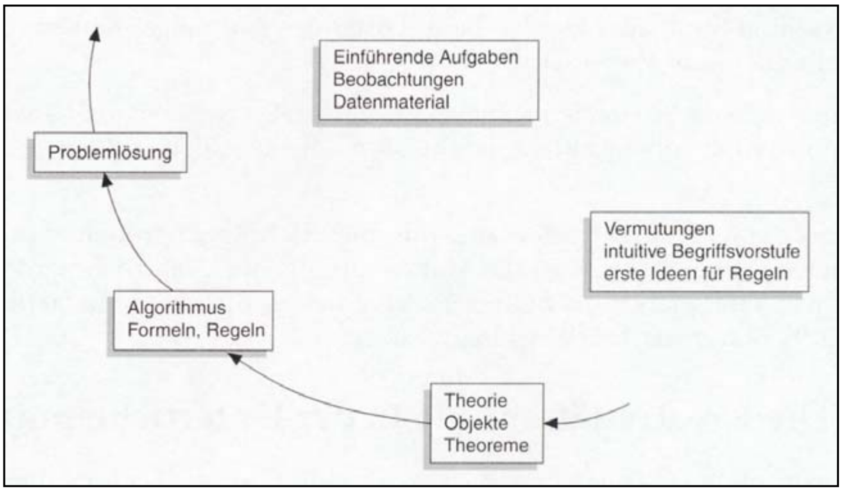


Abb. 3.26: Die New-Math-Spirale

(2) Die *Rechenfertigkeitsschleife*:

Im traditionellen Mathematikunterricht liegt der Schwerpunkt der Schülertätigkeiten sehr stark bei Kalkülfertigkeiten. Lehrer- und lehrplanabhängig wurde der Herleitung der Algorithmen und der Anwendung in der Praxis machmal mehr, eher aber weniger Raum gewidmet. Der wesentlichste Teil der Unterrichtszeit wurde für das Einüben von Fertigkeiten beim Operieren mit den Algorithmen verwendet, die Anwendung von Rezepten dominierte gegenüber dem Weg zu den Rezepten. In der Grafik der Kreativitätsspirale könnte dies durch Nebenspiralen beim neuen Algorithmus veranschaulicht werden

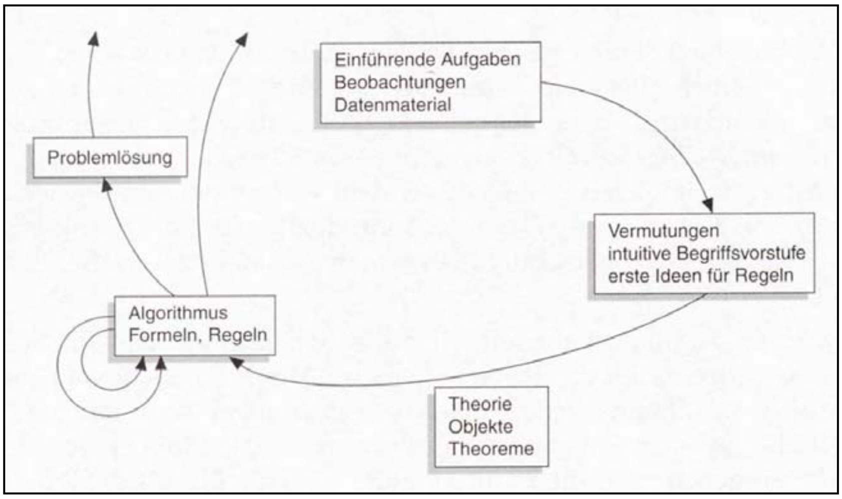


Abb. 3.27: Die Rechenfertigkeitsspirale

(3) Die *genetische Spirale*:

In der genetischen Zeit dagegen betont man besonders den naiven bzw. intuitiven Zugang zu neuen Problemen oder Begriffen. Die nächsten Phasen wären: Hinführen zu strengeren ganzheitlichen Überlegungen, Standpunktsverlagerung (d.h. auch Abstraktion vom Anlaßproblem) - also eigentlich ein Weg gemäß der Buchbergerschen Spirale. Problemlösen steht mehr im Mittelpunkt, der Wissenserwerb ergibt sich notwendigerweise aus dem Probleme.

Wie so oft bei Gegenbewegungen gibt es auch hier überzogene Ausprägungen. Man begnügt sich mit naiven Deutungen von Begriffen oder mit dem Plausibelmachen von Algorithmen, vergißt aber die Einbettung in größere ganzheitliche Problemkontexte und die theoretische Absicherung.

Ein möglicher didaktischer Ansatz wäre eine Doppelschleife: Intuitiver Zugang - intuitiv erarbeiteter Algorithmus - Anwenden dieses Algorithmus - Hinterfragen - Absichern der Vermutung in der exaktifizierenden Phase erst im zweiten Schleifendurchlauf. Im Sinne von Wittmann würde das bedeuten: Erster Schleifendurchlauf: Lernen auf intuitiver Basis. Zweiter Schleifendurchlauf: Lernen auf systematischer Basis.

Eine wirkliche Realisation des genetischen Prinzips wäre nur dann gegeben, wenn sowohl die intuitive als auch die systematische Schleife durchlaufen würde.

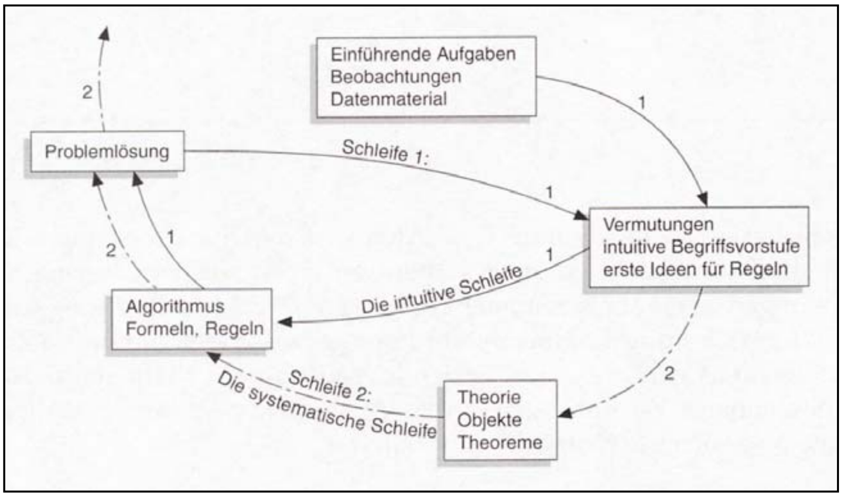


Abb. 3.28: Die genetische Spirale

(4) Die *CAS-unterstütze Spirale*:

Das CAS bietet dabei die Chance, alle Phasen der Kreativitätsspirale zu durchlaufen - natürlich altersgemäß und den Zielen der Schulform entsprechend. Manchmal wird dieser Weg entsprechend der Buchbergerschen Spirale gewählt werden - auch 'CAS-Spirale 1' genannt (Abb. 3.1). Oder aber man entscheidet sich für den zweimaligen Schleifendurchlauf wie bei der genetischen Spirale - 'CAS-Spirale 2' (Abb. 3.4). Das CAS kann dazu beitragen, daß *Wissenserwerb und Problemlösen* gleichberechtigt nebeneinander, oder noch besser füreinander da sind.

CAS würden zumindest theoretisch die Möglichkeit bieten, im Sinne eines Black Box-Konzepts auf das Beherrschen von Algorithmen zu verzichten. Man könnte also in der heuristischen Phase zu Vermutungen kommen, die Phase der theoretischen Absicherung von Algorithmen und das Einüben von Rechenfertigkeiten umgehen und unter Nutzung des CAS als Black Box sich sofort den Anwendungen zuwenden.

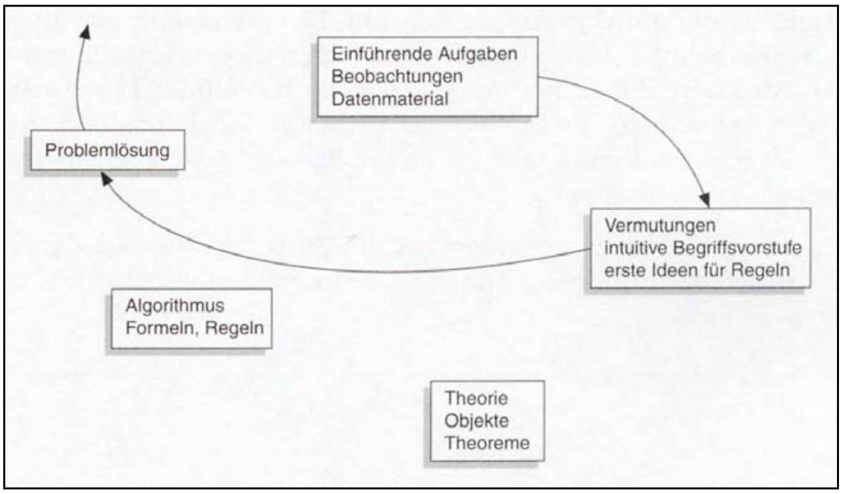


Abb. 3.29: Die 'negative' CAS-Spirale

Aus dem bisherigen sollte deutlich geworden sein, daß die weder unser Ansatz für den Mathematikunterricht ist, noch halten wir einen solchen Weg nach unseren Untersuchungen für gangbar. Erstens gibt es keine Modellbildungskompetenz ohne Strukturerkennungskompetenz und eine gewisse elementare Kalkülkompetenz, und zweitens gehört es zum Erziehungsauftrag des Mathematikunterrichts, intuitiv gewonnene Vermutungen durch Absicherung in der exaktifizierenden Phase auf eine gesicherte Grundlage zu stellen.

Es wird auch in der CAS-Zeit je nach Schulart, Lernzielschwerpunkt oder Alter manchmal notwendig sein, sich mit einer naiven Begriffsvorstufe zu begnügen oder einen Algorithmus nur plausibel zu machen. Zumindest sollte die exaktifizierende Phase thematisiert werden, etwa unter der Devise: "Wenn schon nicht beweisen, dann wenigstens Beweis- oder Begründungsbedürfnis wecken". Im Sinne des Black Box/White Box-Prinzips (siehe Kapitel 4.2) wird ein Teil der Spirale vielleicht auch in der Gegenrichtung durchlaufen. Wesentlich ist, daß dem Lehrer bei der Planung des Unterrichts die einzelnen Stationen der Spirale bewußt sind und daß er möglichst oft versucht, alle Phasen zu berücksichtigen. Es ist unserer Ansicht nach besser statt zu vielen zu hektisch durchlaufenen Spiralen weniger, aber dafür bewußt durchlaufene Spiralen zu planen.

Ein solches Konzept entspricht viel eher dem Bildungsauftrag des Faches Mathematik. Im Lehrplan des Faches Mathematik in Österreich [Leitner, 1991, S.29-S.31] heißt es bei der Bildungs- und Lehraufgabe unter anderem:

"Die Schüler sollen ein Bild der Mathematik gewinnen, das Verfahrens-, Problem-, Anwendungs- und Theorieaspekte ausgewogen repräsentiert.

Die Schüler sollen ihr mathematisches Wissen und Können in verschiedenen Bereichen, insbesondere in solchen, die zur Lebens- und Wissenswelt Bezug haben, anwenden können.

Folgende Lernziele sind anzustreben: Argumentieren und exaktes Arbeiten: Darstellen und Interpretieren; produktives geistiges Arbeiten; kritisches Denken."

Thema dieses Buchs ist, zu zeigen, daß dieser Bildungsauftrag mit Unterstützung von CAS leichter und besser zu realisieren ist.

Beim Durchlaufen einer Schleife der Kreativitätsspirale kann man *3 wichtige Tätigkeitsbereiche* im Lernprozeß unterscheiden, wobei natürlich nicht immer eine scharfe Trennung möglich ist:

Phase (1) *Die heuristische, experimentelle Phase*

Entwickeln von Vermutungen, Formulieren von Hypothesen, Entwikeln von Beweis- und Lösungsstrategien, Entwickeln naiver Begriffsvorstellungen usw.

Phase (2) *Die exaktifizierende Phase*

Absichern der Vermutungen, Beweisen der Hypothesen, Programmieren (inklusive Testen), Exaktifizierung von Begriffen usw.

Phase (3) *Die Anwendungsphase*

Nutzen der in Phase (1) und in Phase (2) entwickelten Begriffe und Algorithmen beim Problemlösen: Modellbilden, Operieren, Interpretieren.

Wesentlich ist dabei nicht Reihenfolge. Insbesondere die Phasen (2) und (3) können auchin umgekehrter Reihenfolge oder parallel durchlaufen werden.

3.2. Phase 1: Heuristische, experimentelle Phase

Im Lexikon liest man beim Begriff Heuristik: "Findungskunst, Lehre von den Wegen zur Gewinnung wissenschaftlicher Erkenntnis"

Schon der Titel des vorigen Kapitels "Weg in die Mathematik" soll ausdrücken, daß es nicht um jene 'fertige Mathematik' geht, die Studenten häufig an der Universität erleben, sondern um Mathematik *in statu nascendi*. Am Anfang neuer mathematischer Entwicklungen standen aber nie ein Axiomensystem und Theoreme, die nach den Gesetzen der mathematischen Logik zu beweisen sind. Kennzeichnend für den Einstieg in eine solche mathematische Schleife ist immer wieder eine heuristische Phase.

Im Unterricht sollte diese für den Lernprozeß so wichtige Phase mehr als bisher berücksichtigt werden. Der Schüler soll nicht immer sofort einen eindeutigen Weg vorgegeben bekommen, den er an der Hand des Lehrers zu gehen hat oder auf dem er vielleicht sogar größtenteils getragen wird. Er soll auch dazu angehalten werden, Wege auszuprobieren und sich für Wege zu entscheiden. Nicht nur das, was am Ende des Wegs steht - also das Rezept - ist wichtig, sondern die Wegfindungskunst.

Mit Mathematik verbindet man immer die Methode des logisch deduktiven Schließens. Das Gewinnen von Einsichten, das Finden der Komponenten für das logische Schließen erfolgt aber meist nicht nach den Gesetzen der zweiwertigen Logik.

Charakteristisch für diese Phase sind:

-Plausibles, induktives Schließen

-Experimentelles Arbeiten (systematisches Probieren)

-Versuch - Irrtumsmethode

Ziel dieser Phase ist:

-Finden einer Vermutung oder einer Deutung

-Entwickeln von Problemlösestrategien

Wenn wir aber die Absicht haben, daß der Schüler selbst zu Vermutungen kommt und Problemlösestrategien entwickelt, und nicht nur das mathematische Ergebnis, sondern die Strategie zum Gegenstand seines Denkens macht, muß er sich dieses Wissen aktiv erwerben.

Comenius sagt: "Am besten lehrt man eine Tätigkeit, indem man sie vorführt."

Freudenthal sagt: "Am besten lernt man eine Tätigkeit, indem man sie ausführt."

Wir sagen: "Wenn der Schüler den Weg in die Mathematik selber gehen soll, darf er die Tätigkeit vor der Ausführung nicht vorgeführt bekommen."

Daß der heuristischen Phase des Mathematiklernens in diesem Buch so breiter Raum gewidmet wird, ist mit einem Ergebnis des österreichischen CAS-Projektes erklärbar: Das CAS ermöglicht vielfach erst echtes Experimentieren und fördert damit in besonderer Weise den Erwerb heuristischer Strategien.

Gerade beim Arbeiten mit dem CAS erkennt der Schüler sehr schnell: Experimentieren heißt Beobachten unter kontrollierten Bedingungen. Zielloses Probieren bringt selten Erfolg.

Ausgangspunkt für Tätigkeiten in dieser Phase: Ein Problem, experimentelles Material, Daten.

Typische Denk- und Arbeitsweisen bei der Problemanalyse sind plausibles Schließen und Experimentieren. Daten müssen geordnet, Fragen präziser formuliert werden. Bei offenen Aufgaben müssen Fragen häufig erst gefunden werden.

Ziel dieser Phase: Finden einer Vermutung.

Danach wird häufig versucht, die Vermutung durch Tests zu erhärten.

In der didaktischen Literatur werden verschiedene heuristische Strategien angeführt, die typische und erfolgversprechende Denk- und Vorgangsweisen des Lernenden in dieser heuristischen Phase beschreiben. (Siehe etwa Polya, Fischer, Freudenthal, Papert, Van der Waerden.) Beispiele: Spezialisieren, Generalisieren, Analogisieren, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten usw. [Fischer, 1985, S. 205-220]

Wir wollen hier einige Regeln - erläutert an Beispielen - anbieten, die besonders auf den Einsatz des Computers abgestimmt sind:

3.2.1. Heuristische Regeln für das Arbeiten mit CAS

(1) Experimentieren

Man sucht eine Vermutung durch systematisches Probieren. Ein vermutetes Modell 1 wird getestet, als brauchbar akzeptiert, verbessert oder verworfen. Im nächsten Schritt operiert man mit dem getesteten Modell oder man entwickelt ein verbessertes Modell 2, testet wieder usw. Testen bedeutet: Überprüfen, ob das vermutete Modell die Eingabebedingung erfüllt und für beliebige Eingabegrößen brauchbare Ergebnisse liefert.

Die Regeln (2) bis (6) handeln von den vielfältigen Möglichkeiten, mit Hilfe des CAS zu *testen,* um gesichertere Ergebnisse zu erzielen und besseres Verständnis zu erreichen:

(2) Mache mit Hilfe von CAS Proben machen

Numerische Proben waren auch schon mit numerischen Rechnern üblich, können aber mit dem CAS viel effektiver und rascher durchgeführt werden. Völlig neue Möglichkeiten ergeben sich aber beim algebraischen und grafischen Überprüfen der Richtigkeit und Brauchbarkeit von Ergebnissen.

(3) Definitionsbereich testen

Untersuche, ob das Modell auch in einem erweiterten Definitionsbereich gültig ist und ob es auch für Spezialfälle gilt. Eine häufige Fehlerquelle ist die Entwicklung eines Modells in einem engeren Definitionsbereich und der falsche Schluß, die Gültigkeit wäre dann auch für größrere Bereiche gegeben.

(4) Spezialfälle untersuchen

Eine typische Arbeitsweise sowohl in der Mathematik als auch in den Naturwissenschaften ist es, von einem Sonderfall ausgehend immer weiter zu generalisieren, an Sonderfällen Strategien zu entwickeln, die das Vordringen zu allgemeineren Fällen erst ermöglichen.

(5) Brauchbarkeit der Lösungen überprüfen

Überprüfe, welche Lösungen des Modells für das gestellte Problem brauchbar sind. Manchesmal bietet das mathematische Modell - insbesondere bei Lösung mit dem "gewissenhaften" CAS - mehr Lösungen an, als für das gestellte Problem gültig sind.

(6) Auswirkung von Parametern untersuchen

Untersuche die Auswirkung einzelner Parameter auf das Modell bzw. auf die Lösung. Diese Tätigkeit ist vor allem beim Interpretieren von Ergebnissen von großer Bedeutung und kann eigentlich erst mit Unterstützung des Computers realisiert werden.

Die folgenden Regeln sollen Hilfestellungen des CAS für ein besseres Verständnis und auch neue Lösungsmöglichkeiten aufzeigen.

(7) Durch schrittweises Vorgehen hinterfragen

Das CAS liefert oft direkt, also ohne Zwischenergebnisse ein Resultat. Versuche die Lösung des CAS durch schrittweises Vorgehen nachzuvollziehen ("was der Computer kann, können wir auch"). In Kapitel 4 wird diese Strategie als typische Abeitsweise beim Vorgehen nach dem didaktischen Black Box/White Box-Prinzip erkennbar.

(8) Darstellungsart wechseln

Auch im traditionellen Unterricht wurden den Schülern solche Regeln empfohlen, wie etwa die Regel in der analytischen Geometrie: "Überlege, wie du es konstruierst, dann kannst du es auch rechnen." Mit Hilfe des CAS ist dieser Wechsel der Darstellungsart besonders leicht möglich geworden. So ist z.B. bei Funktionen der Wechsel von der algebraischen zur grafischen Darstellung oder zur Tabelle rasch und ohne größere Probleme möglich.

(9) Mit Hilfe des CAS Fehler suchen

Entwickle Strategien zum Erkennen von und Umgang mit Fehlern. Verfolge mit Hilfe des CAS den Lösungsweg zurück (Debugging mit dem CAS). Im traditionellen Mathematikunterricht werden Kinder oft gehemmt, weil sie ein Lernmodell haben, in dem man etwas entweder 'richtig' oder 'falsch' macht. Dies führt vielfach - zum Teil auch durch den ständigen Druck, überprüft zu werden - zu einer Fehlervermeidungsstrategie. Wie soll aber dann ein Lehrer Therapien gegen Schülerfehler entwikeln? Es ist also für den Lernprozeß sehr wichtig, den Schülern ein Arbeitsklima anzubieten, in dem sie Fehler machen dürfen. Doch nur das Hinweisen auf Fehler seitens des Lehrers in so einer angstfreien Atmosphäre ist zu wenig. Damit passiert im Denkprozeß des Schülers noch nicht viel.

Wichtiger wäre die *aktive Fehlersuche des Schülers*. Er wird dann viel eher 'ein'- sehen und eine Korrektur seines falschen Denkmodells vornehmen, die auch Bestand hat. Wir wollen versuchen, an einigen der folgenden Beispiele aufzuzeigen, welche Hilfen das CAS den Schülern bei dieser aktiven Fehlersuche anbieten kann und wie sie eigenständige Debuggingstrategien entwikeln können.

In den folgenden Beispielen soll auch gezeigt werden, daß das CAS nicht nur beim Aufspüren und Bekämpfen von Fehlern wichtig ist, sondern auch helfen kann, Strategien zur Vermeidung von Fehlern zu entwikeln, also schon von vorneherein die Fehleranfälligkeit zu bekämpfen.

(10) Visualisieren

Eine besondere Qualität der Mathematik ist die Möglichkeit der visuellen Darstellung abstrakter Sachverhalte. Abgesehen von Freihandskizzen ist es ohne Computer sehr schwierig, Grafiken zu entwerfen. So ist ja etwa Ziel der Kurvendiskussionen in der Analysis, die wichtigsten Punkte und Eigenschaften der Funktion zu ermitteln, um den Graphen zeichnen zu können. Mit dem CAS ergibt sich der Graph in der Regel schneller und direkter als die Daten, die die Kurvendiskussion liefert. Visualisieren ist also einer der wichtigsten Beiträge des CAS für ein besseres Verständnis abstrakter Probleme. Außerdem zeigte sich bei der Beobachtung der Schüler im EDV-Raum, daß vor allem bei Partnerarbeit die visuelle Kommunikation eine wichtige Voraussetzung und Unterstützung der sprachlichen und schriftlichen Kommunikation darstellt.

(11) Zoomen

Das Angebot, Graphen zu vergrößern und zu verkleinern, sowie die Möglichkeit, den Cursor entlang eines Graphen zu bewegen, sind wichtige Bereicherungen beim Visualisieren.

(12) Simulieren

Durch den Computer wurde der Lösbarkeitsbegriff erweitert. Galten bisher Probleme als lösbar, wenn man Zahlen oder termdarstellbare Funktionen angeben konnte, gilt dank der Möglichkeiten des Computers auch die Simulation eines Prozesses (etwa auf Grund eines iterativen oder rekursiven Modells) als akzeptable Lösung. Solche Aufgaben, bei denen nur ein iteratives Modell gefunden werden konnte, waren ohne Computer kaum zu lösen. Zu dieser so wichtigen, völlig neuen Möglichkeit werden in den folgenden Kapiteln noch einige Beispiele angeboten (siehe etwa Kap. 3.5).

Beispiel 3.1: Extremwertaufgaben ohne Differentialrechnung

(Experimentieren, Visualisieren)

Von einem rechteckigen Stück Pappe mit 10 dm Länge und 8 dm Breite werden an den Ecken kongruente Quadrate ausgeschnitten. Aus dem Rest wird eine quaderförmige Schachtel gebildet. Welche Seitenlänge müssen die auszuschneidenden Quadrate haben, damit das Volumen dieser Schachtel maximal wird.

Dieses Standardbeispiel findet man in verschiedenen Lehrbüchern beim Kapitel Differentialrechnung (in Österreich in der 11. Schulstufe). Die Schüler lösen es mehr oder weniger automatisch, indem sie die erste Ableitung gleich 0 setzen und eventuell noch mit Hilfe der zweiten Ableitung das relative Maximum bestätigen. Vor lauter Rechnen verlieren sie oft das eigentliche Ziel aus den Augen, nämlich etwas zu optimieren.

Mit Hilfe des CAS kann der Schüler im Grafikfenster auf Entdeckungsreisen gehen (siehe Abb. 3.6). Ein sinnvoller Definitionsbereich kann gefunden werden, die Sinnhaftigkeit der Nullstellen der Volumsfunktion kann diskutiert werden, vor allem kann man sich aber mit dem Cursor auf die Suche nach dem Maximum machen. Dazu ist die Differentialrechnung aber gar nicht erforderlich. Solche Optimierungsaufgaben könnte man schon in der 9. Schulstufe beim Kapitel Funktionen behandeln.

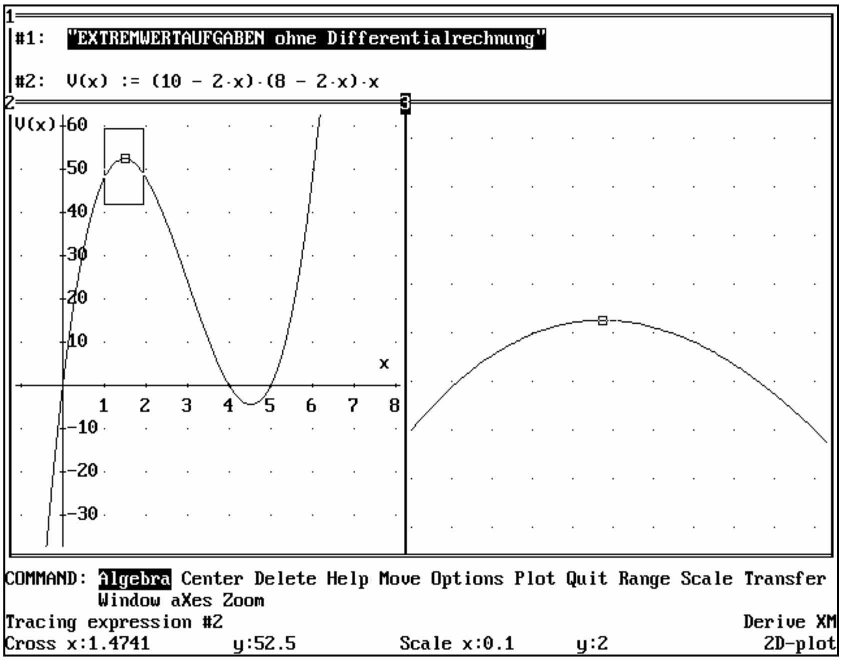


Abb. 3.30:Extremum durch Visualisieren

DERIVE bietet im *TRACE*-Modus auch die Möglichkeit, den Cursor die Kurve entlang wandern zu lassen. Mit Hilfe des Befehls **RANGE** oder **ZOOM** kann der interessante Bereich beliebig vergrößert werden, um den gesuchten Punkt möglichst genau zu finden. Dabei lernt der Schüler typische Probleme einer anwendungsorientierten Mathematik kennen, wie etwa: Bei Überprüfung der Cursorkoordinaten beobachtet man, daß der maximale Funktionswert zwischen 1,4258 und 1,5193 angezeigt wird. Die Frage ob der Mittelwert eine sinnvolle Lösung ist könnte Ausgangspunkt für eine Exaktifizierung sein. Die Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung ergibt den Wert 1,47247, wobei man natürlich noch über die Sinnhaftigkeit dieser Genauigkeit beim Schachtelbeispiel diskutieren müßte.

Beispiel 3.2: Ableitung der Sinusfunktion

(Experimentieren, Spezialfälle untersuchen, Visualisieren)

Voraussetzungen: Grenzwert für Zahlenfolgen und für reelle Funktionen. Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten. Deutung als Tangentensteigung.

Schritt 1: Untersuchung des Sonderfalls x=0. Vermutungen aus dem Graphen über die Tangentensteigung.

Es werden einige lineare homogene Funktionen getestet. Dies kann enweder durch die Eingabe mehrerer linearer Funktionen mit verschiedenen Steigungen erfolgen oder aber, wie etwa bei DERIVE, mit der VECTOR-Funktion (siehe Zeile #2 in Abb.3.7). Die Steigung k durchläuft dabei die im vorgegebenen Vektor angegebenen Zahlen 0.8, 1 und 1.2. Schon aus dem Fenster 2 und erst recht durch Zoomen im Fenster 3 ergibt sich für die Tangentensteigung die Vermutung k=1.

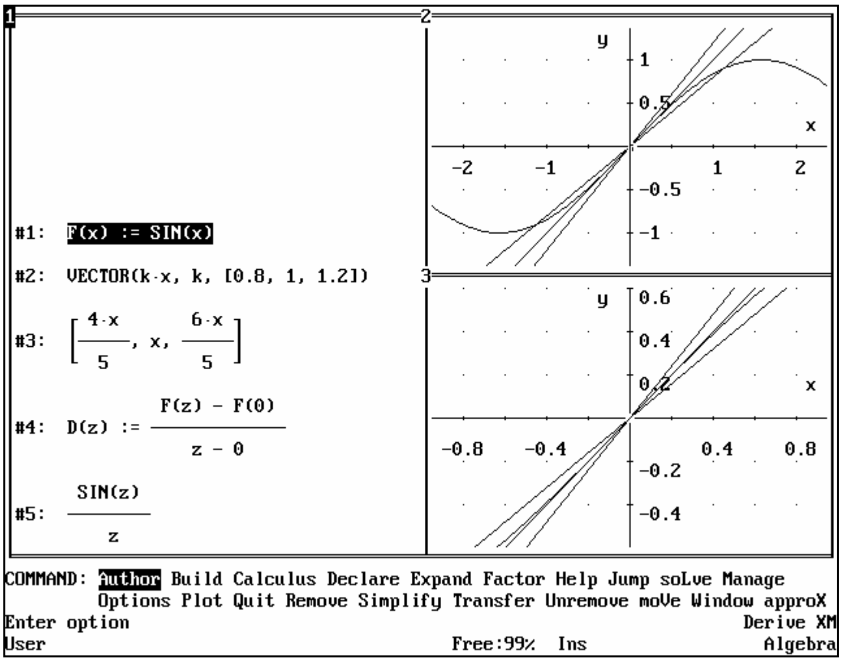


Abb. 3.31:Ableitung der Sinusfunktion

Schritt 2: Ermitteln der ersten Ableitung an der Stelle 0 als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Wie im Fenster 1 (Zeile #4) zu sehen ist, wird der Differenzenquotient an der Stelle x = 0 gebildet.

```
#4:  F(x) := SIN(x)

               F(z) - F(0)
#5:  D(z) := ─────────────
                 z - 0
```

Mit **Simplify** erhält man den entsprechenden Term:

```
      SIN(z)
#6:  ────────
        z
```

Mit den bisherigen Voraussetzungen der Schüler ist der Grenzwert nicht zu ermitteln. Entsprechend der Idee der heuristischen Phase versuchen wir nun durch Experimentieren die Vermutung zu erhärten. Wir nähern uns von beiden Seiten zuerst in diskreten Schritten.

Wieder hilft dabei die VECTOR-Funktion, um rasch und ohne Rechenaufwand zu Tabellen zu kommen.

Zuerst nähern wir uns von links:

```
#7:  VECTOR([z, D(z)], z, [-1,-0.5,-0.2,-0.1,-0.05,-0.01, 0])
```

Simplify ergibt die Wertetabelle:

```
      ┌  -1     0.841470 ┐
      │ -0.5    0.958851 │
      │ -0.2    0.993346 │
#8:   │ -0.1    0.998333 │
      │ -0.05   0.999583 │
      │ -0.01   0.999983 │
      └   0        ?     ┘
```

Analog erfolgt die Näherung von rechts:

```
#9:  VECTOR([z, D(z)], z, [1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01, 0])
```

```
      ┌   1    0.841470 ┐
      │  0.5   0.958851 │
      │  0.2   0.993346 │
#10:  │  0.1   0.998333 │
      │ 0.05   0.999583 │
      │ 0.01   0.999983 │
      └   0       ?     ┘
```

Besonders wichtig ist das Fragezeichen in Zeile #10. Aber eigentlich dürfte es die Schüler nicht überraschen, daß der Wert des Differenzenquotienten an der Stelle 0 nicht existiert.

Nun kann der Grenzwert bei Näherung von links und von rechts mit Hilfe des CAS als Black Box ermittelt werden. Dabei liefert das CAS sowohl bei Näherung von links ('0-') als auch von rechts ('0+') den Wert 1.

```
               SIN(z)
#11:  lim     ────────
     z->0-        z

#12: 1

               SIN(z)
#13:  lim     ────────
     z->0+        z

#14: 1
```

Schritt 3: Nach dem Spezialfall versucht man mit Hilfe des CAS den Grenzwert des Differenzenquotienten an einer beliebigen Stelle *x* zu ermitteln.

```
                    F(z) - F(x)
#2:  D(z, x) :=   ─────────────
                       z - x

                   SIN(z)
#3:  D(z, 0) =   ────────
                      z
```

ist der obige Sonderfall. Allgemein ergibt **Simplify**:

$$\#4: \quad \frac{\mathrm{SIN}(x) - \mathrm{SIN}(z)}{x - z}$$

Wieder nähern wir uns von links ('*x*-') und von rechts ('*x*+') und erhalten:

$$\#5: \quad \lim_{z \to x-} \frac{\mathrm{SIN}(x) - \mathrm{SIN}(z)}{x - z}$$

$$\#6: \quad \mathrm{COS}(x)$$

$$\#7: \quad \lim_{z \to x+} \frac{\mathrm{SIN}(x) - \mathrm{SIN}(z)}{x - z}$$

$$\#8: \quad \mathrm{COS}(x)$$

Schritt 4: Für den Begriffsbildungsprozeß ist die Visualisierung immer wieder von großer Bedeutung:

Man könnte im Grafikfenster noch die Beziehung zwischen der Differenzenquotientenfunktion an der Stelle $x = 0$ ($D(z,0)$) und der Ableitungsfunktion COS(x) erforschen und beobachten, daß sich in einer Umgebung von 0 $D(z,0)$ sehr gut an die Ableitungsfunktion anschmiegt (Abb. 3.8).

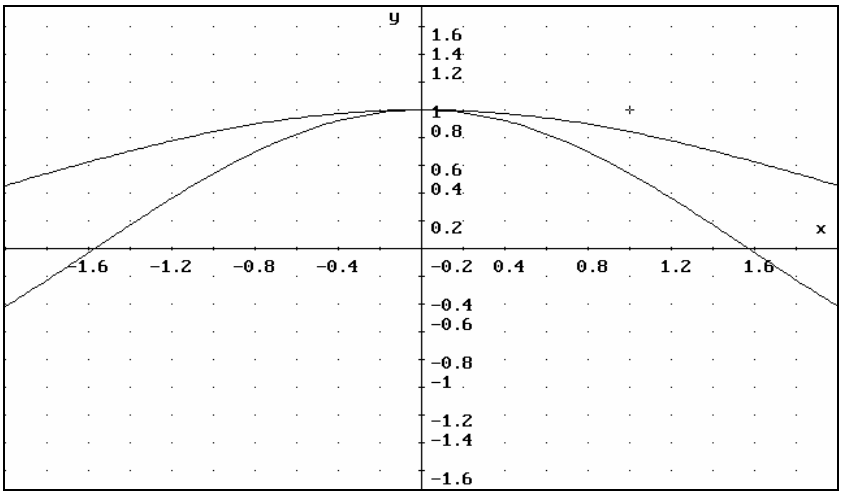


Abb. 3.32:Differenzenquotienten- und Ableitungsfunktion

Interessant für das Verständnis des Differenzenquotienten und des Differentialquotienten ist auch noch folgendes Experiment: Wenn man im *TRACE*-Modus mit dem Cursor den Graphen von $D(z,0)$ entlang wandert, ertönt an der Stelle $x = 0$ ein Piepston, die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert. Wandert man dagegen auf der Cosinuskurve, gibt es an der Stelle $x = 0$ keine Probleme. Die Diskussion zwischen den Schülern bei solchen Experimenten - oft arbeiten sie ja im EDV-Raum in Partnerarbeit - ist für den Lernprozeß viel ertragreicher als jeder noch so gute Lehrervortrag über 'stetige Fortsetzung'.

Für Schulformen mit wenig Mathematikstunden genügt unserer Meinung nach diese heuristische Phase, allerdings zumindest verbunden mit einer Diskussion über notwendige Exaktifizierungsschritte. Wenn möglich sollte in einer nachfolgenden exaktifizierenden Phase eine präzisere Herleitung auch ausgeführt werden. Nach ausreichend vielen Übungen zur Festigung einer gewissen Rechenfertigkeit, könnte das CAS als Black Box bei der Ermittlung der Ableitungen von Winkelfunktionen verwendet werden (siehe Kapitel 4.1).

$$\#9: \quad \frac{d}{dx} \mathrm{SIN}(x)$$

```
#10: COS(x)

#11: F1(x) := COS(x)
```

Für den Sonderfall ergibt sich:

```
#12: F1(0) = 1
```

Beispiel 3.3: Erforschen der Sinusfunktion

(Spezialfälle, Auswirkung von Parametern untersuchen)

Gegeben ist die Funktion F(t): = A. SIN(B.t + C). Untersuche die Auswirkung der Parameter A,B und C.

Die Untersuchung erfolgt durch Experimentieren im Grafikfenster. Entsprechend der Regel (4) geht man systematisch vor und untersucht Sonderfälle.

Schritt 1: Zuerst untersucht man etwa die Auswirkung des Parameters *B*, wobei für *A* und *C* die Werte 1 bzw. 0 eingesetzt werden.

```
#1:  F(t) := A·SIN(B·t + C)
```

Die Belegung der Parmeter mit bestimmten Werten erfolgt entweder mit **Manage Substitute** oder man gibt in der Authorzeile einen 'Zuweisungsvektor' ein.

```
#2:  [A := 1, C := 0]

#3:  SIN(B·t)
```

Mit Hilfe der VECTOR-Funktion können für B rasch verschiedene Werte eingesetzt werden. Ein direktes Plotten des entstehenden Vektors ist nicht empfehlenswert, da bei gleichzeitigem Einzeichnen aller Funktionen in einem Fenster wohl keine Eigenschaften mehr erkennbar sind. Besser ist es, jede einzelne Funktion mit SIN(t) zu vergleichen (Abb. 3.9 bis 3.14).

```
#4:  VECTOR(SIN(B·t), B, [1, 2, 3, 0.5, -1, -2, π, 2·π])
```

#5: $\left[\mathrm{SIN}(t),\ \mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \mathrm{SIN}(3\cdot t),\ \mathrm{SIN}\left[\frac{t}{2}\right],\ -\mathrm{SIN}(t),\ -\mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \mathrm{SIN}(\pi\cdot t),\ \mathrm{SIN}(2\cdot\pi\cdot t)\right]$

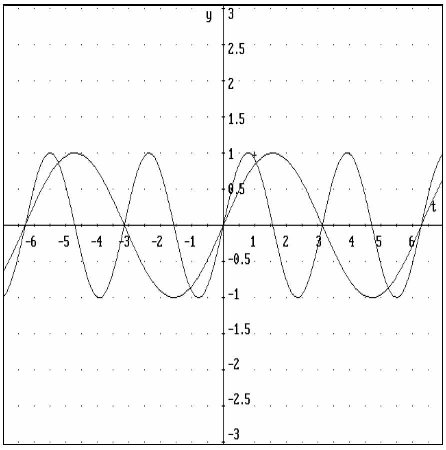


Abb. 3.33: SIN(t), SIN(2.t)

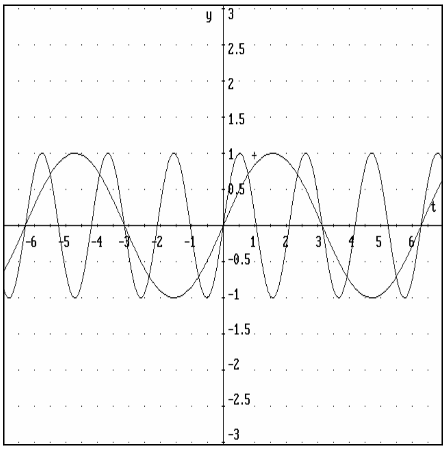


Abb. 3.34: SIN(t), SIN(3.t)

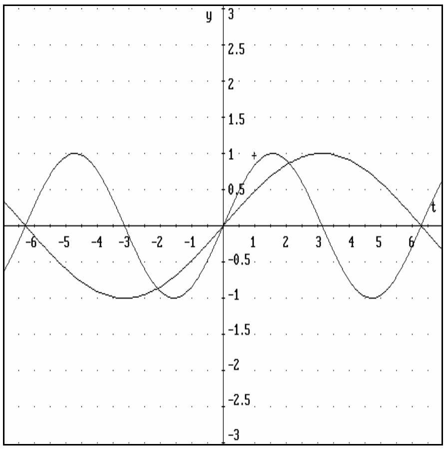


Abb. 3.35: SIN(t), SIN(t/2)

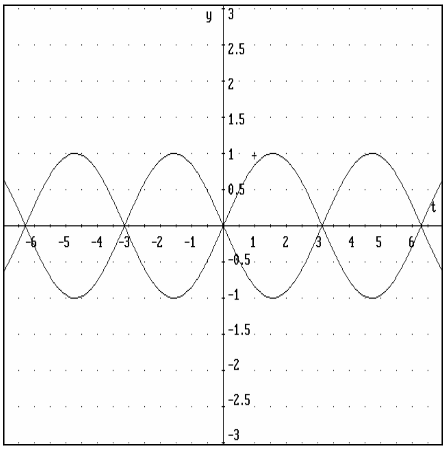


Abb. 3.36: SIN(t), SIN(-t)

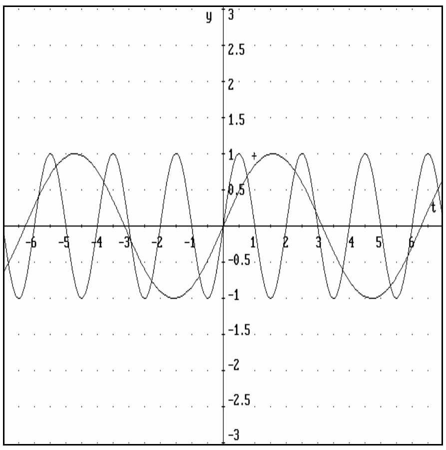


Abb. 3.37: SIN(t), SIN(π.t)

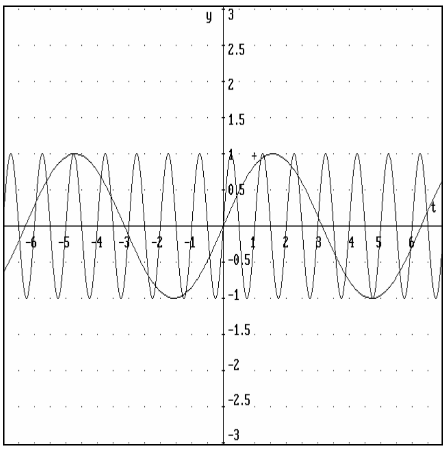


Abb. 3.38: SIN(t), SIN(2.π.t)

Bei solchen experimentellen Phasen, wo die Schüler selbsttätig am Computer 'forschen' sollen, ist es ratsam, gezielte Arbeitsaufträge, eventuell in Form von Schülerarbeitsblättern, vorzugeben und Ergebnisprotokolle zu verlangen.

Schritt 2: Nun wird der Parameter A untersucht (siehe Abb. 3.15).

```
#6:  [A := A, B := 1, C := 0]

#7:  A·SIN(t)

#8:  VECTOR(A·SIN(t), A, [1, 2, 3, 0.5, -1])

                                          SIN(t)
#9:  [SIN(t), 2·SIN(t), 3·SIN(t), ──────, - SIN(t)]
                                            2
```

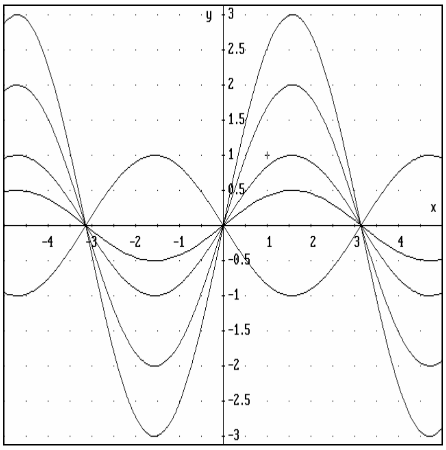


Abb. 3.39: SIN(t), 2.SIN(t)..

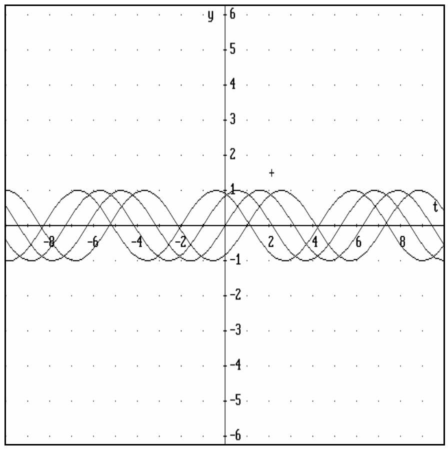


Abb. 3.40: SIN(t), SIN(t+1)..

Schritt 3: Untersuchung des Parameters C (siehe Abb. 3.16).

```
#10: [A := 1, B := 1, C := C]

#11: SIN(t + C)

#12: VECTOR(SIN(t + C), C, [0, 1, 2, -1])

#13: [SIN(t), SIN(t + 1), SIN(t + 2), SIN(t - 1)]
```

Besonders interessant ist diese experimentelle Phase für einen fächerübergreifenden Unterricht mit dem Fach Physik im Zusammenhang mit dem Kapitel '*Harmonische Schwinngungen*'.

In Physikbüchern findet man die Gleichung $y(t) = R.\mathrm{SIN}(\omega.t+\Phi)$. Für die Beschreibung des Schwingungsvorgangs sind folgende Größen von Bedeutung:

Die Elongation $y(t)$ ist der Abstand von der Ruhelage zur Zeit t.

Die Amplitude R ist der maximale Abstand von der Ruhelage.

Die Schwingungsdauer T ist die Zeit für eine volle Schwingung.

Die Frequenz f ist die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde.

Die Phasenverschiebung Φ ist die Zeitverschiebung, um die eine Schwingung früher oder später beginnt.

Ein Arbeitsauftrag in dieser Phase könnte also sein, einen Zusammenhang zwischen den Parametern *A, B* und *C* und diesen physikalischen Größen zu suchen, also experimentell zu ermitteln, daß $A = R$, $\omega = 2\pi/T$ bzw. $\omega = 2\pi f$ und $C = \Phi$ ist. Der Parameter *A* ist also gleich der Amplitude, *B* beeinflußt die Frequenz bzw. die Schwingungsdauer, und *C* ergibt die Phasenverschiebung.

Beispiel 3.4: Überlagerung von Schwingungen mit gleicher Schwingungsrichtung

Man untersucht schrittweise verschiedene Fälle, etwa die Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Frequenz. Immer wieder kann man in der experimentellen Phase mit Hilfe der Graphen zu Vermutungen kommen und dann in der exaktifizierenden Phase mit verschiedensten Modellen Formeln herleiten (trigonometrische bzw. vektorielle modelle oder mit Hilfe von komplexen Zahlen).

Wir wollen die Überlagerung zweier Schwingungen mit verschiedener Ferquenz untersuchen, wobei die Amplituden 1 und der Phasenunterschied 0 gewählt werden sollen:

$y_1 = \mathrm{SIN}(22.t)$ und $y_2 = \mathrm{SIN}(20.t)$

Überlagerung bedeutet mathematisch Addition der Funktionswerte:

$y_1 + y_2 = \mathrm{SIN}(22.t) + \mathrm{SIN}(20.t)$

In den 3 Fenstern können die Graphen verglichen werden (Abb. 3.17):

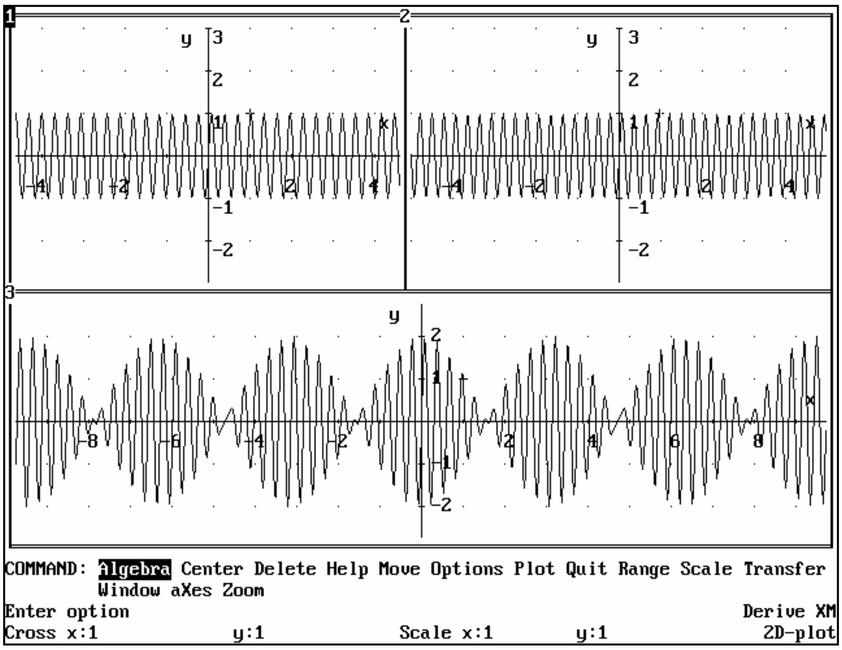


Abb. 3.41: Überlagerung von Schwingungen

Eine mögliche Interpretation wäre: Es ergibt sich eine Schwingung, deren Amplitude zwischen 0 und 2 periodisch schwankt.

Nun wird in einer exakten Phase mit Hilfe des 2. Summensatzes ein Modell entwickelt, das diesen Zustand besser beschreibt:

$$\#1: \quad \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(ß) = 2 \cdot \mathrm{SIN}\left[\frac{\alpha + ß}{2}\right] \cdot \mathrm{COS}\left[\frac{\alpha - ß}{2}\right]$$

Mit **Simplify** ist auch eine Überprüfung der Formel möglich:

$$\#2: \quad \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(ß) = \mathrm{SIN}(\alpha) + \mathrm{SIN}(ß)$$

Mit **Mangage Substitute** kann man die gegebenen Argumente einsetzen:

$$\#3: \quad \mathrm{SIN}(22t) + \mathrm{SIN}(20t) = 2 \cdot \mathrm{SIN}\left[\frac{22t+20t}{2}\right] \cdot \mathrm{COS}\left[\frac{22t-20t}{2}\right]$$

$$\#4: \quad \mathrm{SIN}(22t) + \mathrm{SIN}(20t) = 2 \cdot \mathrm{COS}(t) \cdot \mathrm{SIN}(21t)$$

Eine mögliche Deutung: Es ergibt sich eine Schwingung mit $\omega = 21$, deren Amplitude $R(t) = 2.\text{COS}(t)$ sich periodisch ändert ($\omega_R = 1$). Die Untersuchung der Graphen der einzelnen Terme und die experimentelle Ermittlung der Einhüllenden ($|2.\text{COS}(t)|$ und $-|2.\text{COS}(t)|$) erhärten diese Deutung (Abb. 3.18).

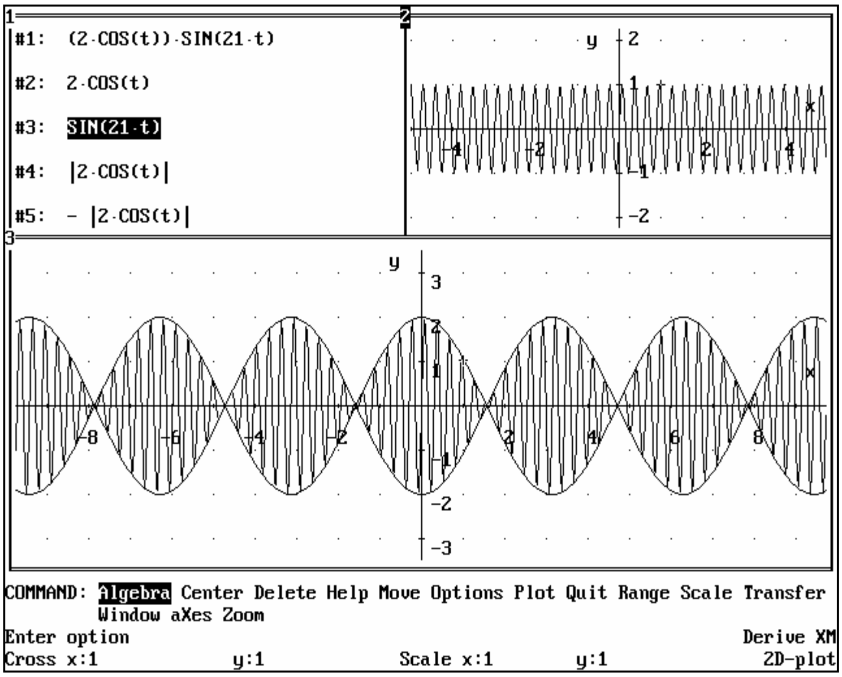


Abb. 3.42:Schwebung

Beispiel 3.5: Optimieren einer Lagerhalle

(Heuristische Regeln für das Testen, Darstellungsart wechseln)

Auf einem trapezförmigen Grundstück (Parallelseiten a und b, Höhe und gleichzeitig Länge eines Schenkels c, d.h. $a \perp c$) soll eine rechteckige Lagerhalle so errichtet werden, daß die Grundfläche der Halle möglichst groß ist.

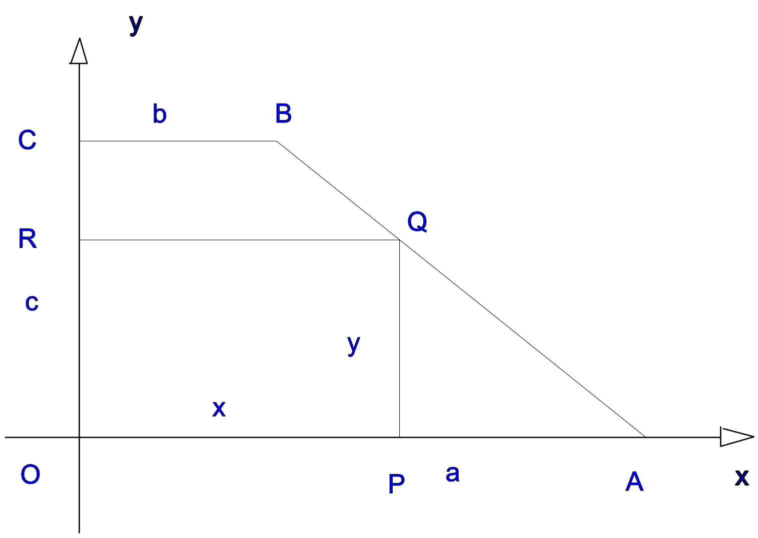


Abb. 3.43:Trapezförmiges Grundstück

Im traditionellen Mathematikunterricht wird diese Problem meist mit konkreten Maßen gestellt, und zwar häufig so, daß das mit Hilfe der Differentialrechnung ermittelte relative Extremum auch die brauchbare Lösung für das praktische Problem ist. Manchmal wird dieses Beispiel auch zum Anlaß genommen, um über Randextrema zu diskutieren.

Mit dem CAS ist es viel leichter möglich, solche Probleme allgemein zu behandeln.

```
#1:  Precision := Approximate
```

Die Zielfunktion:

$$\#2: \quad A(x, y) := x \cdot y$$

Die Nebenbedingung:

$$\#3: \quad \frac{a - b}{c} = \frac{a - x}{y}$$

$$\#4: \quad y = \frac{c \cdot (x - a)}{b - a}$$

Nach dem Auflösen der Gleichung #3 wird der Wert für *y* in die Funktion #2 eingesetzt (**Manage Substitute**):

$$\#5: \quad x \cdot \frac{c \cdot (x - a)}{b - a}$$

Die Ableitung dieser Funktion und das Nullsetzen der Ableitung übernimmt das CAS

$$\#6: \quad \frac{d}{dx} \left[x \cdot \frac{c \cdot (x - a)}{b - a} \right]$$

$$\#7: \quad \frac{c \cdot (2 \cdot x - a)}{b - a}$$

$$\#8: \quad x = \frac{a}{2}$$

Die Tatsache, daß das Rezept 'erste Ableitung gleich 0 setzen' nicht immer funktioniert, könnte bei Unterstützung durch das CAS Anlaß für das Testen verschiedener Eingangsgrößen sein. Um für beliebige Eingangsgrößen *a,b* und *c* testen zu können, müssen Länge und Breite der Halle sowie der Flächeninhalt als Funktion von *a,b,c* definiert werden. Für das Testen ist das Ausrechnen (Zeilen #11 und #13) gar nicht notwendig, sehr wohl aber sinnvoll für das Interpretieren der Testergebnisse.

$$\#9: \quad x(a, b, c) := \frac{a}{2}$$

$$\#10: \quad y(a, b, c) := \frac{c \cdot (x(a, b, c) - a)}{b - a}$$

$$\#11: \quad \frac{0.5 \cdot a \cdot c}{a - b}$$

#12: A(a, b, c) := x(a, b, c)·y(a, b, c)

$$\#13:\ \frac{a^2 \cdot c}{4 \cdot (a - b)}$$

Das Testen könnte durch Diskussion der numerischen Ergebnisse erfolgen.

#14: [a := 50, b := 20, c := 40]

Werden die Größen *a,b,c* mit Zahlen belegt, so ergibt sich bei Eingabe von *x*(*a,b,c*)= in der Authorzeile direkt:

#15: x(a, b, c) = 25

Analog erhält man:

#16: y(a, b, c) = 33.3333

#17: A(a, b, c) = 833.333

Besser ist sicher die Untersuchung der Lage der Halle bezogen auf das Grundstück im Grafikfenster. Man definiert wie in den Zeilen #18 und #19 die Matrizen 'GRUND' und 'HALLE' als Funktionen der Eingangsgrößen *a*,*b* und *c*. Nachdem die Variablen mit konkreten Zahlen belegt sind (etwa wie in #14), können die Funktionen 'GRUND' und 'HALLE' direkt im Grafikfenster, wie in Abb.3.20 zu sehen ist, veranschaulicht werden (zu beachten ist die Einstellung **Option State** *Connected*). Es werden die Punkte [*a*,0], [*b,c*] und [0,*c*] miteinander verbunden. Die übrigen Seiten liegen auf den Achsen.

$$\#18:\ GRUND(a, b, c) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\#19:\ HALLE(a, b, c) := \begin{bmatrix} x(a, b, c) & 0 \\ x(a, b, c) & y(a, b, c) \\ 0 & y(a, b, c) \end{bmatrix}$$

Entsprechend wird für die nachfolgenden Eingangsgrößen vorgegangen: Die Variablenbelegung in Zeile #20 liefert bei Unterlegen von #18 und #19 die Abb. 3.21, mit #21 erhält man Abb. 3.22.

Damit ermöglicht das CAS ein rasches, umfangreiches Testen und Interpretieren. Von den Lernzielen her gesehen ist dies sicher höherwertiger als das rezepthafte Einsetzen in eine zweite Ableitung bei einem konkreten Zahlenbeispiel.

#20: [a := 50, b := 40, c := 40]

#21: [a := 50, b := 25, c := 40]

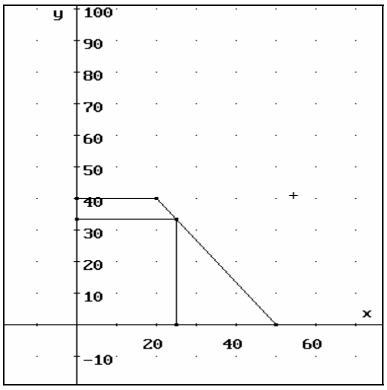


Abb. 3.44: b < a/2

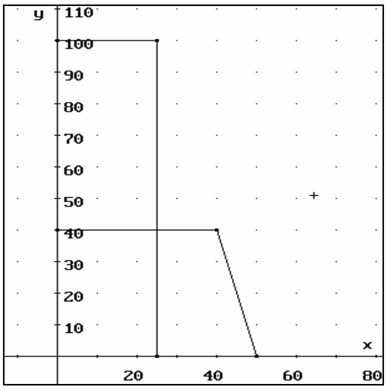


Abb. 3.45: b > a/2

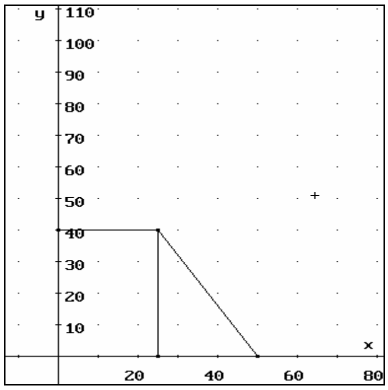


Abb. 3.46: b = a/2

Ergebnis: Das gewählte Modell liefert nur für $b \leq a/2$ eine brauchbare Lösung. Für $b > a/2$ liegt die ermittelte Halle gar nicht vollständig auf dem Grundstück.

Nun kann man natürlich auch die Brauchbarkeit des Modells für beliebige andere Eingabegrößen testen:

Modellannahme (2): b = 0

#22: [a := 50, b := 0, c := 40]

Die Visualisierung ergibt eine brauchbare Lösung innerhalb des Grundstücks (siehe Abb. 3.23).

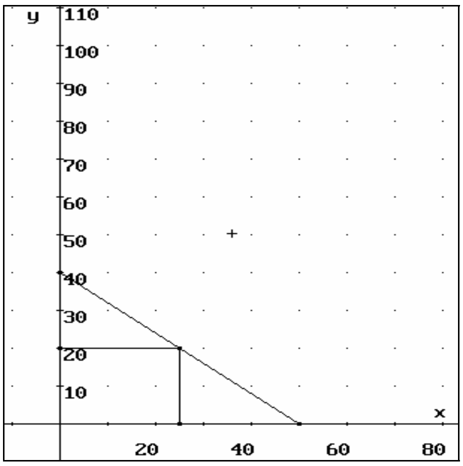


Abb. 3.47: b = 0

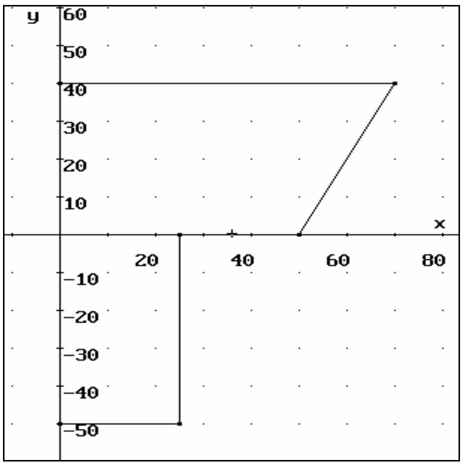


Abb. 3.48: b > a

Modellannahme (3): b > a

```
#23: [a := 50, b := 70, c := 40]
```

Hier zeigt sich überraschenderweise, daß die angebotene Halle überhaupt nicht auf dem Grundstück liegt (siehe Abb. 3.24). Die Überprüfung der Hallengröße und des Flächeninhalts bestätigt: Das gewählte Modell liefert negative Größen bei Breite und Flächeninhalt. Zum Interpretieren gehört auch die Diskussion darüber, warum dieses Modell in solchen Fällen zu sinnlosen Lösungen führt.

```
#24: x(a, b, c) = 25
```

```
#25: y(a, b, c) = -50
#26: A(a, b, c)= -1250
```

Modellannahme (4): b = a

```
#27: [a := 50, b := 50, c := 40]
```

Nun ergibt sich im Grafikfenster nur der Punkt [a/2,0]. Die Ermittlung der Hallendaten erklärt, warum.

```
#28: x(a, b, c) = 25
#29: y(a, b, c) = ±∞
#30: A(a, b, c) = ±∞
```

Die Deutung der Ergebnisse kann nun durch Interpretation der Terme $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$ und $A(a,b,c)$ für die einzelnen Modellannahmen erfolgen.

Mit dem CAS ist aber auch eine *Standpunktverlagerung* leicht möglich:

Wir betrachten die Flächeninhaltsfunktionen für die einzelnen Eingabeannahmen in Abhängigkeit von der Hallenlänge x und unter Berücksichtigung sinnvoller Definitionsbereiche.

Modellannahme (1): $b < a$ und $b \neq 0$ → Definitionsbereich: $b \leq x < a$

Modellannahme (2): $b = 0$ → Definitionsbereich: $0 < x < a$

Modellannahme (3): $b > a$ → Definitionsbereich: $a \leq x < b$

Modellannahme (4): $b = a$ → Definitionsbereich: $0 < x \leq a$

#6: $F(x) := x \cdot \dfrac{c \cdot (x - a)}{b - a}$

Die Verbindung der Punkte [b,0] und [b,$F(b)$] liefert die Intervallgrenze:

#7: $\begin{bmatrix} b & 0 \\ b & F(b) \end{bmatrix}$

Nun können die Graphen für die einzelnen Fälle wieder gezeichnet werden:

```
#8:  [a := 50, b := 20, c := 40]
#9:  [a := 50, b := 40, c := 40]
#10: [a := 50, b := 25, c := 40]
#11: [a := 50, b := 0, c := 40]
#12: [a := 50, b := 70, c := 40]
#13: [a := 50, b := 50, c := 40]
```

Die 3 Fälle mit Modellannahme (1) $b \le a$ (siehe Zeile #8, #9, #10) sind in Abb. 3.25 zusammengefaßt. Sie zeigen, daß das relative Maximum nur für $b < a/2$ innerhalb des Definitionsbereichs liegt, für $b = a/2$ am Rand und für $b > a/2$ außerhalb des Definitionsbereichs. Es muß also auch das Randextremum berücksichtigt werden.

Bei Modellannahme $b > a$ ergibt sich ein relatives Minimum mit negativem Funktionswert außerhalb des sinnvollen Definitionsbereichs (Abb. 3.26). Das Modell ist eben für diese Annahme nicht brauchbar.

Für die Modellannahme $b = 0$ liegt das relative Maximum wie erwartet genau in der Mitte des Intervalls (Abb. 3.27)

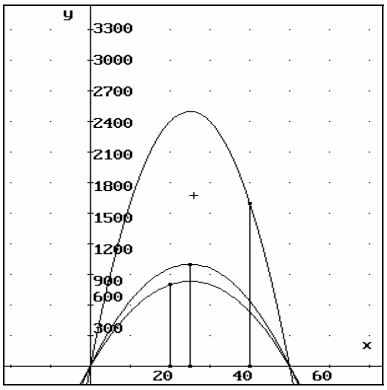


Abb. 3.49: $b \le a$

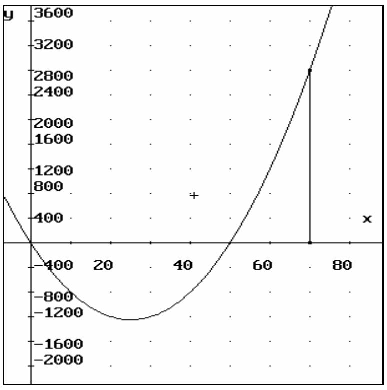


Abb. 3.50: $b > a$

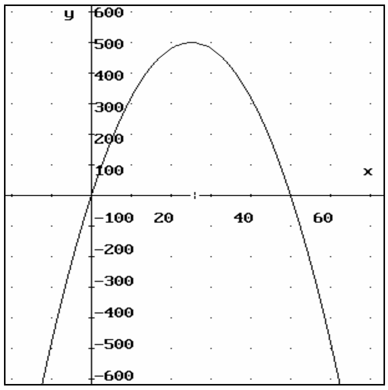


Abb. 3.51: $b = 0$

Der Graph für die Modellannahme $b = a$ läßt sich natürlich nicht zeichnen, da der Nenner 0 wird.

Beispiel 3.6: Experimentieren in der Prüfungssituation

(Experimentieren, Testen, Fehler suchen)

Bei einer Schularbeit (Klassenarbeit) in einer 7.Schulstufe hatten die Schüler die Aufgabe, auf vier verschiedenen Wegen eine Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Trapezes herzuleiten. Auf einem Arbeitsblatt waren vier Trapeze gezeichnet (Parallelseiten e und f, Schenkel c und Höhe m). Die aus der Zeichnung gefundenen Formeln sollten mit Hilfe von DERIVE überprüft und verglichen werden.

Über Veränderungen in der Prüfungssituation wird gerade am Beispiel dieser Schularbeit im Kapitel 5 noch ausführlich berichtet werden. Hier soll aus der großen Anzahl verschiedenster Versuche seitens der Schüler ein Fall ausgewählt werden:

Eine Schülerin, namens Kerstin, bildet eine 'Gleichungskette' aus den vier Formeln (siehe Abb. 3.28). Der Vergleich erfolgt mit Hilfe des Befehls **Simplify** (Zeile #3). Es stellt sich heraus, die vierte Formel stimmt nicht überein.

#1: "Erster Versuch"

$$\#2: \quad \frac{f-g}{2}\cdot m + g\cdot m = f\cdot m - \frac{f-g}{2}\cdot m = \frac{f+g}{2}\cdot m = 2\cdot\left[f\cdot m - \frac{(f-g)\cdot m}{8}\right]$$

$$\#3: \quad \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(7\cdot f+g)}{4}$$

Abb. 3.52: Testen - erster Versuch

Nun geht sie zur Zeichnung zurück und versucht die Formel richtigzustellen (siehe Abb. 3.29). Der Vergleich wird zuerst wieder mit **Simplify** (#6) und danach mit **Factor** (#7) vorgenommen: Noch immer stimmt die Formel nicht.

#4: "Zweiter Versuch"

#5: $$\frac{f-g}{2}\cdot m + g\cdot m = f\cdot m - \frac{f-g}{2}\cdot m = \frac{f+g}{2}\cdot m = \frac{\frac{f\cdot m}{2}}{2} + \frac{\frac{g\cdot m}{2}}{2}$$

#6: $$\frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{f\cdot m}{4} + \frac{g\cdot m}{4}$$

#7: $$\frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{4}$$

Abb. 3.53: Testen - zweiter Versuch

Ein drittes Mal sucht Kerstin in der Zeichnung nach einer richtigen Formel. Nach der Eingabe in DERIVE (#9) und dem Vergleich mit Hilfe von **Factor** (#10) sieht man: Die Fehlersuche ist gelungen (siehe Abb. 3.30)

#8: "Dritter Versuch"

#9: $$\frac{f-g}{2}\cdot m + g\cdot m = f\cdot m - \frac{f-g}{2}\cdot m = \frac{f+g}{2}\cdot m = \frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2}$$

#10: $$\frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2} = \frac{m\cdot(f+g)}{2}$$

Abb. 3.54: Testen - dritter Versuch

Solche Teststrategien werden in einem computerunterstützten Mathematikunterricht eine zentrale Rolle spielen. Wir behaupten, sie werden teilweise die Handkalkülfertigkeiten ersetzen. Es muß daher der Vermittlung und der Entdeckung solcher Strategien seitens der Schüler besonderes Augenmerk geschenkt werden. Wir haben daher zu diesem Thema ein eigenes Kapitel gewidmet, genannt "Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren" (Kap. 3.5.2).

Beispiel 3.7: Der 'Geist'

(Experimentieren) [vgl. Drijvers, 1994]

Von einer Polynomfunktion mit der Gestalt eines Geistes (siehe Abb. 3.31) kennt man die reellen Nullstellen: (-2,0),(-1.5,0),(-0.8,0),(1.5,0),(2.5,0). Suche durch Experimentieren die zum Geist passende Funktionsgleichung.

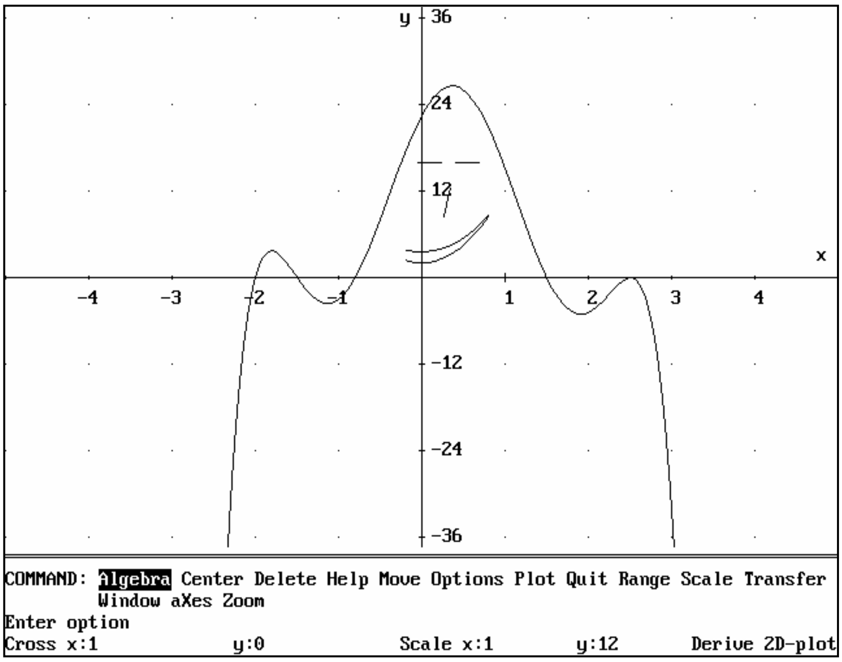


Abb. 3.55:Ein Geist

Das schon in Kap. 2 erstmals angeführte Beispiel soll hier aus einer anderen Perspektive betrachtet werden. Wie unsere Erfahrung zeigt, ist diese Art von Aufgaben für die Schüler besonders motivierend, steht doch zuerst einmal das spielerische Element im Vordergrund. Und doch werden eine Menge mathematischer Kenntnisse und Strategien benötigt oder in dieser heuristischen Phase vermittelt, die weit über die Geistersuche hinaus für die mathematische Problemlösekompetenz von Bedeutung sind: Strategien wie etwa Experimentieren, Visualisieren, Wechseln der Darstellungsart (Hin- und Herpendeln zwischen dem algebraischen und dem grafischen Prototypen des mathematischen Objektes); Kenntnisse über Polynomfunktionen usw.

Die Aufgabe ist sehr offen gestellt. Unter der Voraussetzung, daß im früheren Lernprozeß bereits Polynomfunktionen genauer betrachtet, Zerlegungen von Polynomen durchgeführt und Nullstellen berechnet wurden, wird es relativ schnell zu den ersten Versuchen kommen.

Versuch 1: Der Schüler hat 5 Informationen, die Nullstellen der Funktion, und baut sich einen Funktionsterm auf. Es werden folgende Einstellungen gewählt:

```
#1:   InputMode := Word                                    User
#2:   CASeMode := Sensitive                                User
```

Der erste Funktionsterm wird als GEIST1 definiert:

```
#3:   GEIST1(x):=(x+2)·(x+1.5)·(x+0.8)·(x-1.5)·(x-2.5)     User
```

Dieser durch Vermutung und Experimentieren entstandene Term wird nun im Grafikfenster gezeichnet (Abb. 3.32). Auch das Finden der passenden Skalierung gehört zur Problemlösung (x:1 und y:12).

Der Graph zeigt einen eigenwilligen Geist, der seine linke Hand hebt und damit dem Schüler die Rückmeldung gibt: "Achtung, es fehlt etwas!". Aus den Erfahrungen im Unterricht ist dieser Versuch der häufigste und die Schüler interpretieren diese Rückmeldung meist richtig. Im Graphen des Geistes versteckt sich noch eine weitere Information:

Der Grad der Polynomfunktion muß gerade sein, bei $x = 2.5$ gibt es eine doppelte Nullstelle.

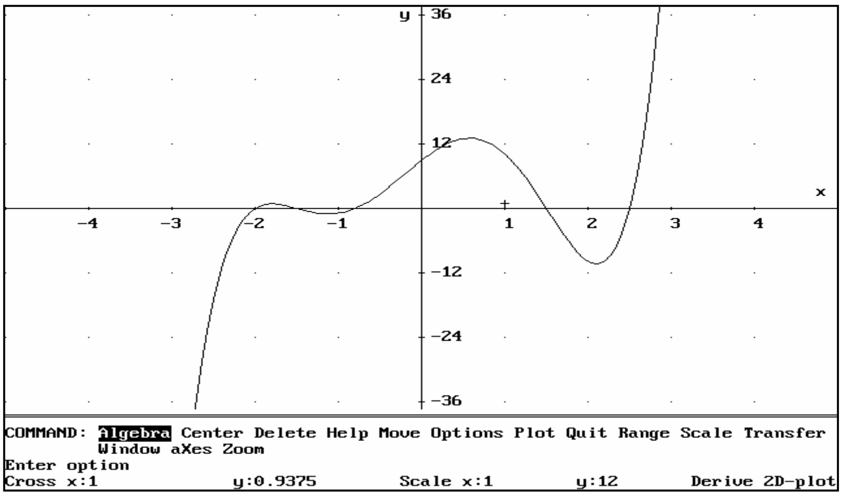


Abb.3.32: Geist aus Versuch 1

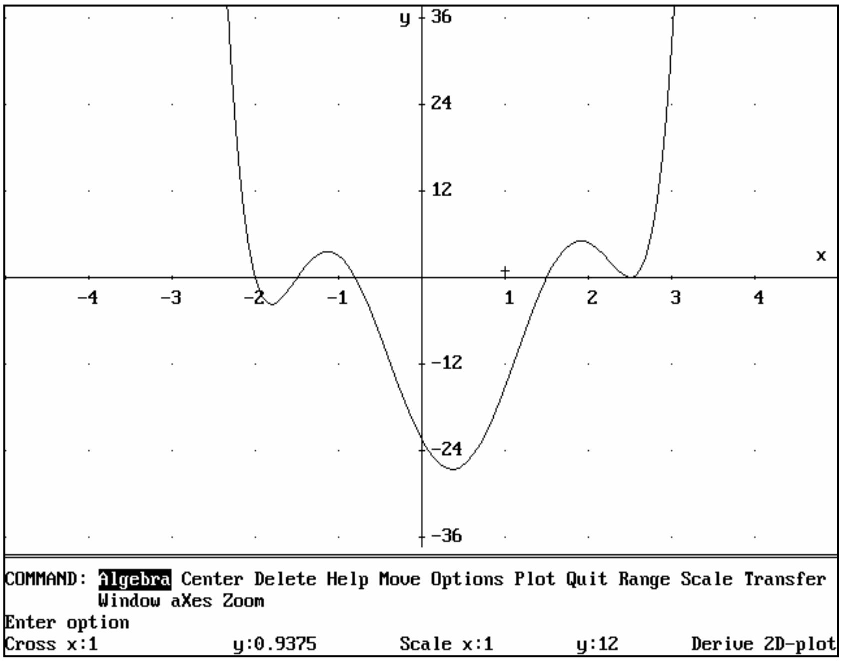


Abb. 3.33: Geist aus Versuch 2

Der Lösungsansatz könnte dann lauten:

Versuch 2: Ein Polynom sechsten Grades wird erzeugt:

$$\#4: \quad GEIST2(x) := (x+2)\cdot(x+1.5)\cdot(x+0.8)\cdot(x-1.5)\cdot(x-2.5)^2 \qquad \text{User}$$

und durch Visualisierung getestet (Abb.3.33):

Die Lösung ist fast gefunden, es fehlt nur noch eine Spiegelung an der x-Achse. Der Term aus #4 wird mit **F3** in den **Author** geholt und verändert:

$$\#5{:}\quad \mathrm{GEIST}(x) := -\,(x+2)\cdot(x+1.5)\cdot(x+0.8)\cdot(x-1.5)\cdot(x-2.5)^2 \quad \mathrm{User}$$

Mit **Expand** läßt sich die Funktion als Summe von Potenzfunktionen darstellen

Expd(#5')

$$\#6{:}\ \mathrm{GEIST}(x) := -x^6 + \frac{11\cdot x^5}{5} + \frac{42\cdot x^4}{5} - \frac{289\cdot x^3}{20} - \frac{1907\cdot x^2}{80} + \frac{171\cdot x}{8} + \frac{45}{2}$$

Die Funktion wird gezeichnet (Abb.3.34):

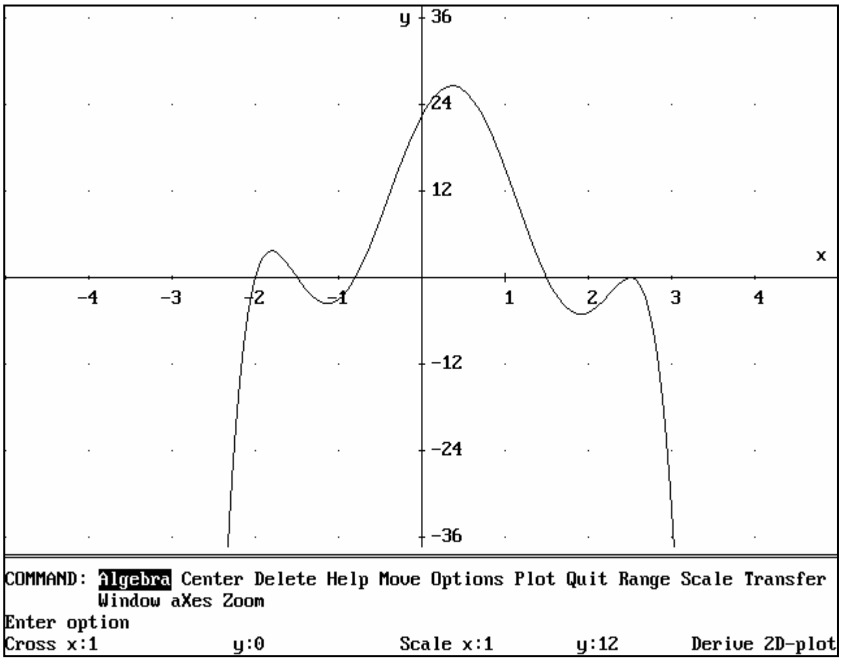


Abb. 3.34: Der Geist

Ein weiterer möglicher Versuch, dieses Problem zu lösen, geht davon aus, daß die Funtion durch ein Polynom 6. Grades festgelegt ist, jedoch die Koeffizienten der Potenzen nicht bekannt sind.

$$\#7{:}\quad F(x) := a\cdot x^6 + b\cdot x^5 + c\cdot x^4 + d\cdot x^3 + e\cdot x^2 + f\cdot x + g$$

Dieser Versuch scheitert vorerst daran, daß nur 5 Bedingungen gegeben sind, jedoch 7 Variablen auftreten. Man muß sich zwei weitere Informationen suchen, etwa durch Ablesen von Funktionswerten aus dem Graphen: $F(0)=45/2$ und $F(1)=243/16$. Das ergibt natürlich nur ungenaue Werte, aber für den Geist ist die Genauigkeit ausreichend. Nun kann das Gleichungssystem mit 7 Gleichungen und 7 Unbekannten vom CAS gelöst werden.

So sieht ein Gleichungssystem aus, wenn man es mit dem CAS als Black Box löst:

```
User
#8: [F(-2)= 0, F(-1.5)= 0, F(-0.8)= 0, F(1.5)= 0, F(2.5)= 0,
```

$$\left[F(-2)=0,\ F(-1.5)=0,\ F(-0.8)=0,\ F(1.5)=0,\ F(2.5)=0,\ F(1)=\frac{243}{16},\ F(0)=\frac{45}{2}\right]$$

Mit **soLve** erhält man die 7 Koeffizienten:

Solve(#8)

$$\#9:\ \left[a=-1,\ b=\frac{11}{5},\ c=\frac{42}{5},\ d=-\frac{289}{20},\ e=-\frac{1907}{80},\ f=\frac{171}{8},\ g=\frac{45}{2}\right]$$

Natürlich wollen die Schüler auch immer wissen, wie das Gesicht des Geistes entsteht (Abb. 3.31), und man könnte sie dafür begeistern es finden. Der in der Aufgabenstellung angegebene Geist mit Gesicht wurde folgendermaßen definiert:

```
User
#10: GEISTHÜLLE(x) := -(x+2)·(x+1.5)·(x+0.8)·(x-1.5)·(x-2.5)^2

#11: MUND1(x) := IF(-0.2 < x < 0.8, 8·x^2 + 3.5)          User

#12: MUND2(x) := IF(-0.2 < x < 0.8, 10·x^2 + 2)           User

User
#13: AUGEN(x) := IF(-0.05 < x < 0.25, 16, IF(0.4 < x < 0.7, 16))

#14: NASE(x) := IF(0.25 < x < 0.35, 50.35·x - 4.9)        User

#15: geist := [GEISTHÜLLE(x),MUND1(x),MUND2(x),NASE(x),AUGEN(x)]
```

3.3. Phase 2: Die exaktifizierende Phase

Im Gegensatz zur New-Math-Bewegung steht die exaktifizierende Phase bei unserem Konzept nicht am Anfang, sondern ergibt sich in einsichtiger Weise aus einer heuristischen Phase.

Wir haben diese Phase 'exaktifizierend' und nicht 'exakt' genannt und wollen damit verdeutlichen, daß es ja in der Mathematik grundsätzlich und erst recht im Mathematikunterricht keinen absoluten Exaktheitsanspruch gibt. Ziel dieser Phase soll es sein, auf der Kreativitätsspirale zu einem höheren Grad an Exaktheit vorzudringen.

Die Bedeutung dieser Phase ergibt sich sowohl aus allgemeinen Bildungszielen des Curriculums ("Einsichten in grundlegende wissenschaftliche Verfahrensweisen und Denkvorstellungen gewinnen") als auch aus der Bildungs- und Lehraufgabe des Fachs Mathematik:

Die Schüler sollen

"mit mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut werden",

"ein Bild der Mathematik gewinnen, das Verfahrens-, Problem-, Anwendungs- und Theorieaspekt ausgewogen repräsentiert",

"Probleme des Definierens, Beweisens, der Exaktheit erkennen".

Ziele der exaktifizierenden Phase

Die Vermutungen der heuristischen Phase sollen abgesichert werden. Die Schüler sollen vom Vermuten zum Beweisen geführt werden.

Die Schüler sollen erkennen, daß die Exaktifizierung und Standpunktsverlagerung oft auch neue Problemlösungsmöglichkeiten eröffnet.

Ein weiteres Ziel ist die Darstellung, Ordnung und Sicherung des mathematischen Wissens.

Die 'exakte' Phase soll auch ein Mittel zum Erkennen und Erforschen von Zusammenhängen sein.

Sie dient zur Ausbildung des exakten, kritischen Denkens, zur Förderung der Fähigkeit zum logischen Schließen.

Die Schüler sollen mit mathematischen Arbeitsweisen vertraut gemacht werden, das Beweisen soll geschult werden.

Die Argumentationsfähigkeit soll geschult werden.

Beispiel 3.8: Exaktifizierung des Integralbegriffs, Riemannsummen

[vgl. Dorninger/Wiesenbauer, 1994]

Gerade in der Integralrechnung beobachtet man, daß Schüler mit dem Begriff des unbestimmten Integrals nur "Aus x^n wird $x^{n+1}/(n+1)$" verbinden und mit dem Begriff des bestimmten Integrals den Flächeninhalt. Das bedeutet, daß viele Regeln des genetischen Konzepts nicht beachtet sind. Wenn man aber den Weg über Riemannsummen geht, hat man das Problem, daß man nur wenige Riemannsummen mit den Schülern tatsächlich ermitteln kann. Anders mit dem CAS: Das Modellbilden, das heißt das Ermitteln der Summenformel, erfolgt durch den Schüler, das Operieren übernimmt der Computer.

Schritt 1: Man sollte mit Funktionen beginnen, bei denen eine Ermittlung der Riemannsumme durch den Schüler und auch die Berechnung des Grenzwerts leicht möglich ist, etwa mit der linearen homogenen Funktion $f_1(x) = x$, wir ermitteln eine Riemannsumme im Intervall $[0,x]$

$$\text{RIEM-}\sum 1(n) = f\left(\frac{x}{n}\right).\frac{x}{n} + f\left(2.\frac{x}{n}\right).\frac{x}{n} + \ldots + f\left(n.\frac{x}{n}\right).\frac{x}{n} \quad 6$$

$$\text{RIEM-}\sum 1(n) = \frac{x}{n}.\frac{x}{n} + 2.\frac{x}{n}.\frac{x}{n} + \ldots + n.\frac{x}{n}.\frac{x}{n} = \frac{x^2}{n^2}.(1+2+3+\ldots+n) \quad 7$$

Diese arithmetische Reihe ergibt mit der bekannten Formel:

$$\text{RIEM-}\sum 1(n) = \frac{x^2}{n^2}.\frac{n}{2}.(n+1) = \frac{x^2}{2}.\frac{n+1}{n} \quad 8$$

Auch der Grenzwert kann von den Schülern mit Hilfe ihrer Kenntnisse über Zahlenfolgen

ermittelt werden: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{x^2}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{x^2}{2}$ 9

Schritt 2: Bereits bei der Funktion $f_2(x) = x^2$ erhält man eine n-gliedrige Partialsumme, für die die Schüler ohne CAS kaum eine geschlossene Form finden können:

$$\#1: \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\frac{k\cdot x}{n}\right]^2 \cdot x}{n}$$

Mit **Simplify** erhält man:

$$\#2: \quad \frac{x^3\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{}$$

$$6\cdot n^2$$

Der Grenzwert kann von den Schülern ermittelt oder mit dem CAS im Sinne des White Box/Black Box-Prinzips errechnet werden.

$$\#3: \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^3\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6\cdot n^2}$$

$$\#4: \quad \frac{x^3}{3}$$

Nun testen wir noch mit Hilfe des CAS

$$\#5: \quad \frac{d}{dx}\,\frac{x^3}{3}$$

$$\#6: \quad x^2$$

Ein typischer Auftrag für eine exaktifizierende Phase wäre, den Schritt von Zeile #2 auf Zeile #3 den Schülern als Behauptung vorzugeben und dann einen Beweis mittels vollständiger Induktion ausführen zu lassen.

Schritt 3: Bei einer Riemannsumme für die Cosinusfunktion ist man nach der Modellbildung durch den Schüler beim Operieren vollständig auf das CAS angewiesen.

$$\#1: \quad n :\varepsilon \text{ Integer}$$

$$\#2: \quad \frac{x}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} \text{COS}\left[\frac{k\cdot x}{n}\right]$$

Mit **Simplify** erhält man:

$$\#3: \quad \frac{x\cdot\text{SIN}\left[x\cdot\left[\frac{1}{2\cdot n}+1\right]\right]}{2\cdot n\cdot\text{SIN}\left[\frac{x}{2\cdot n}\right]} - \frac{x}{2\cdot n}$$

Auch die Berechnung des Grenzwerts übernimmt das CAS:

$$\#4: \quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{x\cdot\text{SIN}\left[x\cdot\left[\frac{1}{2\cdot n}+1\right]\right]}{2\cdot n\cdot\text{SIN}\left[\frac{x}{2\cdot n}\right]} - \frac{x}{2\cdot n}\right]$$

$$\#5: \quad \text{SIN}(x)$$

Wenn man will, kann man noch testen:

$$\#6: \quad \frac{d}{dx}\,\text{SIN}(x)$$

$$\frac{d}{dx}$$

#7: $\cos(x)$

Beispiel 3.9: Beweisen mittels vollständiger Induktion

[Williamson, 1993]

Beweise: Die Summe der dritten Potenzen dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 9 teilbar.

Ohne Rechenhilfe wird im traditionellen Mathematikunterricht das Ziel der Beweisenschulung durch den von den Schülern zu bewältigenden Rechenaufwand aus dem Blick verloren. Im Vordergrund steht meist das Bearbeiten der Terme und nicht der logische Aufbau dieses Beweistyps. Mit dem CAS als Rechen- und Experimentierhilfe kann sich der Schüler auf das Wesentliche dieser Lernsequenz konzentrieren, nämlich auf das Erlernen von Beweistechniken.

Der erste Vorteil besteht darin, daß man verschiedene Darstellungsformen ausprobieren kann (siehe Zeile #1 und Zeile #4).

#1: $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ User

Unter Verwendung der CAS-Befehle **Simplify** oder **Factor** kann man nun experimentieren, in der Hoffnung, daß sich vielleicht ein Faktor 9 abspalten läßt. Bei diesem Problem führt dieser Weg zu keinem Erfolg.

#2: $3\cdot n^3 + 9\cdot n^2 + 15\cdot n + 9$ Simp(#1)

#3: $3\cdot(n + 1)\cdot(n^2 + 2\cdot n + 3)$ Fctr(#2)

#4: $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$ User

#5: $3\cdot n^3 + 6\cdot n$ Simp(#4)

#6: $3\cdot n\cdot(n^2 + 2)$ Fctr(#5)

Mit Unterstützung des CAS als Rechenhilfe kann man auch sehr rasch die Richtigkeit der Behauptung füt die ersten 10 natürlichen Zahlen überprüfen. Die Belegung der Variablen mit Zahlen erfolgt entweder schrittweise mit **Manage Substitute** oder in einem Schritt mit der VECTOR-Funktion (Zeile #7):

#7: $\mathrm{VECTOR}\left[\frac{n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3}{9}, n, 1, 10\right]$ User

#8: [4, 11, 24, 45, 76, 119, 176, 249, 340, 451] Simp(#7)

Damit ist schon der erste Schritt des Beweises mittels vollständiger Induktion gemacht, der Induktionsanfang ("richtig für $n = 1$").

Nun folgt der Schluß von n auf n+1. Mit **Manage Substitute** kann in Zeile #1 n sofort durch n+1 ersetzt werden (Zeile #9).

#9: $(n + 1)^3 + ((n + 1) + 1)^3 + ((n + 1) + 2)^3$ Sub(#1)

$$\#10:\ 3\cdot n^3 + 18\cdot n^2 + 42\cdot n + 36 \qquad \text{Simp(\#9)}$$

$$\#11:\ 3\cdot(n + 2)\cdot(n^2 + 4\cdot n + 6) \qquad \text{Fctr(\#10)}$$

Aber auch bei $A(n+1)$ läßt sich kein Faktor abspalten. Ein nächster Versuch ist, die Differenz von Induktionsbehauptung und Induktionsannahme zu bilden, also $A(n+1)$ - $A(n)$.

User

$$\#12:\ ((n + 1)^3 + ((n + 1) + 1)^3 + ((n + 1) + 2)^3) - (n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3)$$

Bei Bearbeitung dieses Terms mit dem CAS ergibt sich die Abspaltung des Faktors 9, was zu beweisen war.

$$\#13:\ 9\cdot(n^2 + 3\cdot n + 3) \qquad \text{Simp(\#12)}$$

Dieses Beispiel zeigt, daß experimentelles Arbeiten nicht nur typisch für die heuristische Phase ist, sondern allgemeiner für das CAS-unterstützte Lernen.

Die Bedeutung des CAS in der exaktifizierenden Phase

- Experimentieren mit dem CAS in der heuristischen Phase liefert oft Strategien für die exakte Phase.
- Komplexe Rechenvorgänge, die oft von der eigentlichen Beweisidee nur ablenken, können vom CAS übernommen werden. Das CAS kann einzelne Beweisschritte ausführen, die der Schüler dann nur noch begründen muß.
- Das Angebot verschiedener Prototypen eines Begriffs kann die Tätigkeit in der exakten Phase erleichtern. (Siehe Kap. 4.4)
- Das CAS erleichtert die Entscheidung zwischen mehreren Vermutungen durch die Chance, einfach und rasch zu testen.
- Das CAS unterstützt die Selbsttätigkeit der Schüler in der exakten Phase durch die Hilfe beim Rechnen und die vielfältigen Testmöglichkeiten.

3.4. Phase 3: Die Anwendungsphase

Mehr denn je fragen heute Schüler (und Eltern) zurecht nach dem Sinn dessen, was sie lernen sollen. In einer Glosse in einer österreichischen Tageszeitung mit dem Titel "Umwelt statt Mathe" wurde gefordert, Mathematik abzuschaffen und die Schüler mit sinnvolleren Themen zu konfrontieren, wie etwa mit Umweltfragen. Einen Vorwurf in diesem Artikel sollte man ernst nehmen, wenn der Journalist schreibt: "Ich habe Mathematik als sinnloses geistiges Turnen erlebt." So wie ein Sportler große Anstrengungen beim Kraft- oder Konditionstraining auch nur dann akzeptieren wird, wenn er erkennen kann, daß ihm diese Plage in seiner Sportart etwas bringt, sollte auch der Schüler erleben können, daß der entwickelte Algorithmus und der neue Begriff anwendbar sind, und zwar nicht nur im Sinne einer leichten Abprüfbarkeit bei der nächsten Prüfung, sondern um Probleme lösen zu können, die vorher nicht lösbar waren. Daher sollte der Weg der Lernenden auf der Kreativitätsspirale in die Mathematik an der Anwendungsphase nicht vorbeiführen. Damit können auch innermathematische Anwendungen gemeint sein. In diesem Sinn bedeuten 'Anwendungsaufgaben' Nutzung von Regeln und Formeln - oder allgemeiner - Algorithmen, die im Zuge eines Spiraldurchlaufs entwickelt wurden. Ein anderer Wortsinn von 'Anwendung' wäre: Vorgabe von realen Situationen, in denen Probleme zu lösen sind.

Schon die Reformen von Felix Klein zu Beginn dieses Jahrhunderts hatten als wesentliches Ziel, die Schulmathematik anwendungsorientierter, das heißt praxisnäher, zu machen. Als Reaktion auf die New-Math-Bewegung war seit etwa 1970 wieder der verstärkte Ruf danach zu beobachten. Die Schüler sollen erleben, daß Mathematik einen Beitrag zum Verständnis der Wirklichkeit leisten kann und dadurch den Stellenwert dieser Wissenschaft erfahren.

Es sollte dabei auch die Flexibilität der Mathematik gezeigt werden. Es geht nicht nur um einige wenige ausgewählte Anwendungen, sondern eher um die Entwicklung allgemeiner Qualifikationen des Anwendens - also ein Reflektieren des Anwendungsprozesses selbst [Fischer, 1985, S 85ff].

Trotz all dieser Forderungen und Lehrplanreformen spielen Anwendungen im derzeitigen Mathematikunterricht noch immer eine untergeordnete Rolle. Ein Grund dafür könnte die Meinung sein, daß die in der Praxis angewandten Modelle meist für die Schulmathematik viel zu komplex sind und deshalb die Realitätsbezogenheit der schulischen Anwendungsaufgaben nicht sehr groß ist. Eine weitere Erklärung könnte sein, daß reale Probleme häufig über das Fach Mathematik hinausgehendes vernetztes Denken und Arbeiten erfordern, was aber nur in fächerübergreifenden Unterrichtssequenzen zu realisieren wäre.

Dem Vorwurf der geringen Realitätsbezogenheit von zu einfachen Modellen könnte man entgegenhalten, daß die in den Naturwissenschaften verwendeten Modelle oft auch nur wenige Teilaspekte der Wirklichkeit beachten und dennoch für die Entwicklung des Naturverständnisses unverzichtbar sind. Wichtig dabei ist nur, daß das Modell nicht mit der Wirklichkeit gleichgesetzt wird, daß also bewußt gemacht wird, welcher Teilausschnitt der Wirklichkeit durch das Modell abgedeckt wird.

In diesem und im folgenden Kapitel über das Problemlösen soll die Rolle des Computers bei einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht deutlich gemacht werden. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Rolle findet sich am Ende von Kap. 3.5. Zuerst wollen wir die Bedeutung von CAS an einigen Beispielen demonstrieren.

Es gibt viele interessante Probleme, bei denen die Modellbildung den Schülern nicht zumutbar ist, wo aber das Untersuchen von Sonderfällen und das Interpretieren lohnende

Ziele sind, vor allem auch dann, wenn durch solche Aufgaben ein Beitrag für einen fächerübergreifenden Unterricht geleistet werden kann. Häufig sind solche Aufgaben im traditionellen Mathematikunterricht nicht zugänglich, weil der Rechenaufwand für die Schüler zu komplex ist. Mit dem CAS als Rechenhilfe können solche Modelle in der Zukunft dennoch bearbeitet werden.

Beispiel 3.10: Ausbreitung von Luftschadstoffen

[vgl. Dorninger, 1985, S 25]

In Wirklichkeit iat dieses Problem ist natürlich ungeheuer vielschichtig: Man müßte die Größe des Industriebetriebs, die Art der Schadstoffe, die Anzahl und Höhe der Schornsteine, das Wetter, Meßmethoden und Grenzwerte und noch vieles mehr beachten. Um mögliche mathematische Modelle entwickeln zu können, muß zuerst der vorhin beschriebene Abstraktionsprozeß in Form von Einschränkungen und Idealisierungen durchgeführt werden:

Annahmen:

Die Schadstoffquelle sei punktförmig. Als physikalisches Modell für die Ausbreitung nimmt man die Stoßemission.

Die Schadstoffe breiten sich nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit aus (kein Wind).

Es liegen keine Hindernisse wie etwa Berge vor.

Legt man den Ursprung eines Koordinatensystems an den Ort der Schadstoffquelle, so gilt für die Schadstoffkonzentration $c(x_1,x_2,x_3,t)$ im Punkt $P(x_1,x_2,x_3)$ zum Zeitpunkt $t > 0$:

$$c(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{c_0}{\sqrt{(4\pi D t)^3}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4Dt}}$$

Bei diesem Beispiel ist das allgemeine Modell vorgegeben. Man könnte die Formel allerdings am Modell des Galtonschen Brettes plausibel machen. Die Schadstoffteilchen werden als Kugeln gedeutet, die mit Luftmolekülen zusammenstoßen. Daraus ergibt sich in Analogie zum Galtonbrett die Anwendbarkeit des Modells der Normalverteilung.

Schritt 1: Modellverbesserung

Ziel ist, das Modell für das Operieren zugänglich zu machen. Wir führen den Abstand r vom Ursprung als neue Variable ein (Zeile #2) und eine neue Zeitvarible τ (#3). Die Konstante c_0 wird 1 gesetzt (#4). Darüber hinaus können noch für das praktische Problem sinnvolle Definitionsbereiche vorgegeben werden (#5, #6)

$$\#2:\quad r := \sqrt{(x1^2 + x2^2 + x3^2)}$$

$$\#3:\quad \tau := D \cdot t$$

$$\#4:\quad c0 := 1$$

$$\#5:\quad \tau :\in \text{Real } (0, \infty)$$

$$\#6:\quad r :\in \text{Real } [0, \infty)$$

Mit **Manage Substitute** können dann Teile des Terms unterlegt und durch die neuen Variablen ersetzt werden.

$$\#7:\quad c(x1, x2, x3, t) := \frac{c0}{\sqrt{(4 \cdot \pi \cdot \tau)^3}} \cdot \hat{e}^{-(x1^2+x2^2+x3^2)/(4\cdot\tau)}$$

$$\#8:\quad c(x1, x2, x3, t) := \frac{c0}{\sqrt{(4 \cdot \pi \cdot \tau)^3}} \cdot \hat{e}^{-r^2/(4\cdot\tau)}$$

Somit ist die Schadstoffkonzentration eine Funktion der beiden Variablen r und τ.

$$\#9:\quad c(r, \tau) := \frac{c0}{\sqrt{(4 \cdot \pi \cdot \tau)^3}} \cdot \hat{e}^{-r^2/(4\cdot\tau)}$$

Erstes Interpretieren:

Man diskutiert den Graphen der Funktion im 3D-Grafikfenster (Abb.3.35).

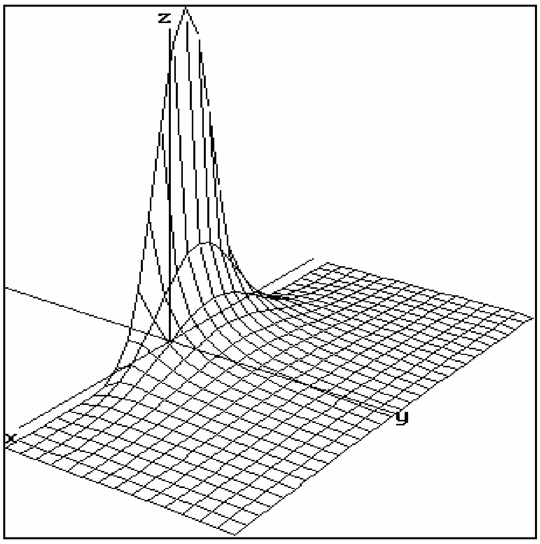


Abb. 3.35: Schadstoffkonzentration

Bei gegebenem τ (τ wird auf der y-Achse abgetragen) erkennt man deutlich die 'Normalverteilungskurve'. Mit dem Befehl **Eye** könnte man etwa die Lage des Augpunkts festlegen, also den Graphen aus verschiedenen Blickwinkeln betrachten und so manche Vermutungen durch einen besseren Einblick erhärten.

Schritt 2: Formulierung neuer Fragen

In der Regel sind für bekannte Schadstoffe Grenzwerte vorgegeben. Aus dem Graphen könnte man die Vermutung ableiten, daß ein solcher Grenzwert ab einer bestimmten Entfernung nicht mehr erreicht werden kann.

Frage: Ab welchem Abstand r^* liegt die Schadstoffkonzentration $c(r, \tau)$ stets unter einem gegebenem Wert c_g?

Bei gegebenem Wert c_g hängt r von $\tau = D.t$ (das heißt von der Zeit t) ab. Wir suchen den größten Abstand r^* von der Quelle (in Abhängigkeit von $\tau = D.t$), wo die vorgegebene Konzentration c_g erreicht werden kann. Da c eine abnehmende Funktion von r ist (siehe Verlauf des Graphen in Abb. 3.35 oder interpretiere den Funktionsterm in Zeile #9), folgt schließlich, daß für $r > r^*$ der Wert c_g nicht mehr erreicht werden kann.

Zweites Modell

$$\#10: \quad cg = \frac{c0}{\sqrt{(4 \cdot \pi \cdot \tau)^3}} \cdot \hat{e}^{-r^2/(4 \cdot \tau)}$$

Wir wählen für c_g einen bestimmten Wert, etwa 0.5. Das bedeutet die Abnahme der Konzentration auf die Hälfte.

```
#11: cg := 0.5
```

Löst man mit **soLve** die Gleichung #10 nach r auf, erlebt man bei Verwendung von manchen CAS eine Überraschung, insbesondere dann, wenn man vorher nicht den sinnvollen Definitionsbereich bestimmt hat: Das CAS liefert komplexe Lösungen (was ja nicht bedeutet, daß es nicht auch reelle Werte geben kann). Es ist wichtig, die Schüler durch das Erlernen geeigneter Strategien auf solche Situationen vorzubereiten. Immer wieder müssen sie Ergebnisse interpretieren, die sie nicht selber produziert haben. Mit diesem Problem werden wir uns im Kapitel 3.5.2 beschäftigen.

```
#12: r = √2·î·√τ·√(3·LN(π·τ) + 4·LN(2))

#13: r = - √2·î·√τ·√(3·LN(π·τ) + 4·LN(2))
```

Zweites Interpretieren:

Der Versuch, durch Zeichnen des Graphen eine Deutung zu erhalten, scheitert vorerst. Das CAS kündigt zwar einen Graphen an, es ist aber keiner zu sehen.

Nun könnte man sich an Ansatzvereinfachungen bei Extremwertaufgaben erinnern (hat f an einer Stelle x_0 ein relatives Extremum, so auch f^2). Wir untersuchen also den Verlauf von r^2.

```
                                                2
#14: (r = √2·î·√τ·√(3·LN(π·τ) + 4·LN(2)))
```

Durch Quadrieren der Gleichung #12 erhält man:

```
       2
#15: r  = - 6·τ·LN(π·τ) - 8·τ·LN(2)

#16: r = √(|- 6·τ·LN(π·τ) - 8·τ·LN(2)|)
```

Der Graph von Zeile #15 zeigt vorerst auch kein eindeutiges Extremum (Abb. 3.36). Erst durch Zoomen findet man jenen Bereich, in dem sich das relative Extremum befindet (Abb.3.37)

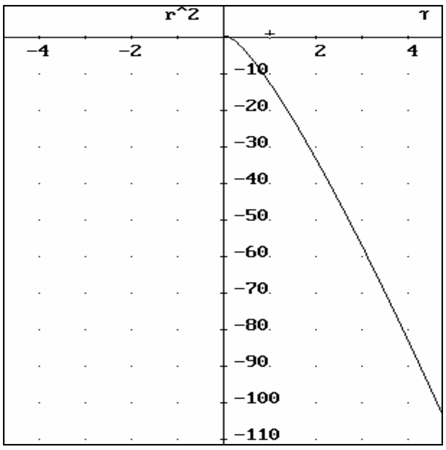


Abb. 3.36 Extremum visualisieren

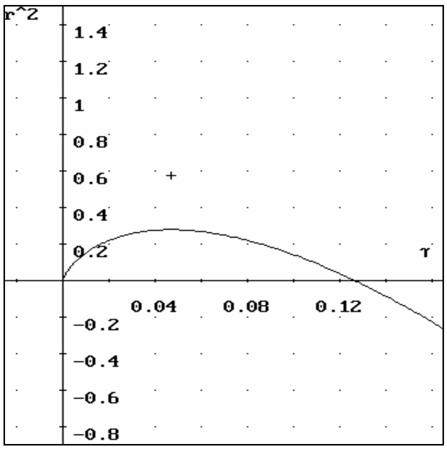


Abb. 3.37 Extremum viusalisieren

Jetzt, wo man das relevante Intervall gefunden hat (etwa [0,0.15]), könnte man auch noch den Graphen der Wurzel aus dem Betrag des Terms von #15 untersuchen (Abb. 3.38). Die Interpretation dieses Graphen führt zum Schluß, daß die Funktionen von Zeile #12 und #13 nur innerhalb des Intervalls [0,~0.125] reelle Werte annehmen.

Versucht man nun noch einmal, die Graphen von Zeile #12 und #13 in diesem Intervall zu zeichnen, so bestätigt sich diese Vermutung, und es erklärt sich damit auch, daß beim ersten Versuch (Einheiten auf beiden Achsen je 1) kein Graph zu sehen war (Abb. 3.39).

Nun könnte aus dem Graphen der Extremwert durch Suchen mit dem Cursor im *Trace*-Modus experimentell ermittelt werden. Ohne weiter zu zoomen, erhält man $\tau^* \approx 0.0475$.

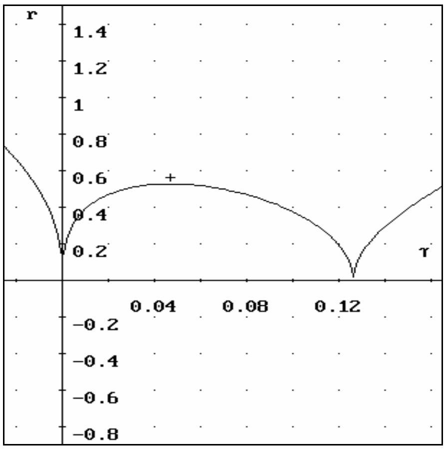


Abb. 3.38: Extremum visualisieren

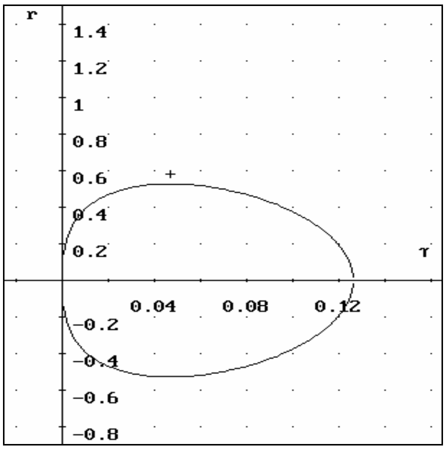


Abb. 3.39: Extremum visualisieren

Schritt 3: Lösen mit Hilfe der Differentialrechnung:

Drittes Modell: Das Rezept "1.Ableitung gleich 0 setzen" muß der Schüler aus dem Analysisunterricht mitbringen.

Die Tätigkeit des *Operierens* übernimmt das CAS als Black Box.

$$\#17: \quad \frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{2}\cdot\hat{\imath}\cdot\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{(3\cdot LN(\pi\cdot\tau) + 4\cdot LN(2))}\right)$$

$$\#18: \quad \frac{\sqrt{2}\cdot\hat{\imath}\cdot(3\cdot LN(\pi\cdot\tau) + 4\cdot LN(2) + 3)}{2\cdot\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{(3\cdot LN(\pi\cdot\tau) + 4\cdot LN(2))}}$$

Mit **soLve** liefert das CAS die Nullstelle dieses komplizierten Terms:

$$\#19: \quad \tau = \frac{2^{2/3}\cdot\hat{e}^{-1}}{4\cdot\pi}$$

Mit **approX** erhält man einen Wert mit gewünschter Genauigkeit. Wieder einmal wird bestätigt, daß der experimentelle Wert, der aus dem Graphen ermittelt wurde, nicht so schlecht ist.

$$\#20: \quad \tau = 0.0464710$$

Nun wird aus der bekannten Diffusionskonstanten D zuerst t^* und danach das Maximum der Entfernung r^* ermittelt, in der die Schadstoffkonzentration den Wert 0.5, also 50% der an der Quelle auftretenden Konzentration, annehmen kann.

Drittes Interpretieren:

Was jetzt noch folgen sollte, ist eine Berücksichtigung weiterer Aspekte der Wirklichkeit, ein Zurücknehmen der Idealisierungen sowie Interpretationen der Modellergebnisse für die Praxis bis hin zu Bewertungen von Umweltsituationen in Hinblick auf erforderliche Maßnahmen. Daraus könnten sich wieder neue Fragen ergeben, wie etwa: Wie würde ein Wind, der mit konstanter Geschwindigkeit v_1 in Richtung x_1-Achse weht, das Modell beeinflussen? Die Spirale könnte also noch viel weiter gedreht werden, eventuell sind neue Algorithmen erforderlich, die wieder in einer exaktifizierenden Phase abgesichert werden müssen usw. Solche Fragen würden den Rahmen dieses Buchs sprengen [vgl. Dorninger, 1988].

3.5. Problemlösen mit Hilfe von CAS

In der Diskussion über die Aufgaben der Schule der Zukunft ist immer wieder von sogenannten Schlüsselqualifikationen die Rede. Das Problemlösen ist eine, welche immer als besonders wichtig genannt wird.

Die Bedeutung der Mathematik für den Erwerb dieser Schlüsselqualifikation geht schon aus jener Definition von Mathematik hervor, die von Bruno Buchberger [Buchberger, 1981, S.1] formuliert wurde: "Mathematik ist die über Jahrhunderte verfeinerte Technik des Problemlösens durch Schließen."

Aber auch die Stationen auf der Kreativitätsspirale stellen wichtige Phasen im Problemlöseprozeß dar. Dieser Weg verlangt und fördert viele Kenntnisse und Strategien, die für das Problemlösen notwendig sind.

Da das Wort 'Problem' so vieldeutig verwendet wird, muß man zuerst einmal eine Begriffsklärung vornehmen: Ein Problem ist eine Situation, in der ein verlangtes Objekt, ein Zustand nicht unmittelbar erreichbar ist. Die Problemlösung ist eine Methode, ein Verfahren, ein Vorgang, der die Konstruktion des gewünschten Objektes ermöglicht oder einen gewünschten Zustand erreichen hilft.

Auf die Schulmathematik übertragen könnte man zwischen Aufgaben und Problemen unterscheiden:

Bei einer *Aufgabe* ist der Lösungsweg dem Schüler bekannt. Ziel des Lösens von Aufgaben ist also vor allem das Üben des vorgegebenen Lösungsalgorithmus.

Bei einem *Problem* muß der Schüler erst das Modell finden, er muß entweder aus bekannten Algorithmen den richtigen auswählen oder erst aus bekannten Regeln neue Algorithmen entwickeln.

Man denke etwa an das Beispiel: Löse die Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$. Dabei handelt es sich um eine Aufgabe, wenn der Schüler kurz davor eine Formel für das Lösen der quadratischen Gleichung gelernt hat und nur einsetzen muß. Kennt er dagegen die Formel nicht und muß selbständig aus bisher Gelerntem eine Lösungsstrategie entwickeln, wie etwa Zerlegen in Linearfaktoren oder Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat, dann ist dieses Beispiel ein sehr anspruchsvolles Problem.

Wir halten für eines der wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts die *Schulung des Problemlösens*. Das heißt, die Schüler sollen Probleme besser beschreiben und verstehen lernen, sie sollen Strategien entwickeln, um den Problemlöseprozeß besser bewältigen zu können. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es nicht, viele Beispiele zu lösen, es ist die Aneignung eines 'Metawissens' über den Problemlöseprozeß selbst notwendig. An Hand repräsentativer Aufgaben soll ein Problemlöseschema vorgestellt gemacht werden.

"Jede Aufgabe, die ich löste, wurde zu einer Regel, die später zur Lösung anderer Aufgaben diente." (Descartes: Oeuvres, Bd. VI)

"Das Ziel ist eine aktive Haltung gegenüber neuen Problemen, Mut zum Nachdenken, auch wenn kein Lösungsweg in Sicht ist, sich zu helfen wissen, bereit sein zum Formulieren und Prüfen von Vermutungen, zum systematischen Variieren von Lösungsansätzen. Der Schüler darf nicht Aufgaben, die ihm begegnen, in gehabte und nicht gehabte einteilen und bei der zweiten Sorte sogleich resignieren." [Kirsch, 1974]

Der Lehrer sollte sich überlegen, wie er durch die geeignete Wahl von Inhalten, Methoden und Werkzeugen die Problemlösefähigkeit der Schüler fördern kann.

3.5.1. Der Problemlöseprozeß

Um dem Auftrag der Schulung des Problemlösens gerecht zu werden, ist es nötig, diesen Prozeß in seiner Ganzheit zu betrachten, also beginnend bei der Analyse des meist nur sehr diffus gestellten Problems, für das ein mathematisches Modell gesucht wird. Danach ist das Modell zu bearbeiten, das heißt, es wird ein mathematisches Ergebnis ermittelt. Nun muß aber erst die Brauchbarkeit des Modellergebnisses für das gestellte Problem untersucht werden. Die so ermittelten Resultate sollten dann, eventuell gemeinsam mit Informationen über verwendeten Lösungsverfahren, übersichtlich präsentiert werden.

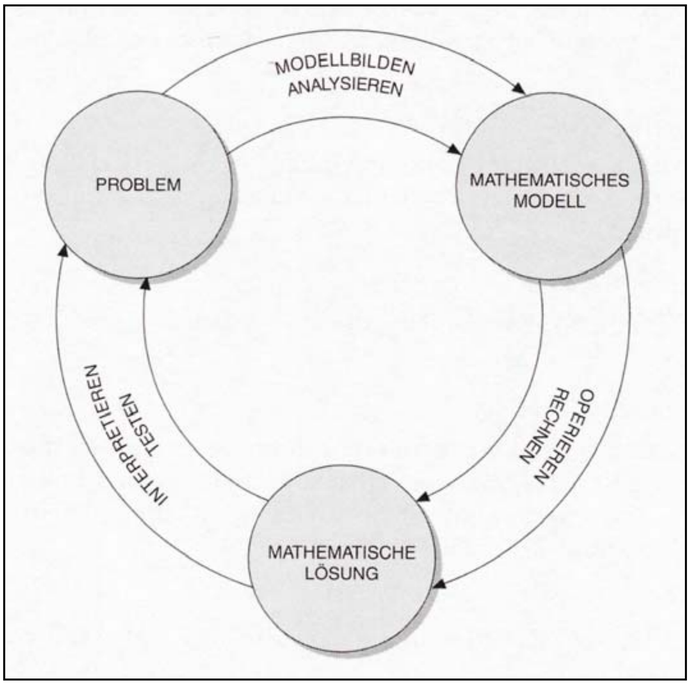


Abb. 3.40: Der Problemlösezyklus

Dem obigen Schema entsprechend kann man 3 Phasen unterscheiden:

-Modellbilden

-Operieren

-Interpretieren

Phase 1: Modellbilden

In dieser Phase geht es darum, ein für das Problem adäquates mathematisches Modell zu finden.

Wortmodelle:

Aus unscharfen Informationen über das Problem wird durch Präzisierung, Konzentration und Abstraktion eine sprachliche Formulierung gefunden, die eine direktere Übersetzung in die formale Sprache der Mathematik ermöglicht. (Beispiel: Schüler werden in eine Bank geschickt, um sich über Kredite zu informieren → Wortmodell: "Das Kapital wird verzinst, die Rate wird abgezogen".)

Algebraische Modelle:

Sie bestehen aus Variablen und Beziehungen zwischen diesen Variablen. Beziehungen können Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen (in Termdarstellung oder rekursiv definiert) sein. Neu ist bei Nutzung des Computers die Möglichkeit, rekursive Modelle zu bearbeiten, Programme zu erstellen oder fertige Module zu nutzen.

Grafische Modelle:

Es können die Visualisierungsmöglichkeiten des CAS in der 2D- oder 3D-Grafik genutzt werden. Operieren kann auch Erforschen des Graphen bedeuten, und nicht nur Rechnen.

Numerische Modelle:

Tabellen mit numerischen Größen, die eine Beziehung zwischen Variablen beschreiben.

Tätigkeiten beim Modellbilden

Problemanalyse: Ausgehend von dem oft noch unscharf formulierten Problem versucht man zunächst, eine präzisere verbale Formulierung des Problems zu finden (Buchberger: "Eine exakte Problembeschreibung ist oft schon die 'halbe' Lösung"). Einige wichtige Regeln für die Problemanalyse:

- Analysiere die Ausgabegrößen: "Was ist gesucht?"
- Analysiere die Ausgabebedingung: "Welche Eigenschaften sollen die gesuchten Größen haben?"
- Analysiere die Eingaben: "Was ist gegeben?"
- Analysiere die Eingabebedingung sowie die für Ein- und Ausgabe sinnvollen Definitionsbereiche.
- Analysiere die für ein Lösungsverfahren zugelassenen Grundoperationen: "Welche Operationen und Begriffe stehen zur Verfügung?"

Eine ausführlichere Beschreibung des computerunterstützten Problemlösens findet man etwa im genetisch aufgebauten Hochschullehrbuch "Mathematik für Informatiker" [Buchberger, 1981].

Erste Modellentscheidung: Häufig ist das Modellbilden ein Kreisprozeß, bei dem ein erstes Modell einmal erprobt, analysiert und danach verbessert wird. Auf heuristische Strategien, die bei der Modellfindung hilfreich sein können, wird im folgenden Kapitel ("Heuristische Phase des Mathematiklernens") näher eingegangen. Im klassischen computerlosen Mathematikunterricht sind solche Problemkreisläufe sehr selten, da das mehrmalige Durchlaufen des Schemas ohne Computer zu zeitaufwendig ist und die Modelle oft vom Rechenaufwand her zu komplex werden, oder schon das erste Modell zu kompliziert ist.

Phase 2: Operieren

Die Lösung eines Problems besteht in der Angabe eines Verfahrens (Algorithmus, Programm oder Methode), das nur erlaubte Operationen verwendet, die Eingangsvariablen nicht verändert und eine den Ausgabebedingungen genügende Problemlösung liefert.

Im klassischen Mathematikunterricht liegt der Schwerpunkt der Tätigkeit eindeutig bei der Phase des Operierens, wobei darunter meist Rechnen zu verstehen ist. Das Rechnen wurde oft Selbstzweck, es wurde gerechnet, weil man etwas Abprüfbares brauchte. Das CAS bietet in diesem Bereich sowohl Entlastung als auch neue Möglichkeiten und ermöglicht dadurch eine stärkere Beachtung der anderen Phasen des Problemlöseprozesses.

Phase 3: Interpretieren

Dieses Schema darf nicht so verstanden werden, daß die einzelnen Phasen seriell abgearbeitet werden. Das Interpretieren beginnt bereits in der ersten Phase bei der Problemanalyse und sollte während des Problemlöseprozesses eine ständige begleitende Tätigkeit sein. Auf dem gesicherten Boden der mathematischen Logik bewegt man sich ja nur zwischen mathematischem Modell und mathematischer Lösung. Darüber hinaus besteht das Interpretieren in einem Abwägen der Brauchbarkeit des Modells und in einem Bewerten der Lösung.

Tätigkeiten beim Interpretieren:

- Überprüfen der Richtigkeit und Vollständigkeit der mathematischen Lösung. Die bei Verwendung des CAS gegebenen Möglichkeiten und Probleme, die sich an der Schnittstelle Operieren - Interpretieren ergeben, werden im folgenden Kapitel behandelt.
- Testen der Brauchbarkeit des Modells für das gestellte Problem.

- Bewerten der Brauchbarkeit der mathematischen Lösungen für das Problem.
- Untersuchung der Auswirkung von Parametern auf die Lösung.
- Überlegungen zur Modellverbesserung.

Präsentation und Dokumentation der Lösung:

Insbesondere dann, wenn nicht nur innermathematisch eng gesteckte Probleme zu lösen sind, die nur eine Lösung haben, ist diese Tätigkeit ein wesentlicher Bestandteil des Schemas. Der Problemlöser muß seine Lösung entweder dem Problemsteller oder einem zukünftigen Benutzer präsentieren, und zwar nach Möglichkeit in der Sprache des Adressaten.

Beispiel 3.11: Roboterkinematik

[vgl. Buchberger/Kutzler, 1986]

Ein Problem aus dem Bereich der inversen Roboterkinematik: Gegeben sei ein zweiarmiger Roboter im zweidimensionalen Raum. Es sollen die Lage und die relative Bewegung der Gelenke der Roboterarme bestimmt werden, um eine vorgegebene Positionierung zu erreichen.

Modellbilden

Im Gegensatz zur Schulmathematik, wo die gestellten Probleme häufig schon in Form konkreter Arbeitsanweisungen formuliert sind ("Berechne...", "Ermittle den Schnittpunkt..." usw.), ist man in der Praxis mit solchen offenen Aufgaben konfrontiert.

Die erste Tätigkeit besteht darin, von der Realität eines Roboters mit Armen aus Metall, mit Motoren und Greifzangen usw. zu abstrahieren, also Größen und Beziehungen zwischen diesen Größen derart zu beschreiben, daß eine Übersetzung in eine formale mathematische Sprache möglich wird. Man könnte sagen, der erste Schritt besteht darin, Probleme der realen Welt in eine 'mathematische Welt' zu übertragen. Denn erst diese Sprache des mathematischen Universums wird in die formale mathematische Sprache übersetzt [Buchberger, 1995]. Im Einleitungskapitel über Problemlösen haben wir von Wortmodellen und Wortformeln gesprochen.

Analyse der Eingaben und Eingabebedingungen:

Der erste Arm OD sei um den Punkt O drehbar und habe die Länge a.

Der zweite Arm DP sei um D drehbar und habe die Länge b.

Man kennt darüber hinaus die kartesischen Koordinaten des Punkts P, der durch Drehbewegung der beiden Roboterarme um O bzw. um D erreicht werden soll: $P:=[p_x,p_y]$.

Analyse der Ausgabegrößen und Ausgabebedingungen:

Gesucht sind die Lage des Drehpunkts $D:=[d_x,d_y]$ und vor allem die Winkel $\alpha = \measuredangle x^+OD$ und $\beta = \measuredangle ODP$, um die die beiden Arme OD und DP gedreht werden müssen, um P zu erreichen.

Zur Übersetzung in das mathematische Universum, das heißt zur Analyse, die ja zu ersten Modellversuchen führen soll, gehört bei solchen Aufgaben natürlich eine Zeichnung (Abb. 3.41).

Gerade an der Zeichnung erkennt man deutlich den Abstraktionsschritt, man wird ja nicht richtige Arme oder Greifzangen einzeichnen, sondern nur jene abstrakten mathematischen Größen, die für die Modellfindung von Bedeutung sind.

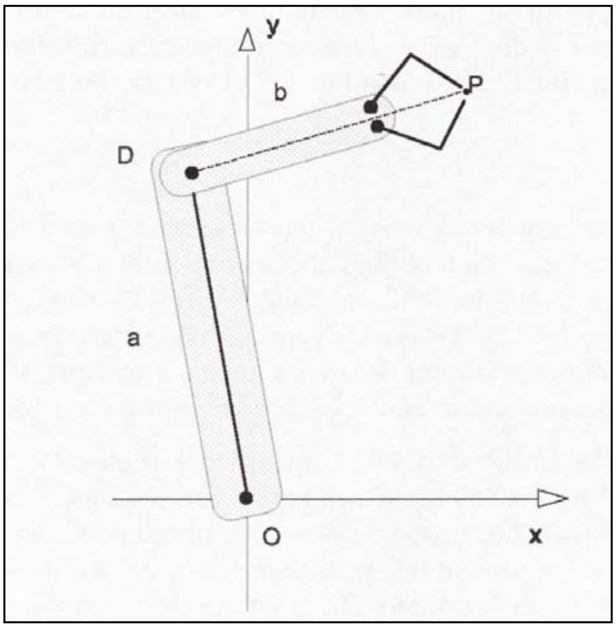


Abb. 3.41: Modellbilden

Diese Zeichnung ist schon ein sehr brauchbarer Ausgangspunkt für die Modellfindung. Es gilt zu analysieren, welche Verfahren, welche Operationen und Begriffe der Schüler auf dieser Lernstufe zur Verfügung hat. Sollte kein geeignetes Verfahren verfügbar sein, müßte dieses Problem im Sinne der Kreativitätsspirale (siehe Kap. 3.1.) zum Anlaß genommen werden, ein neues Verfahren zu entwickeln.

In Österreich paßt dieses Problem in die 10.Schulstufe, zu Lernbereichen wie Analytische Geometrie und Trigonometrie.

Die Schüler könnten also entweder ein analytisches (Abb. 3.42) oder ein trigonometrisches Modell (Abb. 3.43) wählen.

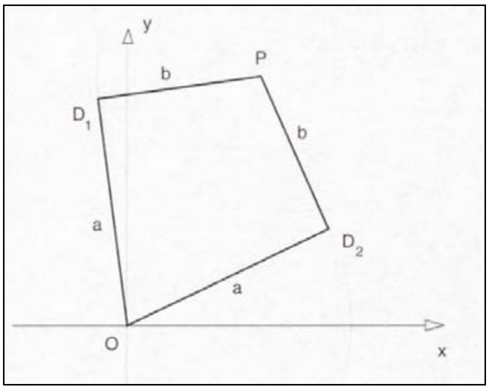


Abb. 3.42: Modellbilden – analytisch

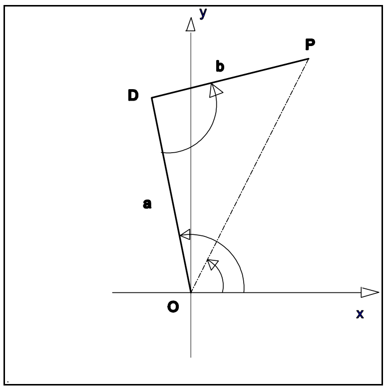


Abb. 3.43: Modellbilden - tigonometrisch

Natürlich könnte man dieses Problem mit konkreten Zahlen auch im traditionellen Mathematikunterricht ohne Computer behandeln. Der Vorteil des CAS besteht in der allgemeinen Bearbeitung. Das bringt erstens mehr Praxisnähe, denn schließlich geht es um die Robotersteuerung für beliebige vorgegebene Punkte, und zweitens erkennt der Schüler, daß bei solchen realen Problemen das Interpretieren und Testen besondere Bedeutung haben.

Häufig ist das Problemlösen ein Kreisprozeß: Ein erstes Modell wird analysiert, entweder sofort verbessert oder erprobt, getestet und danach verbessert. Im Zuge der Analyse dieses Problems müßte man bei allgemeiner Behandlung die Frage stellen: Welchen Bereich kann der Roboter überhaupt erreichen? Man kann diese Frage aber auch einmal ausklammern, sich für ein Modell entscheiden, operieren und sie dann erst beim Testen stellen.

Wir wollen in diesem Kapitel annehmen, der Schüler habe sich für das *Modell der analytischen Geometrie* entschieden. In Kapitel 5 wird dann noch das trigonometrische Modell vorgestellt.

Erstes Modell: Schon aus der Zeichnung (Abb. 3.42) erkennt man: Es kann für den Drehpunkt 2 Lösungen geben. Man ermittle die beiden Lösungen als Schnittpunkte eines Kreises um O mit Radius a und eines Kreises um P mit Radius b (siehe Abb. 3.44 Zeilen #3 und #4).

Operieren

Nun gilt es, dieses Gleichungssystem zu lösen. Das Operieren wird zwar dem CAS überlassen, das Planen und Anordnen obliegt aber dem Schüler. Es wird die Differenz der beiden Gleichungen gebildet (#5). Dazu werden mit **F4** die Gleichungen #4 und #3 in die Authorzeile geholt. Mit **Simplify** erhält man eine lineare Gleichung in den Variablen x und y (#6), die dann mit **soLve** nach y aufgelöst wird (#7). Danach wird der Term mit **Manage Substitute** in die Gleichung #3 eingesetzt.

Ein 'Verschönern' der Gleichung, d.h. ein Umformen auf eine Normalform ist nicht mehr notwendig. Mit dem Befehl **soLve** kann eine solche Gleichung sofort gelöst werden (siehe Abb. 3.45). Die in #9 und #10 erkennbaren 'wilden' Lösungen machen deutlich, daß eine allgemeine Behandlung ohne CAS wohl nicht möglich wäre. Nicht einmal die Hälfte des riesigen Terms ist auf dem Schirm sichtbar. Mit **Manage Subtsitute** werden die unterlegten Lösungsterme für x in die Gleichung #7 eingesetzt, und man erhält die zugehörigen Lösungen für y.

Auch diese riesigen Terme muß der Schüler weder schreiben, noch ihre Struktur analysieren, er muß sie nur mit **F3** oder **F4** in die Authorzeile transportieren oder mit **Manage Substitute** in andere Ausdrücke einsetzen.

#1: Precision := Approximate

#2: PrecisionDigits := 10

#3: $x^2 + y^2 = a^2$

#4: $(x - px)^2 + (y - py)^2 = b^2$

#5: $((x - px)^2 + (y - py)^2 = b^2) - (x^2 + y^2 = a^2)$

#6: $-2 \cdot px \cdot x - 2 \cdot py \cdot y + px^2 + py^2 = b^2 - a^2$

#7: $y = -\dfrac{2 \cdot px \cdot x - a^2 + b^2 - px^2 - py^2}{2 \cdot py}$

#8: $x^2 + \left[-\dfrac{2 \cdot px \cdot x - a^2 + b^2 - px^2 - py^2}{2 \cdot py}\right]^2 = a^2$

Abb.3.44: Operieren

$$\#9:\quad x = \frac{py\cdot\sqrt{(-a^4 + 2\cdot a^2\cdot(b^2 + px^2 + py^2) - b^4 + 2\cdot b^2\cdot(px^2 + py^2) - px^4 - py^2 \cdot}}{2\cdot(px^2 + py^2)}$$

$$\#10:\quad x = \frac{px\cdot(a^2 - b^2 + px^2 + py^2) - py\cdot\sqrt{(-a^4 + 2\cdot a^2\cdot(b^2 + px^2 + py^2) - b^4 + 2\cdot}}{2\cdot(px^2 + py^2)}$$

$$\#11:\quad y = -\frac{2\cdot px\cdot\dfrac{py\cdot\sqrt{(-a^4 + 2\cdot a^2\cdot(b^2 + px^2 + py^2) - b^4 + 2\cdot b^2\cdot(px^2 + py^2) - px}}{2\cdot(px^2 + py^2)}}{}$$

$$\#12:\quad y = \frac{py\cdot(a^2 - b^2 + px^2 + py^2) - px\cdot\sqrt{(-a^4 + 2\cdot a^2\cdot(b^2 + px^2 + py^2) - b^4 + 2\cdot}}{2\cdot(px^2 + py^2)}$$

Abb.3.45: Operieren

Eine weitere Stärke von CAS und insbesondere von DERIVE beim anwendungsorientierten Problemlösen ist die Möglichkeit, durch Definition von Funktionen kleine Programmodule zu bauen, die dann entweder als 'Unterprogramme' verwendet werden oder letztlich die Lösung darstellen. Solche Module haben vor allem beim Interpretieren und Testen große Vorteile.

Zuerst werden die beiden Lösungen für den Drehpunkt als Funktionen der Eingabegrößen p_x, p_y, a und b definiert, indem man den Vektor aus dem passenden Lösungspaar x und y zusammenbaut ($D1$ in Zeile #16 und $D2$ in Zeile #17 in Abb. 3.46).

$$\#15:\quad D := [0, 0]$$

$$\#16:\quad D1(px, py, a, b) := \left[\frac{py\cdot\sqrt{(-a^4 + 2\cdot a^2\cdot(b^2 + px^2 + py^2) - b^4 + 2\cdot b^2\cdot(px^2 +}}{2\cdot(p}\right.$$

$$\#17:\quad D2(px, py, a, b) := \left[\frac{px\cdot(a^2 - b^2 + px^2 + py^2) - py\cdot\sqrt{(-a^4 + 2\cdot a^2\cdot(b^2 + px^2}}{2\cdot(p}\right.$$

$$\#18:\quad D1(-4, 5, 5, 3) = [-1.001713152, 4.898629477]$$

$$\#19:\quad D2(-4, 5, 5, 3) = [-4.559262456, 2.052590034]$$

$$\#20:\quad D1(-4, 7, 5, 3) = [-2.492307692 + 0.4205519056\cdot \hat{\imath}, 4.361538461 + 0.240315374$$

$$\#21:\quad D1(0, 0, 2, 5) = [?, ?]$$

Abb. 3.46: Erste Ergebnisse

Schritt 3: Interpretieren

Diese Drehpunktsmodule können nun für ein erstes Interpretieren und Testen verwendet werden. Die Zeilen #20 und #21 in Abb. 3.46 zeigen, daß es nicht für beliebige Eingabegrößen eine brauchbare Lösung gibt. Innermathematisch interpretiert bedeutet das: Die beiden Kreise schneiden einander nicht, sie könnten allerdings auch identisch sein. Vom Roboterproblem her gesehen ist zu folgern: Nicht jeder Punkt der Ebene kann bei bestimmten Armlängen erreicht werden.

Ein weiteres Modul ARME ist nun sehr einfach zu konstruieren: Man definiert ARME1 und ARME2 als Funktionen der Eingangsgrößen. Die Module sind nichts anderes als die Streckenzüge *OD1P* bzw. *OD2P* (siehe Abb. 3.47)

```
#20: D1(-4, 7, 5, 3) = [-2.492307692 + 0.4205519056·î, 4.361538461 + 0.240315374

#21: D1(0, 0, 2, 5) = [?, ?]

#22: ARME1(px, py, a, b) := [0, D1(px, py, a, b), [px, py]]

#23: ARME2(px, py, a, b) := [0, D2(px, py, a, b), [px, py]]

                          ┌      0            0       ┐
#24: ARME1(7, 4, 6, 5) =  │ 5.934354405  -0.8851202101 │
                          └      7            4       ┘

                          ┌      0            0      ┐
#25: ARME2(7, 4, 6, 5) =  │ 2.250260978  5.562043287  │
                          └      7            4      ┘

       2     2    2
#26: x   + y   = 6

              2          2    2
#27: (x - 7)   + (y - 4)   = 5
```

Abb. 3.47: Testmodule

Nun kann man die verschiedenen Lösungen des mathematischen Modells im Grafikfenster interpretieren, denn bei Eingabe von ARME1(7,4,6,5) zeichnet das CAS mit dem Befehl **Plot** die Roboterarme mit den Längen 6 und 5 zum Punkt *P*(7,4). ARME2 ergibt mit denselben Parametern die zweite Lösung für den Drehpunkt. Wichtig dabei ist, daß aufgrund der Bildschirmeinstellung die Punkte des Streckenzuges verbunden werden (bei DERIVE: **Transfer State** *Connected*). Außerdem könnte man noch die beiden Kreise, deren Schnitt die Lösung ergeben hat, einzeichnen. Ab der Version 3.0 kann DERIVE solche Kreise auch in impliziter Form zeichnen (siehe Abb.3.48).

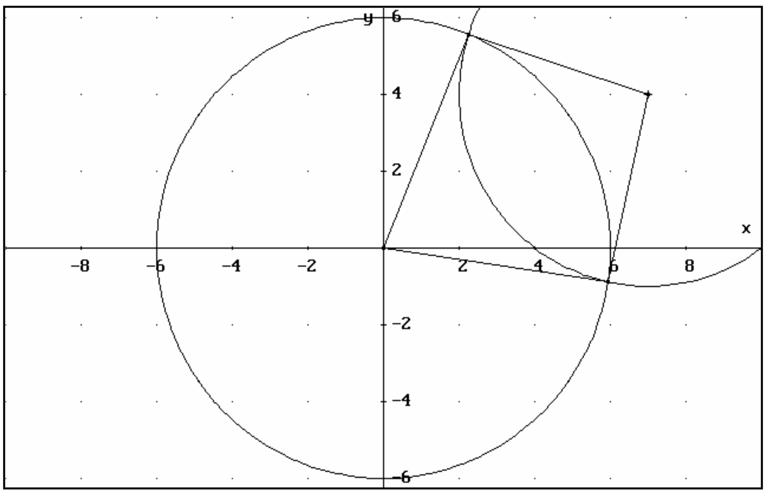


Abb. 3.48: Die analytische Lösung

Mit Hilfe der VECTOR-Funktion von DERIVE kann das Testen noch rationeller gestaltet werden. Es können etwa sofort alle Lösungen ermittelt werden, die man erhält, wenn die x-Koordinate des Punkts *P* alle Werte von

-15 bis +15 mit der Schrittweite 3 durchläuft (siehe Zeile #30 in Abb. 3.49). Genauso kann man eine Armlänge, etwa a, Werte zwischen 1 und 11 mit Schrittweite 0.5 annehmen lassen (Zeile #34). Im Grafikfenster können dann die Ergebnisse untersucht und interpretiert werden (siehe Abb. 3.50 und 3.51). Die nicht von Roboterarmen erreichbaren Punkte sind auch zu sehen, etwa bei $x = -12$ oder $x = +12$.

Auch wenn das Spielen mit Graphen an sich schon einen Bildungs- und Motivationswert hat, sollten den Schülern, im Interesse des Zieles "Schulung des strukurierten Problemlösens", Arbeitsaufträge zur Dokumentation ihrer Beobachtungen gegeben werden, das heißt, gelenktes Entdecken ist die für dieses Problemlösen adäquate Schüleraktivität.

So müßte spätestens in der Interpretationsphase der Bereich angegeben werden können, den ein Roboter mit vorgegebener Armlänge erreichen kann: P muß in einem Kreisring mit

$|a\text{-}b| \leq OP \leq a+b$ liegen.

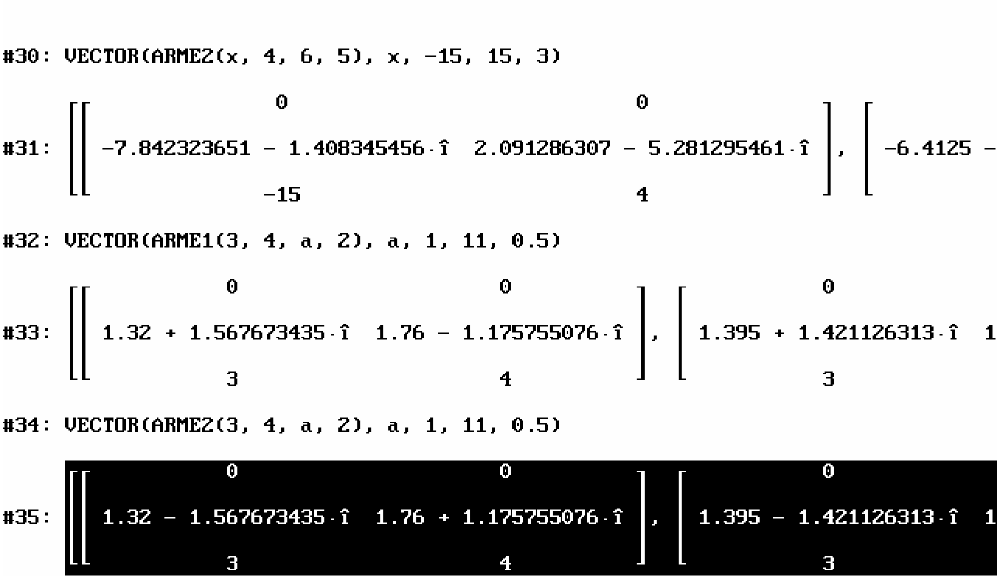


Abb.3.49: Testen und Interpretieren

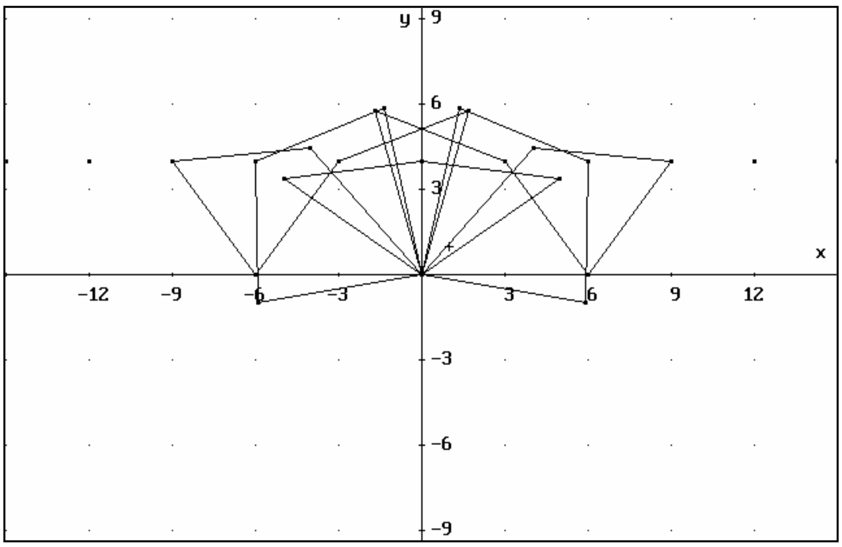


Abb.3.50: Testen und Interpretieren

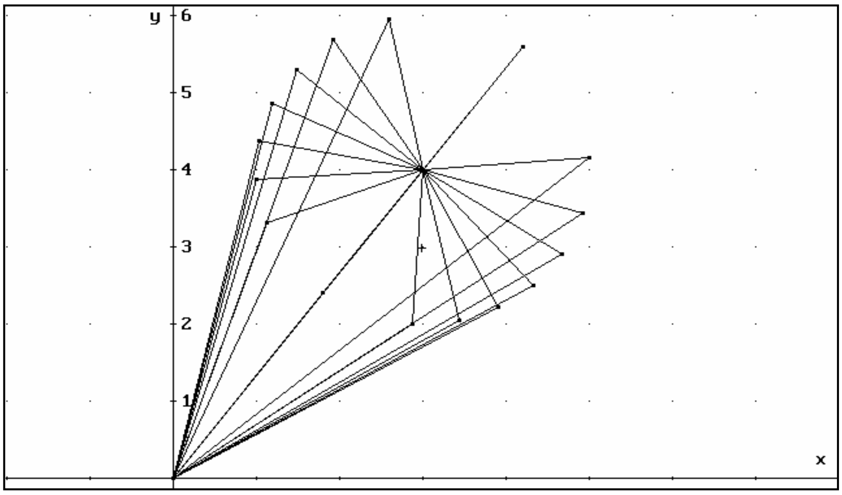


Abb.3.51: Testen und Interpretieren

Schritt 4: Modellverbesserung

Ziel dieser Testserien ist ja schließlich neben der Interpretation auch eine daraus resultierende Verbesserung und Weiterentwicklung des Modells.

Folgende Fragen könnten in einem zweiten Schleifendurchlauf diskutiert und bearbeitet werden:

- Wie kann man durch Abfragen schon von der Eingabe her die Lösungen auf diesen Bereich, das heißt auf diesen Kreisring, beschränken?
- Wie ermittelt man die gesuchten Winkel, welche die eigentlichen Steuerungsgrößen für die Bewegung des Roboters sind?
- Wie programmiert man ein 'Winkelmodul'?
- Wie würde der Problemlöseprozeß bei einem trigonometrischen Modell aussehen?

Im folgenden Beispiel sollen die neuen Möglichkeiten für anwendungsorientiertes Problemlösen aufgezeigt werden, die sich aus der Verwendung iterativer und rekursiver Modelle ergeben. Es wurde dadurch ein neuer Lösbarkeitsbegriff geschaffen: Lösen heißt Nutzen des iterativen Modells zur Simulation, sowie Untersuchen der Auswirkung von Parametern auf die Lösung.

Beispiel 3.12: Sterile Insektentechnik (S.I.T.)

[vgl. Timischl, 1988, S. 22]

Eine Insektenpopulation mit anfangs x_0 Weibchen und x_0 Männchen möge bei natürlichem Wachstum pro Generation jeweils auf das R-fache anwachsen. Zur Bekämpfung der Population wird pro Generation eine bestimmt Anzahl S von sterilen Männchen freigesetzt, die sich mit der Naturpopulation völlig vermischt (Sterile Insektentechnik - S.I.T.). Mögliche Modellannahme: $x_0 = 1$ Million.

Problemanalyse

Aus dieser offen formulierte Aufgabe ergeben sich verschiedene Fragen, wie etwa:

(1) Wie groß muß S sein, damit ein weiterer Populationszuwachs verhindert wird ? (Voraussetzung: vorgegebene Populationsgröße x_0 und bekannte Wachstumsrate R).

(2) Wie groß kann x_0 sein, damit bei bekanntem R und gegebenem S die Population abnimmt?

(3) Wie verhält sich das Populationswachstum für verschiedene Ausgangsgrößen *R, S* und x_0?

(4) Unter welchen Bedingungen konvergiert die rekursiv definierte Folge?

(5) Wie sieht es mit dem Stabilitätsverhalten von Gleichgewichtszuständen aus?

(6) Welche theoretischen mathematischen Kenntnisse benötigt man beim Modellbilden, beim Operieren und zur Absicherung der praktischen Ergebnisse?

Man wird natürlich die Schüler nicht sofort mit allen Fragen überfallen (dann wäre es ja keine offene Aufgabe), sondern der am Anfang dieses Kapitels beschriebene Problemlösezyklus soll sich ausgehend von ersten Analysen, Modell- und Lösungsversuchen durch ständige Interpretation möglichst selbständig entwickeln.

In der didaktischen Literatur spricht man von 'gelenktem Entdecken'. Es sind sicher immer wieder Anregungen seitens des Lehrers in Form von Fragen, Aufträgen oder Angabe von Eingangsgrößen notwendig, aber mit Hilfe des CAS kann der Schüler einen wesentlichen Teil des Problemlösezyklus selbsttätig bewältigen.

Erste Modellentscheidung

Das verbale Modell "wächst pro Generation auf das *R*-fache" wird mathematisiert:

$x_{neu} = R.x_n$. Werden *S* sterile Männchen freigelassen, so ist nur der Anteil $x_n/(x_n+S)$ fertil. Dementsprechend ist auch der Anteil der fertilen Paarungen. Somit ergibt sich als neues Modell für die männliche und für die weibliche Population in der Folgegeneration:

$$x_{neu} = \frac{R\,x_n^2}{x_n + S} \quad 10$$

Zu Frage 1: Die Population nimmt ab, wenn bei bekanntem *R* und *S* gilt

$x_{neu} < x_n$ 11 oder $\frac{x_{neu}}{x_n} < 1$ 12.

Es stellt sich nun die methodische Frage, ob es bei solchen Ungleichungen sinnvoll ist, das CAS einzusetzen, oder ob man nicht eher vom Schüler verlangen sollte, diese Ungleichungen "zu Fuß" zu lösen. Auf Grund der Erfahrungen, die wir in unserem CAS-Projekt gemacht haben, würden wir empfehlen: Wenn das CAS nur ab und zu als didaktisches Werkzeug eingesetzt wird und als Rechenhilfe keine Bedeutung hat, sollte man solche Aufgaben ohne CAS lösen. Wenn die Schüler aber das CAS in jeder Arbeitssituation zur Verfügung haben, also auch zu Hause und in der Prüfungssituation, werden sie mit der Zeit das Werkzeug CAS selbsverständlich auch bei solchen Aufgaben einsetzen. Der folgende Abschnitt soll zeigen, daß sie dabei nicht weniger Mathematik verstehen müssen, sondern eher mehr, auf jeden Fall im Bereich des Begründens und Interpretierens.

Erstes Operieren

Es wird der Quotient x_{neu}/x_n gebildet.

$$\#1: \quad x\_neu = \frac{R \cdot xn^2}{xn + S} \qquad \text{User}$$

$$\#2: \quad \frac{x\_neu = \dfrac{R \cdot xn^2}{xn + S}}{xn} \qquad \text{User}$$

$$\#3: \quad \frac{x\_neu}{xn} = \frac{R \cdot xn}{S + xn} \qquad \text{Simp(\#2)}$$

Das CAS erzieht die Schüler zum Überlegen von sinnvollen Definitionsbereichen, da ansonsten vor allem beim Lösen von Ungleichungen überraschende Ergebnisse vorkommen können.

```
#4:   S :ε Real (0, ∞)                                        User
#5:   R :ε Real (1, ∞)                                        User
#6:   x0 :ε Real (0, ∞)                                       User
```

Nun wird die zugehörige Ungleichung mit **soLve** gelöst:

$$\#7:\quad \frac{R\cdot x0}{S + x0} < 1 \qquad\qquad \text{Simp(User)}$$

$$\#8:\quad (S + x0)\cdot(S - x0\cdot(R - 1)) > 0 \qquad\qquad \text{Solve(\#7)}$$

Da in dem von DERIVE gelieferten Produkt (#8) der erste Faktor sicher größer Null ist, folgt:

$$\#9:\quad S - x0\cdot(R - 1) > 0 \qquad\qquad \text{User}$$

Diese Ungleichung löst das CAS:

$$\#10:\quad S > x0\cdot(R - 1) \qquad\qquad \text{Solve(\#9)}$$

Erstes Ergebnis

Die Anzahl S der ausgesetzten sterilen Männchen muß größer sein als das (R-1)-fache der Anfangszahl x_0, wenn man eine Abnahme der Population erreichen will. Unter der Modellannahme x_0 = 1 Million und R = 3 benötigt man somit mehr als 2 Millionen sterile Männchen.

Interpretation und Bearbeitung weiterer Fragen

Zu Frage 2: Für welche x_0 nimmt die Population bei gegebenem R und S ab?

Wieder ist dieselbe Ungleichung (#11) zu lösen, nur diesmal nach x_0:

$$\#11:\quad \frac{R\cdot x0}{S + x0} < 1 \qquad\qquad \text{User}$$

$$\#12:\quad (x0 + S)\cdot(x0\cdot(R - 1) - S) < 0 \qquad\qquad \text{Solve(\#11)}$$

Dieses Produkt ist, wie schon vorher ausgeführt, dann kleiner als Null, wenn der zweite Faktor kleiner als Null ist.

$$\#13:\quad x0\cdot(R - 1) - S < 0 \qquad\qquad \text{User}$$

Hätte man nicht vorher die Definitionsbereiche bestimmt, würde man diesen, für die Schüler verwirrenden Ausdruck erhalten:

$$\#14a:\quad x\ \mathrm{SIGN}(R - 1) < \frac{S}{|R - 1|}$$

Bei vorgegebenen Definitionsmengen ergibt sich dagegen die erwartete Lösung:

```
#14: x0 <   S                                      Solve(#13)
          -----
          R - 1
```

Weiteres Ergebnis

Bei bekannter Wachstumsrate R und vorgegebener Anzahl S an sterilen Männchen ist eine Abnahme der Population nur zu erwarten, wenn $x_0 < \frac{S}{R-1}$ 13 ist, etwa bei der Annahme R=3 und S=4, wenn $x_0 < 2$ ist.

Auch beim zweiten Durchlauf des Problemlösezyklus treten wieder die drei Phasen Modellbilden, Operieren und Interpretieren auf.

Zweites Modell

Die erste Modellentscheidung zeigt, daß die Populationsgröße als Funktion der Größe der vorhergehenden Stufe dargestellt werden kann:

$x_{n+1} = \frac{R\, x_n^2}{x_n + S}$ 14 , allgemein $x_{n+1} = N(x_n)$ 15

Beim Modell handelt es sich um eine explizite Differenzengleichungen 1. Ordnung. Eine Zahlenfolge $<x_n>$ mit vorgegebenem Anfangswert x_o und mit $x_{n+1} = N(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_o$ nennt man Lösungsfolge der Differenzengleichung.

Durch den Computer - und hier insbesonderen durch das CAS - wurde ein neuer Lösbarkeitsbegriff geprägt: Akzeptierte man im klassischen Mathematikunterricht nur explizite Lösungen eines Problems - also solche, die man mit Hilfe einer begrenzten Menge elementarer Funktionen und Operationen angeben konnte - so gilt heute eine Klasse von Problemen als lösbar, wenn mit Hilfe praktikabler (z.B.: rekursiver oder iterativer) Algorithmen durch Computersimulation Daten in einer Tabelle dargestellt oder grafisch veranschaulicht werden können.

Wir entwickeln nun ein iteratives Modell, mit dem die Abhängigkeit der Insektenpopulation von der Zeit (d.h.von der Anzahl der Generationen) dargestellt werden kann. Wir veranschaulichen n Elemente der Folgen $x_n = f(n)$.

Mit Hilfe der DERIVE-Funktion ITERATES(N(x_n),x_n,x_o,n) wird beginnend mit $x_n = x_o$ die Zuweisung $N(x_n) \rightarrow x_n$ n-mal wiederholt.

```
#1:  Precision := Approximate                          User
```

Um zu zeigen, was die ITERATES-Funktion bewirkt, definieren wir zuerst eine sogenannte 'leere' Funktion (Zeile #2)

```
#2:  N(xn) :=                                          User

#3:  SIT(x0, sz) := ITERATES(N(xn), xn, x0, sz - 1)    User
```

In Zeile #4 wird mit Hilfe von ITERATES die Zuordnung $N(x_n) \rightarrow x_n$ mit der Schrittzahl sz = 8 achtmal ausgeführt.

```
User=Simp(User)
```

```
#4:   SIT(x0, 8) = [x0, N(x0), N(N(x0)), N(N(N(x0))),
      N(N(N(N(x0)))), N(N(N(N(N(x0))))),
      N(N(N(N(N(N(x0)))))), N(N(N(N(N(N(N(x0)))))))]
```

Für die Simulation benötigt man eine Funktion, die Zahlenpaare für eine Wertetabelle bzw. für die grafische Darstellung liefert (siehe Zeile #5).

```
User
#5:   SIT_ZEIT(x0, sz) := ITERATES([m + 1, N(xn)], [m, xn],
                          [0,x0], sz-1)
```

Das Beispiel in Zeile #6 soll wieder veranschaulichen, wie die Funktion SIT_ZEIT arbeitet:

```
User=Simp(User)
                          ┌ 0            x0              ┐
                          │ 1           N(x0)            │
                          │ 2         N(N(x0))           │
                          │ 3        N(N(N(x0)))         │
#6:   SIT_ZEIT(x0, 8) =   │ 4      N(N(N(N(x0))))        │
                          │ 5     N(N(N(N(N(x0)))))      │
                          │ 6   N(N(N(N(N(N(x0))))))     │
                          └ 7  N(N(N(N(N(N(N(x0)))))))   ┘
```

Operieren heißt bei diesem Problem nicht rechnen, sondern simulieren mit Hilfe des CAS.

Zweites Operieren: *Simulation in Abhängigkeit von der Zeit*

Nun soll für das iterative Modell des S.I.T-Problems die Simulation mit Hilfe der Funktion SIT_ZEIT aus Zeile #5 durchgeführt werden. Es wird mit verschiedenen Anfangswerten x_0 experimentiert, etwa mit $x_0 = 1.7$, $x_0 = 2.2$ und $x_0 = 2$ (Millionen). Mit **Simplify** erhält man die jeweilige Wertetabelle (siehe Abb. 3.52).

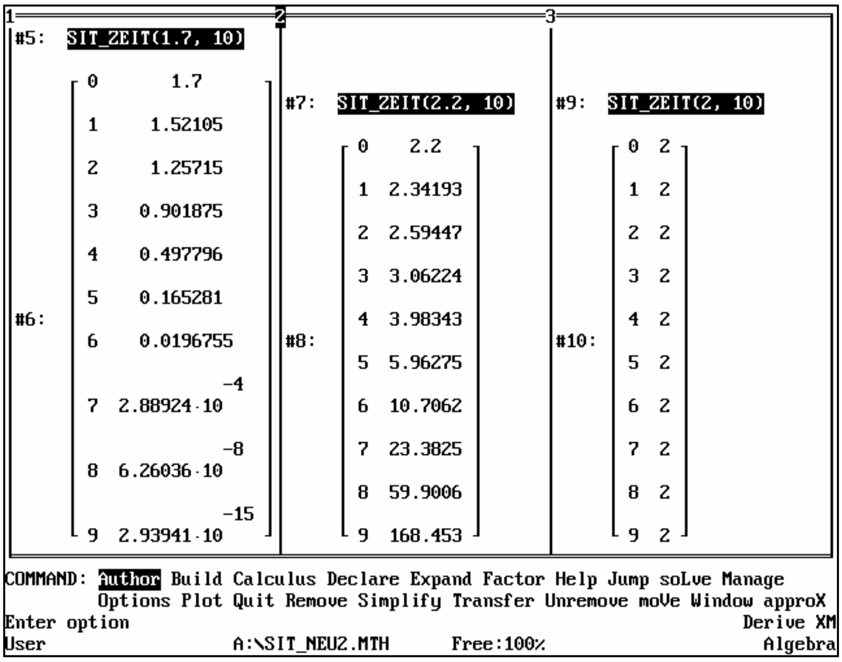


Abb.3.52: Simulation in Abhängigkeit von der Zeit

Interpretation durch Visualisierung

Die mit Simplify ermittelten Wertetabellen setzt man mit **Plot** in Graphen um (wichtig ist die Einstellung **Transfer State** *Connected* zur Verbindung der Punkte). Die für einen optimalen Bildausschnitt notwendigen Einstellungen sollen die Schüler experimentell ermitteln.

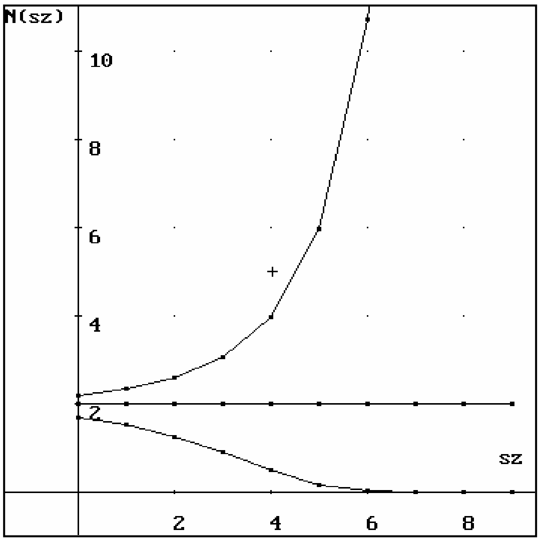


Abb.3.53: Interpretation

Die Grafik (Abb. 3.53) erhärtet neuerlich die Vermutung, daß die Population für $x_0<S/(R\text{-}1)$ - also für $x_0<2$ - ausstirbt, für $x_0>2$ wächst und für $x_0=2$ konstant bleibt.

Drittes Modell: Simulation in Form der 'geometrischen Iteration'

Eine andere Form der Darstellung, die in anschaulicher Weise zu Vermutungen über das Konvergenzverhalten rekursiv definierter Funktionen führt, ist die geometrische Iteration in der $(x_n,\ x_{n+1})$-Ebene. Dazu zeichnet man zuerst die Funktion $x_{n+1} = N(x_n)$ sowie die erste Mediane $x_{n+1} = x_n$.

Zu einem gegebenen Startwert x_o ermittelt man den Funktionswert $x_1 = N(x_o)$ auf dem Graphen von N. Durch eine Parallele zur x_n-Achse kommt man zum Punkt (x_1,x_1) auf der ersten Mediane. Somit hat man grafisch das Argument x_1, um damit auf dem Graphen von N den Wert $x_2 = N(x_1)$ zu ermitteln usw. Die mit Hilfe des Computers entstehende Treppe ist dann Grundlage für das Experimentieren mit verschiedenen Parametern x_0, R und S und für Vermutungen über Konvergenz. Sie kann aber auch Ausgangspunkt für eine theoretische Absicherung der Vermutungen sein.

```
#1:  Precision := Approximate

                   2
                R·xn
#2:  N(xn) :=  ──────
               xn + S

#3:  SIT(x0, sz) := ITERATES(N(xn), xn, x0, sz - 1)

#4:  MED(xn) := xn

                    ┌ x0    0    ┐
#5:  AUFTAKT(x0) := │            │
                    └ x0  N(x0)  ┘

                 ┌  xn      N(xn)    ┐
                 │                   │
#6:  TREP(xn) := │ N(xn)    N(xn)    │
                 │                   │
                 └ N(xn)  N(N(xn))   ┘

#8:  SIT_WEB(x0, sz) := APPEND([AUFTAKT(x0)], VECTOR(TREP(xn), xn, ITERATES(N(xn

#9:  SIT_WEB(1.7, 15)
```

Abb.3.54: Geometrische Iteration

Für das eigentlichen Simulationsmodul SIT_WEB benötigt man zwei Unterprogramme, das Modul AUFTAKT (#5), das die Starttreppe erzeugt, und das Modul TREP (#6), das eine Stufe für ein bestimmtes x_n darstellt. Die Gesamttreppe wird durch die Funktion SIT_WEB generiert (Abb. 3.54).

SIT_WEB(x_0,sz) := APPEND([AUFTAKT(x_0)], VECTOR(TREP(x_n),x_n,
ITERATES(N(x_n),$x_{x,}$,x_0,sz-1)))

Bei Schülergruppen, die den Computer nicht in jeder Arbeitssituation verwenden, oder bei Schulformen mit wenig Mathematikstunden könnte das Modul SIT_WEB den Schülern auch als Black Box zur Verfügung gestellt werden (siehe dazu auch das Kapitel 4.3 'Das Modulprinzip'). Dann wird das dazugehörige File als Utiliy-File geladen, so daß der Schüler die Programmteile gar nicht zu Gesicht bekommt und nur die Funktion SIT_WEB(x0,sz) aufrufen muß (*x*0 ist der Startwert und *sz* die Schrittzahl).

Wichtiger ist, daß der Schüler die Idee der geometrischen Iteration mit Hilfe grafischer Veranschaulichung (etwa geeignete Overheadfolien) oder Darstellung einzelner Treppenstufen mit Hilfe der Funktion TREP) verstehen lernt.

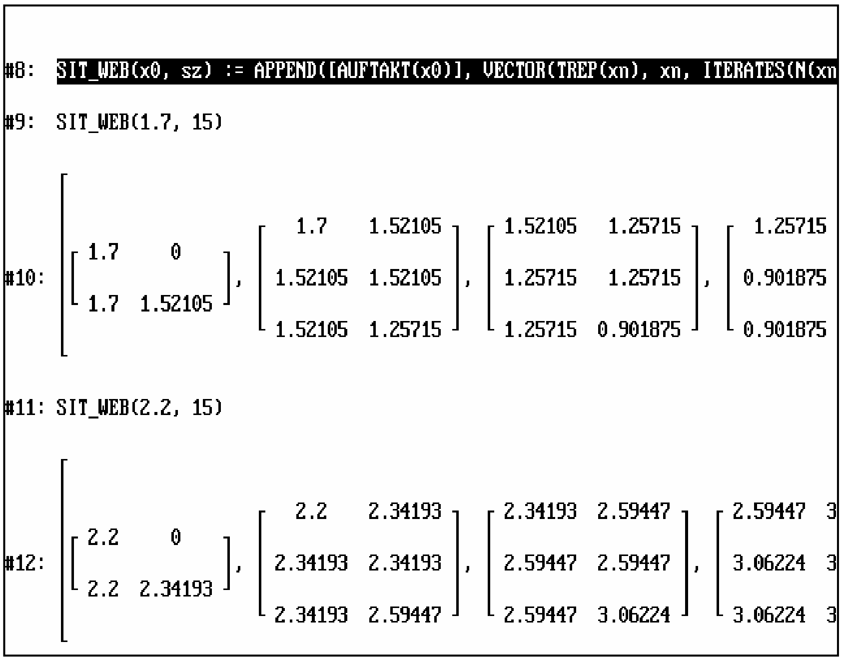


Abb.3.55: Simulieren

Mit **Simplify** liefert die in Zeile #9 eingegebene Funktion SIT_WEB(1.7,15) einen Vektor, dessen Elemente die 15 Treppenstufen sind (#10 in Abb. 3.55). Analog bei Änderung der Eingabegröße $x_0 = 2.2$ in Zeile #11.

Drittes Interpretieren:

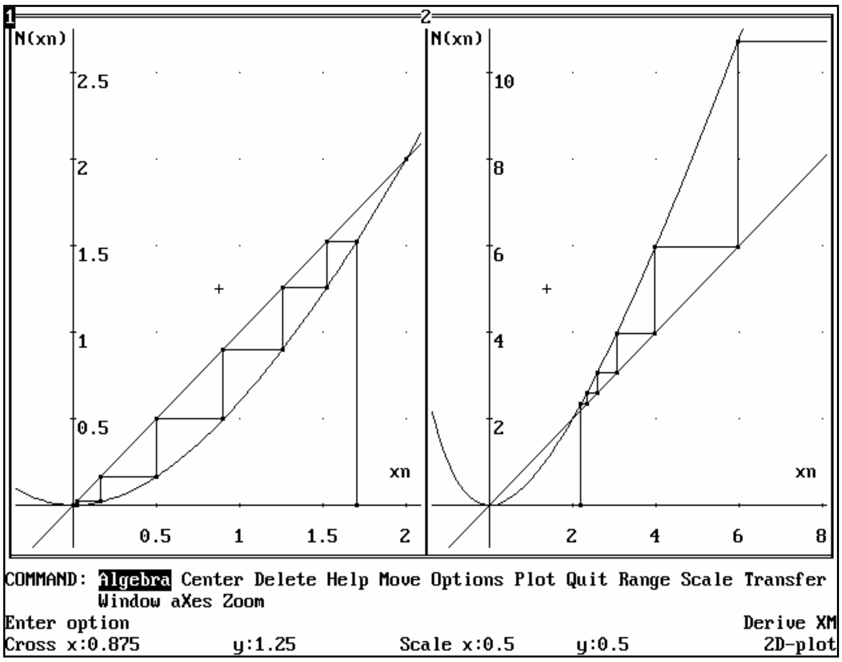


Abb.3.56: Interpretieren

Die Graphen in Abb. 3.56 bestätigen die Vermutung, daß die Lösungsfolge für x_o<2 konvergiert (siehe linkes Fenster). Die Treppe zieht sich beginnend beim Startwert $x_0 = 1.7$ zum Nullpunkt zurück. Für x_o>2 divergiert die Lösungsfolge (siehe rechtes Fenster). Die Treppe wächst beginnend bei $x_0 = 2.2$ über alle Grenzen. Für x_o=2 ergibt sich die konstante Lösungsfolge <2,2,2...>, die bei der geometrischen Iteration natürlich nur einen Punkt mit Koordinaten [2,2] ergibt.

Weitere Untersuchungen für verschiedene Parameter *R, S* und x_o sollten folgen.

Nun könnte man sich von diesem konkreten Problem lösen und versuchen, in einer Exaktifizierungsphase die durch Simulation und Visualisierung gewonnenen Vermutungen zu hinterfragen, dabei aber gerade die Graphen und ersten Ergebnisse für das Exaktifizierungskonzept nutzen.

Exaktifizieren: Theoretische Überlegungen, die zur Absicherung der Vermutungen dienen.

Gegeben sei eine explizite Differenzengleichung 1.Ordnung $x_{n+1} = g(x_n)$. g sei stetig differenzierbar. Eine explizite Abhängigkeit des allgemeinen Folgengliedes x_n vom Index n (also $x_n = f(n)$) nennt man explizite Lösung der Differenzengleichung. Mit Ausnahme der linearen Differenzengleichungen wird es in der Schule schwer möglich sein, explizite Lösungen zu finden (es sei denn mit einem CAS als Black Box). Damit wird aber eine Konvergenzuntersuchung entsprechend schwieriger.

Angenommen die zu einem gegebenen Anfangswert x_o gehörende Lösungsfolge von

$x_{n+1} = g(x_n)$ konvergiere gegen einen Grenzwert x^* (der nur noch nicht bekannt ist). Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, dann offensichtlich auch $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$. Die Folge $<x_{n+1}>$ ist ja gegenüber $<x_n>$ nur um "ein Glied verschoben". Mit Hilfe der Differenzengleichung und unter Berufung auf Grenzwertregeln könnte man zeigen:

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n))$

Das bedeutet aber: Falls der Grenzwert existiert, genügt er der Gleichung $x^* = g(x^*)$. Wesentlich schieriger ist es zu beweisen, daß eine rekursiv definierte Folge überhaupt einen Grenzwert besitzt. Meist überprüft man, ob die Folge streng monoton fallend und nach unten beschränkt oder streng monoton steigend und nach oben beschränkt ist.

Nun zurück zu unserem Problem: Schon bei der Bearbeitung des ersten Modells haben wir gezeigt, daß eine Abnahme zu erwarten ist, wenn $x_o < \frac{S}{R-1}$ 16. Dann ist $x_1 < x_o$.

Formt man nun die Differenzengleichung um und bildet $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{R}(1 + \frac{S}{x_n})$ 17 ,

so folgt aus $x_1 < x_o$ und somit aus $1/x_1 > 1/x_o$: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{R}(1 + \frac{S}{x_1}) > \frac{1}{R}(1 + \frac{S}{x_o}) > 1$ 18.

Daraus folgt wiederum: $x_2 < x_1$ usw. Da sämtliche Variablen positiv sind, ist bei dieser rekursiv definierten Folge 0 untere Schranke.

Wenn aber alle Lösungsfolgen mit $x_o < \frac{S}{R-1}$ 19 streng monoton fallend und nach unten beschränkt sind, besitzen sie auch einen Grenzwert, der wie oben ausgeführt, Lösung der Gleichung $x^* = g(x^*)$ sein muß. Nun kann man (eventuell mit dem CAS) die Lösungen der Gleichung ermitteln:

```
#1:  R :ε Real (1, ∞)                                User

#2:  S :ε Real (0, ∞)                                User

#3:  x :ε Real (0, ∞)                                User

                2
             R·x
#4:  x = ─────────                               Simp(User)
            x + S
```

Mit **soLve** liefert DERIVE zwei Lösungen:

```
#5:   x = 0                                              Solve(#4)

              S
#6:   x = ───────                                        Solve(#4)
            R - 1
```

Da laut Voraussetzung $x_o < \frac{S}{R-1}$ 20 ist, kommt als Grenzwert nur die Lösung 0 in Frage. Damit bestätigen die Überlegungen dieser theoretischen Phase die Vermutungen, die aus Simulation und Visualisierung gewonnen wurden. Was ist aber mit der zweiten Lösung der obigen Gleichung? Nimmt man als Startwert $x_o = \frac{S}{R-1}$ 21, so entsteht eine konstante Lösungsfolge $<x_o>$. Alle Punkte mit dieser Eigenschaft nennt man *Fixpunkte* oder *Gleichgewichtspunkte* der Differenzengleichung.

Bei biologischen Systemen, die sich in einem Gleichgewichtszustand befinden, ist besonders interessant, wie das System bei Störungen der Gleichgewichtszustände reagiert, ob es also bei Störungen wieder in die Ruhelage zurückkehrt oder nicht. Gefragt ist also das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtszustände.

Nun vom biologischen Problem wieder zur innermathematischen Exaktifizierung:

Ein Gleichgewichtspunkt x^* von $x_{n+1} = g(x_n)$ heißt *anziehend*, wenn es um x^* ein Intervall I $[x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon]$ mit $\varepsilon>0$ gibt, so daß jede in diesem Intervall beginnende Lösungsfolge gegen x^* konvergiert. Wenn es dagegen ein Intervall I um x^* gibt, so daß jede Lösungsfolge mit x_o aus I (und x_o ungleich x^*) das Intervall verläßt, so nennt man den Gleichgewichtspunkt *abstoßend*.

Mit Hilfe der geometrischen Iteration kann man diese Definition sehr gut veranschaulichen: 0 ist ein anziehender Gleichgewichtspunkt, $S/(R-1)$ ein abstoßender. Genauso kann man mit Hilfe dieser Treppen folgende Stabilitätsbedingung plausibel machen:

Ein Gleichgewichtspunkt x^* der Differenzengleichung $x_{n+1} = g(x_n)$, g sei eine stetig differenzierbare Funktion, ist anziehend, wenn $|g'(x^*)|<1$, und abstoßend, wenn $|g'(x^*)|>1$ ist. [vgl. Dorninger, 1988, Bd. II, S7]

In dieser Stabilitätsbedingung kommt sehr deutlich die fundamentale Idee der *Linearisierung* zum Tragen. Man ersetzt in einer Umgebung der Gleichgewichtsstelle die Funktion *g* durch die Tangente und schließt aus dem Stabilitätsverhalten der linearisierten Differenzengleichung auf das der ursprünglich gegebenen Gleichung.

Auch diesen Exaktifizierungsschritt kann man am konkreten Beispiel mit Hilfe des CAS ausführen:

Ermitteln der 1.Ableitung:

```
#1:   Precision := Exact                                    User

                         2
                     R·xn
#2:   N(xn)  :=  ───────────                                User
                   xn + S

      ┌ d  ┐1
#3:   │────│  N(xn)                                         User
      └d xn┘

       R·xn·(2·S + xn)
      ─────────────────
#4:                2                                       Simp(#3)
          (S + xn)
```

Man definiert eine Steigungsfunktion $k(x_n)$:

$$\#5: \quad k(xn) := \frac{R \cdot xn \cdot (2 \cdot S + xn)}{(S + xn)^2} \qquad \text{User}$$

Unsere Annahme ist:

```
#6:  [R := 3, S := 4]                                         User

#7:  k(0) = 0                                      User=Simp(User)
```

$$\#8: \quad k(2) = \frac{5}{3} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Aus $k(0)=0 < 1$ und $k(2)=5/3 > 1$ folgt: 0 ist ein anziehender, 2 ein abstoßender Fixpunkt.

Aufstellen der Tangentengleichungen (ab Zeile #9): Mit **Manage Substitute** können dann die einzelnen Tangentengleichungen durch Einsetzen für x_0 rasch gefunden werden, wobei mit DERIVE (ab Version 3.0) auch die impliziten Gleichungen geplottet werden können.

```
#9:  y - N(x0) = k(x0)·(x - x0)                               User

#10: y - N(0) = k(0)·(x - 0)                               Sub(#9)

#11: y = 0                                               Simp(#10)

#12: y - N(2) = k(2)·(x - 2)                               Sub(#9)
```

$$\#13: \quad y - 2 = \frac{5 \cdot (x - 2)}{3} \qquad \text{Simp(\#12)}$$

Nun können die Graphen gezeichnet und die Idee der Linearisierung kann mit Hilfe des **ZOOM**-Befehls veranschaulicht werden (Abb. 3.57)

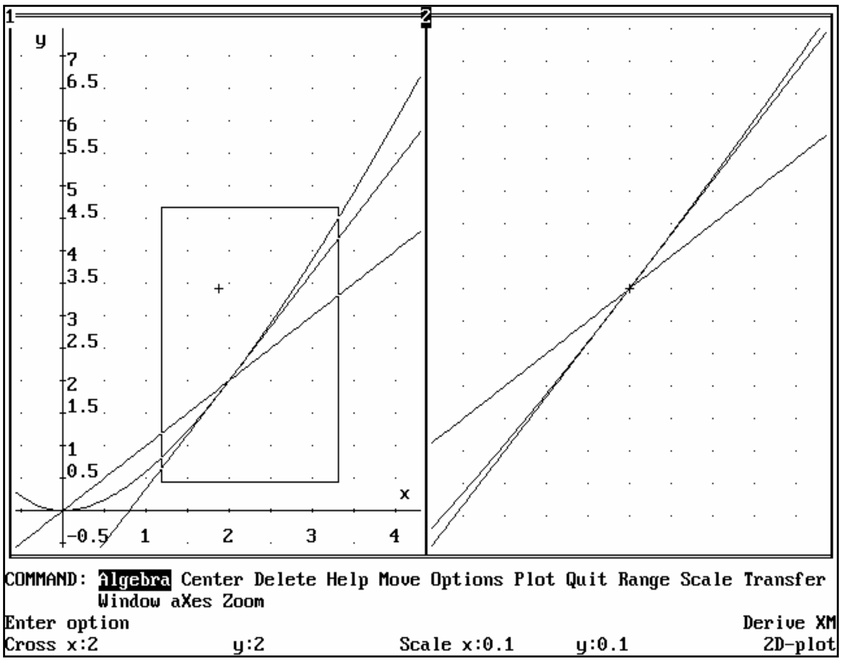


Abb.3.57: Exaktifizieren

Betrachtet man die Stabilitätsbedingung genauer, so fällt auf, daß der Fall $g'(x) = \pm 1$ ausgenommen wurde. Anders gefragt: Gibt es außer anziehenden und abstoßenden Gleichgewichtspunkten auch noch andere?

Nehmen wir zum Beispiel die lineare Differenzengleichung $x_{n+1} = -x_n + c$ ($c>0$), ermitteln wir mit dem CAS die ersten Glieder einer Lösungsfolge und versuchen, sie mit Hilfe der geometrischen Iteration zu visualisieren.

Man erhält für c=4 und x_o=1 die Folge <1,3,1,3,1,3,...>. Wie man dann auch aus dem Graphen sieht und aus dem Term der Differenzengleichung erkennen kann, oszilliert jede Lösungsfolge $\langle x_n \rangle$ mit x_o ungleich $c/2$ um den Gleichgewichtspunkt $x^* = c/2$ (siehe Abb. 3.58)

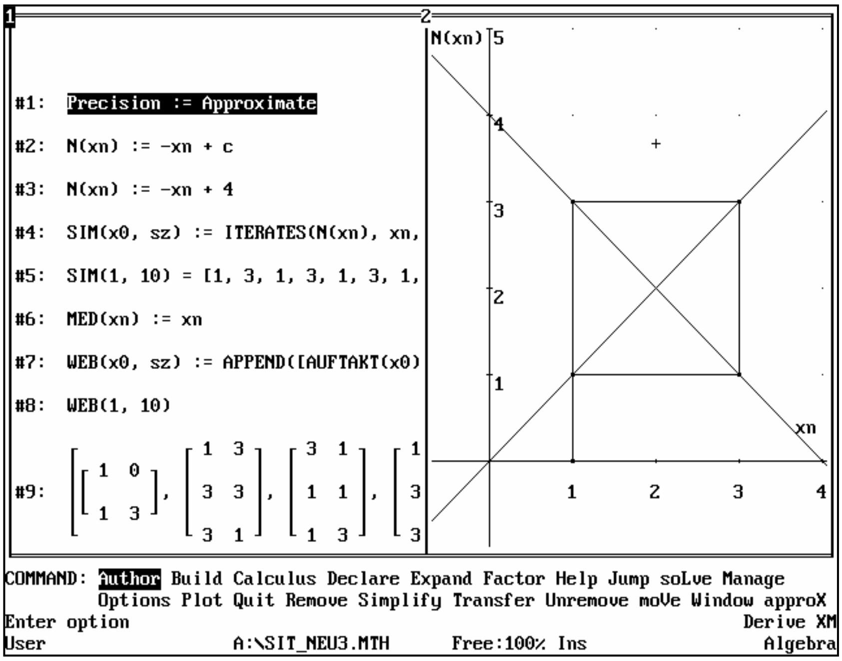


Abb.3.58: Sonderfälle

Nun könnte dieser Fall der Anlaß sein, Differenzengleichungen mit periodischen Lösungsfolgen zu untersuchen. Aber es ist nicht Ziel dieses Buchs, eine möglichst vollständige Abhandlung des Themas "Rekursive Modelle für den Schulunterricht" zu bieten.

Diese Fragen, die im Zuge der Exaktifizierung auftauchen, sollen nur aufzeigen, daß anwendungsorientiertes Problemlösen mit Unterstützung des CAS nicht nur ein unreflektiertes Verwenden von Black Boxes und ein Basteln von Modellen (anstelle der Anstrengung des Begriffsbildungsprozesses) bedeutet, sondern daß sich das Hinterfragen und Exaktifizieren oft notwendigerweise bei der Analyse der Modelle und der Interpretation der Ergebnisse des praktischen Problems ergibt, das heißt, die Deutung und die Verbesserung des Modells erfordern eine Exaktifizierung. Die Sinnhaftigkeit der Exaktifizierung ist hier für den Schüler aber wohl eher erkennbar, als wenn er den Gewissensbissen des Lehrers folgend einen Theorievorrat anlegt, von dem der Lehrer beteuert, daß er für die Zukunft doch so notwendig sei (was vielleicht bestenfalls wegen der drohenden Prüfung akzeptiert wird).

3.5.2. Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren

Wir haben dieser Phase deshalb ein eigenes Kapitel gewidmet, weil hier der Einfluß des Computers auf das Lernen von Mathematik besonders deutlich wird. Schon seit Mathematik als Problemlösetechnik eingesetzt wird, war es notwendig, die Richtigkeit von Lösungen zu überprüfen und die Lösungen zu interpretieren. Dazu muß man aber den Lernenden Strategien für Proben anbieten, das Schätzen und Überschlagsrechnen üben und vor allem Aufgaben so formulieren, daß die Notwendigkeit dieser Tätigkeit erkennbar wird - eigentlich eine Selbstverständlichkeit, wenn der gesamte Problemlöseprozeß Ziel des Mathematikunterrichts ist.

Zu den schon bisher bekannten Schwierigkeiten und den dafür in der didaktischen Literatur angebotenen Strategien beim algebraischen Operieren kommt bei Verwendung von CAS das Problem dazu, daß *Schüler Ergebnisse zu überprüfen und zu interpretieren haben, die sie nicht selber produziert haben*.

Ein weiteres Ergebnis unserer Untersuchungen erhöht die Gewichtung dieser Schnittstelle: Durch die Nutzung von CAS erhöht sich die Vielfalt der Lösungswege und somit auch der Ergebnisse sprunghaft. Vom 'algorithmischen Gehorsam' des klassichen Mathematikunterrichts, wo ein Großteil der Schüler die vom Lehrer vorgeführten Umformungsstrategien nachvollzogen hat, ist nicht mehr viel zu merken. Vor allem bei Schülern, die den Computer in jeder Arbeitssituation zur Verfügung haben, beobachtet man selbst in der Prüfungssituation, daß bei 10 Schülern mehr als 5 verschiedene algebraische Lösungswege vorkommen.

Da das Schönheitsideal mathematischer Lösungen relativ ist, kommt es bei Nutzung von CAS also öfter vor, daß die vom Computer angegebene Lösung nicht mit der vom Schüler oder Lehrer erwarteten Lösung übereinstimmt oder daß von verschiedenen Schülern gefundene Lösungen unterschiedlich aussehen. Schüler wissen dann natürlich zuerst einmal nicht, ob ihre erwartete oder die ermittelte Lösung falsch ist oder ob die verschiedenen Lösungen vielleicht doch äquivalent sind.

Um solche Entscheidungen treffen zu können, sind neue Strategien notwendig, bei denen man sich die Möglichkeiten des CAS zunutze machen kann. Jenen, die befürchten, die Verwendung des Computers würde nur ein verständnisloses Experimentieren mit Black Boxes bedeuten, sei gesagt, daß für diese Tätigkeit sehr wohl ein Verständnis der Algebra oder des verwendeten Algorithmus notwendig ist, und zwar mehr, als wenn man Operationen mechanisch 'zu Fuß' ausführt. Eine auf Zufall aufgebaute Versuch und Irrtummethode bringt hier keinen Erfolg.

Bei dieser Phase des Problemlöseprozesses - für uns eine der heikelsten Phasen des CAS-unterstützten Mathematikunterrichts - stehen wir erst am Anfang der Untersuchungen. Erste Ergebnisse sollen in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden. Die Aufgaben stammen aus Versuchen in der 7. und 8. Schulstufe. Nicht alle Strategien wurden den Schülern von den Lehrern vorgegeben, manche haben die Schüler auch durch experimentelles Lernen selbstentdeckt.

Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren in der Algebra

Beispiel 3.13: Verzinsung

Ein Kapital K wird um p % vermehrt. Ermittle eine Formel für das neue Kapital.

Bei dieser Aufgabe fanden die Schüler verschiedenste Lösungen, wie zum Beispiel:

#1: $K\cdot\left[1+\frac{p}{100}\right]$ User

#2: $K+\frac{K\cdot p}{100}$ User

#3: $K+K\cdot\frac{p}{100}$ User

#4: $K\cdot\frac{100+p}{100}$ User

Darunter waren natürlich auch falsche Ergebnisse:

#5: $K\cdot(1+p)$ User

#6: $K+\frac{p}{100}$ User

$$\#7: \quad K\cdot\frac{1+p}{100} \qquad \text{User}$$

Nun galt es, Strategien zu suchen, um die richtigen Lösungen zu finden und ihre Äquivalenz zu beweisen.

Strategie 1: Umformen mit CAS-Befehlen

Nutzen der DERIVE-Befehle **Simplify**, **Expand** oder **Factor**, um eine Lösung in eine andere umzuformen. Dabei ist für Schüler und Lehrer von Vorteil, daß mit der Einstellung *Annotate Yes* die verwendeten Umformungen mit aufgezeichnet werden. So führt **Expand** die Gleichung #1 in die Gleichung #8 über, womit die Äquivalenz von #1 und #2 bewiesen wird.

$$\#8: \quad \frac{K\cdot p}{100} + K \qquad \text{Expd(\#1)}$$

Durch Faktorisieren von #2 zeigt man die Äquivalenz von #2 und #4:

$$\#9: \quad \frac{K\cdot(p+100)}{100} \qquad \text{Fctr(\#2)}$$

Simplify ändert an #1 praktisch nichts, da DERIVE die faktorisierte Form als 'schön' annimmt. Gerade deshalb wird mit diesem Befehl aber gezeigt, daß #3 und auch #2 äquivalent zu #1 sind.

$$\#10: \quad K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] \qquad \text{Simp(\#1)}$$

$$\#11: \quad K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] \qquad \text{Simp(\#3)}$$

$$\#12: \quad K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] \qquad \text{Simp(\#2)}$$

Mit derselben Strategie können Schüler auch erkennen, daß die Formeln #5, #6 und #7 falsch sind:

$$\#12: \quad K\cdot p + K \qquad \text{Expd(\#5)}$$

$$\#13: \quad \frac{K\cdot p}{100} + \frac{K}{100} \qquad \text{Expd(\#7)}$$

Strategie 2: Differenzbildung

Diese Strategie wurde schon in Kap. 2.2 beim Vergleich von Stammfunktionen vorgestellt. Man bildet die Differenz zweier Terme, von denen man vermutet, daß sie äquivalent sind. Vereinfacht man mit **Simplify** oder verwendet den Gleichheitsoperator (ab DERIVE-Version 3.0), der dem Simplify-Befehl entspricht, so müßte man bei Äquivalenz der Terme als Ergebnis 0 erhalten. In Zeile #14 wird die Differenz von #1 und #2 gebildet:

$$\#14: \quad K\cdot\left[1 + \frac{p}{100}\right] - \left[K + \frac{K\cdot p}{100}\right] = 0 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Bildet man die Differenz von #4 und #7, so ergibt sich ein Ergebnis ungleich 0. Eine der beiden Formeln muß also falsch sein:

$$\#15:\ K\cdot\frac{100 + p}{100} - K\cdot\frac{1 + p}{100} = \frac{99\cdot K}{100} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Strategie 3: Bilden von Gleichungen

Will man etwa die Äquivalenz der Terme T_1 (Zeile #1) und T_4 (Zeile #4) untersuchen, bildet man die Gleichung $T_1 = T_4$.

$$\#16:\ K\cdot\left[1 + \frac{p}{100}\right] = \frac{K\cdot(p + 100)}{100} \qquad \text{User}$$

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Gleichung zu bearbeiten:

a) Verwenden des **soLve**-Befehls: Sind die beiden Terme äquivalent, so ist die Gleichung allgemein gültig. Jedes beliebige Element der gemeinsamen Definitionsmenge ist Lösung. DERIVE drückt das mit dem Symbol '@n' aus (man denke sich @ als Abkürzung für 'beliebig'). *n* durchläuft bei mehreren vorkommenden Variablen die Zahlen 1,2 usw. Bei Lösung der Gleichung #16 nach den Variablen *K* und *p* ergeben sich solche allgemeingültigen Lösungen (#17 und #18):

```
#17: K = @1                                   Solve(#16)

#18: p = @2                                   Solve(#16)
```

Bildet man dagegen eine Gleichung aus zwei nicht äquivalenten Termen (#2 und 6), so erhält man mit **soLve** konkrete Werte für *K* und für *p*, also keine Allgemeingültigkeit der Gleichung:

$$\#19:\ K + \frac{K\cdot p}{100} = K + \frac{p}{100} \qquad \text{User}$$

```
#20: K = 1                                    Solve(#19)

#21: p = 0                                    Solve(#19)
```

b) Bearbeiten der Gleichung oder auch nur einer Seite der Gleichung (dies kann durch Unterlegung mit Hilfe der Cursorsteuerung entschieden werden) mit den Befehlen **Expand**, **Faktor** oder **Simplify**. Dadurch kann wieder die Äquivalenz erkannt werden. Der Befehl **Expand** wandelt die Gleichung #16 etwa folgendermaßen um:

$$\#22:\ \frac{K\cdot p}{100} + K = \frac{K\cdot p}{100} + K \qquad \text{Expd(\#16)}$$

Faktorisiert man die Gleichung aus zwei nicht äquivalenten Termen (#19), so erhält man #23:

$$\#23:\ \frac{K\cdot(p + 100)}{100} = \frac{100\cdot K + p}{100} \qquad \text{Fctr(\#19)}$$

c) Äquivalenzumformungen: Mit Hilfe dieser bei CAS möglichen Umformungen könnte die Gleichung etwa mit 100 multipliziert werden usw. Gezeigt wird das bei der Strategie 4 (Gleichungsketten).

d) Visualisierung: Bei Termen mit einer Variablen könnten die Funktionsgraphen der linken und der rechten Seite der Gleichung gezeichnet und verglichen werden, und daraus können Vermutungen über die Äquivalenz gewonnen werden. Ein Beispiel dafür folgt bei Schnittstellenproblemen in der Analysis.

Strategie 4: Gleichungsketten

Diese Strategie wurde etwa von Schülern selbst entwickelt. Untersucht man die Äquivalenz mehrerer Terme T_1, T_2, T_4 und T_7 (die Indizes entsprechen den Zeilennummern am Beginn des Beispiels), so kann man auch sofort die 'Gleichungskette' $T_1 = T_2 = T_4 = T_7$ bilden.

$$\#24:\; K\cdot\left[1 + \frac{p}{100}\right] = K + \frac{K\cdot p}{100} = K\cdot\frac{100 + p}{100} = K\cdot\frac{1 + p}{100}$$

Nun können wie schon bei Strategie 3 entweder die Befehle **Expand**, **Factor** oder **Simplify** angewendet werden. Simplify liefert nur die Erkenntnis, daß T_1 und T_2 äquivalent sind, und es zeigt sich auch, daß T_4 und T_7 nicht äquivalent sind:

$$\#25:\; K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] = K\cdot\left[\frac{p}{100} + 1\right] = \frac{K\cdot(p+100)}{100} = \frac{K\cdot(p+1)}{100}$$

Besser ist hier die Verwendung des Befehls **Expand**:

$$\#26:\; \frac{K\cdot p}{100} + K = \frac{K\cdot p}{100} + K = \frac{K\cdot p}{100} + K = \frac{K\cdot p}{100} + \frac{K}{100}$$

Wie in Strategie 3c) können auch Äquivalenzumformungen durchgeführt werden. Multipliziert man die ganze Gleichungskette mit 100

$$\#27:\; \left[K\cdot\left[1 + \frac{p}{100}\right] = K + \frac{K\cdot p}{100} = K\cdot\frac{100+p}{100} = K\cdot\frac{1+p}{100}\right]\cdot 100$$

und vereinfacht mit Simplify, so erhält man

$$\#28:\; K\cdot(p + 100) = K\cdot(p + 100) = K\cdot(p + 100) = K\cdot(p + 1)$$

Es zeigt sich also auch bei dieser Strategie, daß #1, #2 und #4 äquivalent sind, #7 dagegen nicht.

Strategie 5: Faktor suchen

Beim Vergleich zweier Terme T_1 und T_4 sucht man mit Hilfe des CAS einen Faktor '*FAKT*', so daß gilt: $T_1 \,.\, FAKT = T_4$. Wie leicht einzusehen ist, ergibt sich bei äquivalenten Termen der Faktor 1, ansonsten ein Faktor ungleich 1. Aufpassen müßte man bestenfalls, wenn die Variablen schon mit Zahlen belegt sind und Terme den Wert 0 annehmen. Die Gleichung wird mit **soLve** nach der Variablen *FAKT* aufgelöst (siehe #29 und #31).

$$\#29:\; \left[K + \frac{K\cdot p}{100}\right]\cdot FAKT = K\cdot\frac{100 + p}{100} \qquad \text{User}$$

$$\#30:\quad FAKT = 1 \qquad\qquad \text{Solve(\#29)}$$

$$\#31:\quad \left[K + K\cdot\frac{p}{100}\right]\cdot FAKT = K\cdot\frac{1 + p}{100} \qquad\qquad \text{User}$$

$$\#32:\quad FAKT = \frac{p + 1}{p + 100} \qquad\qquad \text{Solve(\#31)}$$

Wie schon erwähnt, hat sich bei unseren Untersuchungen gezeigt, daß Schüler sehr ideenreich beim Entwickeln solcher Strategien sind und daß diese Tätigkeit zu intensiven mathematischen Diskussionen zwischen den Schülern geführt hat. Besonders für schwächere Schüler sind solche zur Verfügung gestellte Strategien wichtig. Das CAS bildet dabei eine wichtige Entscheidungshilfe.

Die Schnittstelle Operieren - Interpretieren in der Analysis

Zusätzlich zu den algebraischen Problemen, die auch in diesem mathematischen Kapitel existent sind, gibt es jetzt auch durch neue Inhalte hervorgerufene Schwierigkeiten. Viele dieser Fragen treten auch ohne Verwendung des CAS auf. Wir wollen an einigen Beispielen aufzeigen, wie mit Hilfe des CAS die Probleme wesentlich besser gelöst werden können. Zum Teil bewähren sich dabei Strategien, die schon bei der Algebraschnittstelle vorgestellt wurden, wie etwa 'Faktor suchen' oder 'Visualisieren', aber oft liefert auch die zu diesem neuen Inhalt gehörende Theorie neue Strategien, oder man macht sich ganz einfach das CAS als Rechenhilfe zunutze, um Untersuchungen, die komplexere Operationen erfordern, durchführen zu können.

Beispiel 3.14: Plancksches Strahlungsgesetz, Überraschungen beim Substituieren

Plancksches Strahlungsgesetz: Die Abhängigkeit des Emissionsvermögens eines schwarzen Körpers von der Wellenlänge λ ist durch die Funktion #2 beschrieben. Man ermittle das relative Extremum.

Bei der Lösung treten bei verschiedenen Schülern oft verschiedene Wege auf:

Weg 1: Differenziert man nach λ, so wird der Ausdruck, wie in Zeile #4 zu sehen ist, sehr kompliziert.

$$\#1:\quad \lambda :\varepsilon\ \mathrm{Rea}\lambda\ (0, \infty)$$

$$\#2:\quad E(\lambda) := \frac{c^2\cdot h}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\hat{e}^{c\cdot h/(k\cdot\lambda\cdot t)} - 1}$$

$$\#3:\quad \frac{d}{d\lambda}\,E(\lambda)$$

$$\#4:\quad \frac{c^2\cdot h\cdot(\hat{e}^{c\cdot h/(k\cdot\lambda\cdot t)}\cdot(c\cdot h - 5\cdot k\cdot\lambda\cdot t) + 5\cdot k\cdot\lambda\cdot t)}{k\cdot\lambda^7\cdot t\cdot(\hat{e}^{c\cdot h/(k\cdot\lambda\cdot t)} - 1)^2}$$

Eine vielfach gebräuchliche Strategie ist, durch Substituieren zu vereinfachen. So wird hier der Exponent durch *x* ersetzt (#5).

$$\#5: \quad x = \frac{c \cdot h}{k \cdot \lambda \cdot t}$$

$$\#6: \quad \lambda = \frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x}$$

$$\#7: \quad \lambda := \frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x}$$

Man erhält die 1.Ableitung als Funktion der Variablen *x*.

$$\#8: \quad \frac{k^6 \cdot t^6 \cdot x^6 \cdot (\hat{e}^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^4 \cdot h^5 \cdot (\hat{e}^{2 \cdot x} - 2 \cdot \hat{e}^x + 1)}$$

Weg 2: Manche Schüler kommen auch auf die Idee, schon vor dem Differenzieren zu substituieren. Man erhält dann *E* schon als Funktion von *x* (#9).

$$\#9: \quad E(x) := \frac{k^5 \cdot t^5 \cdot x^5}{c^3 \cdot h^4 \cdot (\hat{e}^x - 1)}$$

$$\#10: \quad \frac{d}{dx} E(x)$$

Differenziert man *E*(*x*) nach *x*, so ergibt sich mit **Simplify** ein anderes Ergebnis als bei Weg 1 in Zeile #8:

$$\#11: \quad - \frac{k^5 \cdot t^5 \cdot x^4 \cdot (\hat{e}^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^3 \cdot h^4 \cdot (\hat{e}^x - 1)^2}$$

Für Schüler, die Ergebnisse vergleichen, ist das unterschiedliche Resultat nicht ohneweiteres verständlich, wurde doch in beiden Fällen die gleiche Substitution durchgeführt.

Bei der Frage nach den Ursachen ist eine mögliche *Strategie*:

Man suche jenen Faktor ('*FAKT*'), um den sich die beiden Terme unterscheiden. Ein großer Vorteil beim Generieren solcher komplexen Gleichungen ist die Möglichkeit, die Terme mit Hilfe der Funktionstasten **F3** bzw. **F4** in die Authorzeile zu kopieren. Die Rechenarbeit kann vom CAS übernommen werden. Mit **soLve** wird die Gleichung #12 nach *FAKT* aufgelöst (siehe #13).

$$\#12: \quad \frac{k^6 \cdot t^6 \cdot x^6 \cdot (\hat{e}^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^4 \cdot h^5 \cdot (\hat{e}^{2 \cdot x} - 2 \cdot \hat{e}^x + 1)} \cdot FAKT = - \frac{k^5 \cdot t^5 \cdot x^4 \cdot (\hat{e}^x \cdot (x - 5) + 5)}{c^3 \cdot h^4 \cdot (\hat{e}^x - 1)^2}$$

$$\#13: \quad FAKT = -\frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x^2}$$

Fragt man, woher dieser Faktor kommt, so kann man mit CAS-Unterstützung zeigen, daß FAKT nichts anderes ist als die innere Ableitung von λ nach x.

$$\#14: \quad \frac{d}{dx} \lambda$$

$$\#15: \quad -\frac{c \cdot h}{k \cdot t \cdot x^2}$$

Im Bsp. 3.10 ("Ausbreitung von Luftschadstoffen") wurde gezeigt, wie dem Schnittstellenproblem durch Strategien begegnet werden kann, die sich aus der zum Problem gehörenden Theorie ergeben, wie zum Beispiel:

-Ergibt sich beim Auflösen einer Gleichung eine komplexe Funktion r und sucht man ein relatives Extremum im reellen Bereich, so kann man auch *das relative Extremum von r^2 suchen*.

-Man versucht durch *Visualisierung* zu erforschen, ob die komplexe Funktion auch einen reellen Bereich hat und schränkt danach den Definitionsbereich ein.

Im Bsp. 3.11 ("Inverse Roboterkinematik") wurde die Brauchbarkeit der vom CAS ermittelten allgemeinen Lösung durch *umfangreiches Testen* mit konkreten Zahlen überprüft. Ohne CAS wäre das viel zu aufwendig.

Im Bsp. 3.12 ("Sterile Insektentechnik") wurde eine brauchbare Lösung einer Ungleichung mit Hilfe des CAS durch *Einschränken des Definitionsbereichs* erzielt **(Declare Variable** *Real Intervall*).

3.5.3. Zusammenfassung: Die Bedeutung von CAS beim Problemlösen:

1. Beim Modellbilden:

Andere und neue Arten von Modellen, wie etwa grafische oder rekursive Modelle werden möglich.

Komplexere Modelle werden durch das Werkzeug CAS zugänglich.

Module können angefertigt und für das Problemlösen genutzt werden.

Ein mehrmaliges Durchlaufen des Problemlösekreislaufs mit dem Ziel der schrittweisen Modellverbesserung wird erleichtert.

Die Möglichkeit des experimentellen Arbeitens fördert das selbständige Arbeiten der Schüler.

2. Beim Operieren:

CAS nehmen den Schülern Tätigkeiten im Bereich des Operierens ab.

CAS ermöglichen neue Arten des Operierens, wie etwa Simulieren oder Visualisieren.

Komplexere Operationen und oftmaliges Wiederholen von Operationen werden machbar. Dadurch wird der Mathematikunterricht anwendungsorientierter, da praxisnahe Modelle zugänglich werden.

Die Verwendung fertiger Module erleichtert das Operieren und bietet neue Möglichkeiten.

Bei Beachtung des White Box/Black Box-Prinzips (siehe Kapitel 4.1) kann das CAS beim Operieren als Black Box genutzt werden.

3. Beim Interpretieren:

Das CAS ermöglicht eine leichtere Kontrolle der Richtigkeit der Lösung (etwa durch rasches Nachvollziehen der Operationen oder durch Einsetzen numerischer Kontrollgrößen).

Das CAS fördert die Phase des Interpretierens durch verschiedene Darstellungsarten der Lösung, wie etwa grafische, symbolische oder numerische, die gleichzeitig in verschiedenen Fenstern verfügbar sind (siehe auch Window-Shuttle-Technik).

Das CAS ermöglicht die Untersuchung des Einflusses verschiedener Parameter auf die Lösung.

Das CAS ermöglicht die Überprüfung der Auswirkung der Genauigkeit der Eingabedaten und der Rechengenauigkeit auf die Lösung.

Modellverbesserungen, deren Notwendigkeit sich aus der Phase des Interpretierens ergibt, lassen sich mit dem CAS rascher und leichter durchführen.

Das CAS unterstützt die Präsentation der Lösung (Verschiedene Darstellungsformen der Lösung, Anfertigen eines Ausdrucks, eventuell Kombination mit einem Textverarbeitungsprogramm).

4. Didaktische Prinzipien als Konstruktionsanleitungen für den Unterricht

"Dem Lehrjungen gebühret zuzuhören und still zu schweigen... Der Lehrjunge soll nichts reden, in wehrender Lection auch nichts sagen. Denn sonst verhindert er beyde, die Lehrmeister und seine Mitschüler, daß die Lection nicht kann zur rechten Zeit vollendet werden. Hat er aber nöthigs zu fragen, so schreyb er beyseit auff, und nach gehaltener Lection hat er zu fragen Zeit genug."

Ratke, Artickel auf welchen fürnehmlich die Ratichianische Lehrkunst beruhet, Leipzig 1617 [vgl. Freudenthal, 1977, S 55].

"Dem Lehrmeister gebühret zuzuhören und still zu schweigen... Der Lehrmeister soll nichts reden, in wehrender Lection auch nichts sagen. Denn sonst verhindert er beyde, die Lernmädchen und Lernjungen, daß die Motivation und Action nicht kann verwirklicht werden. Hat er aber nöthigs zu sagen oder zu fragen, so schreyb er beyseit auff, und nach vollendeter Action hat er zu sagen und zu fragen Zeit genug."

Heugl, Artickel auf welchen fürnehmlich die Kunst beruhet, Lernmädchen und -jungen zu motivieren und zu activieren, Wien 1996.

Die Erziehung zu selbständigem Denken, Urteilen und Handeln ist wohl einer der wichtigsten Aufträge der Schule der Zukunft. Das erfordert aber weniger eine Änderung der Lerninhalte, sondern ein Umdenken bei der didaktischen Konzeption und bei der Organisation des Unterrichts. Nun brauchen wir diesbezüglich das Rad im Jahr 1996 nicht neu zu erfinden. Der Begriff "Projekt" im Sinne einer Lernmethode oder -konzeption wurde erstmals 1904 explizit formuliert und besonders seit Beginn der siebziger Jahre gibt es in der didaktischen Literatur und in den Lehrplänen eine Fülle von Anleitungen für einen stärker schülerzentrierten Unterricht. Trotzdem verläuft der Unterricht statistisch gesehen noch immer sehr stark lehrerzentriert, und die Ratichianische Lehrkunst gibt es auch noch.

Auch wir haben keinen Generallösungen anzubieten. Wir sind nach unseren Untersuchungen allerdings überzeugt davon, daß das Lehr- und Lernmedium Computer, und dabei insbesondere die Computeralgebra-Systeme, die didaktische Konzeption und die Unterrichtsorganisation stark beeinflussen und verändern. Diese These wollen wir in diesem Abschnitt durch Beispiele und Erfahrungen aus Unterrichtsexperimenten begründen.

So wie man beim Bau eines Hauses nicht nur Baumaterialien, sondern auch Hilfsmittel, wie etwa Maschinen oder ein Gerüst, und nicht zuletzt auch Konstruktionsanleitungen und Planungsvorschriften braucht, benötigt man zum Bau des mathematischen Gebäudes:

Baumaterialien, das sind die *mathematischen Inhalte*,

Hilfsmittel, also *Rechenhilfsmittel* wie den numerischen Rechner oder das CAS,

Konstruktionsanleitungen, das sind die *didaktischen Prinzipien*.

Quellen, aus denen didaktische Prinzipien stammen:

1. *Die pädagogische, gesellschaftliche Quelle:* Aus den allgemeinen Bildungszielen des Lehrplans, aus der Bildungs- und Lehraufgabe eines Fachs sowie den fachspezifischen Lernzielen lassen sich Konstruktionsvorschriften ableiten.

   Zu dieser Quelle gehört auch die gesellschaftliche und fachwissenschaftliche Diskussion um die Frage nach der Legitimation des Mathematikunterrichts (siehe etwa Arbeiten von B. Buchberger zum White Box/Black Box-Prinzip [Buchberger, 1993]).

2. *Die lernpsychologische Quelle:* Theorien wie etwa von J. Piaget, J.S. Bruner oder R.M. Gagne, um nur einige zu nennen, sind sowohl als Quelle für die Findung und Formulierung didaktischer Prinzipien als auch für ihre theoretische Absicherung von großer Bedeutung.

3. *Die Quelle der Empirie:* Durch Untersuchung des Unterrichtsgeschehens, des Lehrer- und Schülerverhaltens, der Lehr- und Lernprozesse werden bestimmte Gesetzmäßigkeiten festgestellt.

Wir wollen in diesem Buch nicht auf bekannte didaktische Prinzipien, wie etwa das Spiralprinzip oder das genetische Prinzip näher eingehen (siehe dazu z.B.: [Bruner, 1972], [Claus, 1989] oder [Wittmann, 1981]).

Uns geht es vielmehr um Konstruktionsanleitungen, bei denen das CAS als "Gerüst" oder "Baumaschine" eine wichtige Rolle spielt. Kenner didaktischer Literatur werden allerdings feststellen, daß etliche der in diesem Buch formulierten Prinzipien nur andere Ausprägungen klassischer didakischer Prinzipien sind, was nur die Universalität dieser Konstruktionsanleitungen bestätigt und uns die theoretische Absicherung erleichtert. So kann man etwa im White Box/Black Box-Prinzip deutlich Elemente des Spiralprinzips erkennen.

Unsere Absicht in diesem Kapitel ist es, der Bedeutung der neuen 'bautechnologischen Möglichkeiten', die sich aus der Nutzung von CAS ergeben, durch eine andere Formulierung und eine andere Gewichtung und Sichtweise Rechnung zu tragen.

4.1. Das White Box/Black Box-Prinzip

In impliziter Form wurde dieses Prinzip erstmals auf einem Symposium zum Thema "Symbolic Math in Education" konstruiert, das im Rahmen der ICME-Konferenz 1984 in Adelaide stattfand. Explizit formulierte es Prof. Bruno Buchberger, Vorstand des RISC-Instituts an der Universität Linz (Research Institut for Symbolic Computation) in einer Arbeit im Jahr 1990. Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, findet man in diesem Prinzip Elemente des Spiralprinzips wieder, aber das Besondere daran ist, daß eine sinnvolle Realisation dieses didaktischen Konzepts erst bei Nutzung des Computers und insbesondere eines CAS möglich ist.

Viele Bereiche der Schulmathematik wurden in letzter Zeit in folgendem Sinn "trivialisiert": Der benötigte Algorithmus kann von Maschinen bearbeitet werden. Es ergibt sich daher die Frage, ob man den Schüler dann noch mit diesen Problemen quälen soll oder ob man nicht besser Maschinen zur Verfügung stellen soll, die die passenden Algorithmen beherrschen [Buchberger, 1992].

In der Diskussion über Segen oder Fluch des Einsatzes von Computern und insbesondere von CAS beobachtet man oft zwei extreme Positionen:

Die 'Traditionalisten': Der Computer ist eine Gefahr für die mathematische Kultur. Das blinde Verwenden von Werkzeugen verhindert das Verstehen mathematischer Konzepte. 'Basteln' ist kein brauchbarer Ersatz für die "Anstrengung des Begriffsbildungsprozesses".

Die 'Progressiven': Verlieren wir doch keine wertvolle Unterrichtszeit mit Tätigkeiten, die die Maschine besser beherrscht. Warum soll der Schüler einen Algorithmus herleiten oder verstehen können, wenn es eine **soLve**-Taste gibt? Wir würden mehr Raum für "kreatives Problemlösen" bekommen.

Wie so oft taugen Extreme nichts. Der sinnvolle Konsens zwischen den beiden extremen Standpunkten lautet: *White Box/Black Box-Prinzip*.

Es handelt sich dabei um ein rekursives Modell des Unterrichts, das jeweils in zwei Phasen abläuft:

4.1.1. White Box-Phase: Phase des verstehenden Lernens

Die Schüler sollen (genetisch oder nach einem wissenschaftsorientierten Ansatz) zu einem Begriff, einem Algorithmus, einem mathematischen Konzept geführt werden. Die in dieser Phase entwickelten Operationen sollen ohne Verwendung des Computers, also "zu Fuß", vom Schüler ausgeführt werden können. Grundtätigkeiten sollen durch Übung automatisiert werden.

Der Computer soll nur dort verwendet werden, wo Bereiche früherer White Box-Phasen als Black Box genutzt werden, oder allgemeiner, wo er zur Erhellung der aktuellen White Box beitragen kann.

Mögliche Aktivitäten in der White Box-Phase:

- Formulieren eines Problems; Finden einer Vermutung; Entwickeln eines Begriffs; Entwickeln eines Algorithmus; Beweisen.

- Rechnen ausreichend vieler Übungsaufgaben ohne CAS; experimentelles Lernen mit Unterstützung des Computers; CAS-unterstütztes Nutzen von Black Boxes, die in früheren White Boxes erforscht wurden.
- Diskussion der Lösungsfälle, der Grenzen und der Verallgemeinerungsmöglichkeiten der Methode; eigenständiges Entwickeln von Modulen, die in der Black Box-Phase als Black Boxes genutzt werden können.

4.1.2. Black Box-Phase: Phase des erkennenden und begründenden Anwendens

Die Schüler sollen die in der White Box-Phase entwickelten Algorithmen und Konzepte bei praktischen Problemen oder bei weiteren White Box-Phasen passend einsetzen. Das Bearbeiten des Algorithmus wird dem Computer als Black Box überlassen. Die Schüler sollen entscheiden, was zu tun ist, eventuell seine Entscheidung auch begründen, er muß es aber nicht mehr selbst tun.

Die *Rekursivität* besteht darin, daß man während einer bestimmten White Box-Phase Bereiche, die in einer in der Hierarchie niedrigeren White Box-Phase verstehend gelernt und entwickelt wurden, als Black Boxes nutzt usw. Das Gebäude der Mathematik entwickelt sich also als ein System ineinandergeschachtelter White und Black Boxes.

Wenn dieser Aufbau gelingt, wäre die Sorge mancher Mathematiker unbegründet, Computernutzung würde nur mehr ein unreflektiertes, irgenwann automatisiertes Nutzen von Black Boxes bedeuten, und viele wichtige mathematische Inhalte würden bedeutungslos. Im Gegenteil! Leider erlebt man im traditionellen Mathematikunterricht, in dem Rechenfertigkeiten oft sehr stark im Mittelpunkt stehen, viel mehr unreflektierte Black Boxes, als man glaubt. Alle Schüler wissen zwar in der Differentialrechnung, daß "x^5 zu $5.x^4$ wird", aber nur wenige können den Begriff des Differentialquotienten erklären, deuten oder die Regeln herleiten. Unsere Untersuchungen haben gezeigt, daß bei Nutzung von CAS mehr Raum für White Box-Phasen bleibt und die Schüler besser zum eigenständigen Lernen in dieser Phase angeleitet werden können. Das CAS macht also wichtige mathematische Inhalte bei Beachtung dieses Prinzips nicht überflüssig. Entlastet wird der Schüler aber bei komplexen Operationen in der Phase der Anwendung des bisher Gelernten, da das CAS dafür Black Boxes anbietet.

Natürlich sollten nicht alle im Sinne dieses Prinzips verwendeten Black Boxes "absolut schwarze Körper" sein (siehe dazu: Modul Prinzip). Wenn der Schüler seine Entscheidung für eine Black Box begründen oder die Ergebnisse der Black Box interpretieren soll, muß dafür gesorgt werden, daß eine gewisse 'White-Box-Kompetenz' erhalten bleibt, wie z. B. elementare Rechenfertigkeit in der Algebra, Strukturerkennungskompetenz, Definition verwendeter Begriffe, Wissen um mögliche Lösungsfälle usw. Diese Kompetenz wird nicht von selbst erhalten bleiben, sondern muß vom Lehrer im Sinne des didaktischen Prinzips der "Stabilisierung" oder im Sinne des "Spiralprinzips" immer wieder gefördert und gefordert werden.

4.1.3. Das White Box/Black Box-Prinzip in der Algebra

Unser ursprünglicher didaktischer Ansatz war anders: In der White Box-Phase sollte der Computer nicht verwendet werden. Die Konsequenzen für die Algebra wären gewesen, daß der Computer frühestens in der 9. Schulstufe eingesetzt würde und daß die elementare Algebra in der 6. und 7. Schulstufe 'CAS-frei' wäre. Durch die Experimente in Versuchsklassen der Stufen 6 und 7 haben wir unsere Meinung grundlegend geändert: Es hat sich gezeigt, daß das CAS viele Hilfen bietet, um die Boxes der elementaren Algebra 'white' zu machen. Ein Großteil der Beispiele im folgenden Artikel wurde im Rahmen der Experimente in den Versuchsklassen am Gymnasium Stockerau von G. Razenberger und W. Klinger entwickelt. Eine Sammlung von Aufgaben für die 7. bis 12. Schulstufe, die im Rahmen des österreichischen DERIVE-Projekts in Versuchsklassen erprobt wurden, wurde als ACDCA-Report Nr. 2 von den Projektlehrern K. Aspetsberger, K. Fuchs und W. Klinger veröffentlicht [Aspetsberger, 1994].

Einteilung des Algebralernens in aufeinanderfolgende white und black Boxes:

WHITE BOX	Genutzte BLACK BOXES
WHITE BOX 1: "Termbox" Aufstellen von Termen. Bearbeiten von Termen. Rechnen mit Termen.	 Nutzen des CAS zum Testen und Üben.
WHITE BOX 2: "Gleichungsbox" Entwickeln von Strategien zum Lösen von Gleichungen. Äquivalenzumformungen.	BLACK BOX: "Termbox" Die Termumformungen übernimmt das CAS als Black Box.
WHITE BOX 3: "Gleichungssysteme" Entwickeln von Strategien zum Lösen von Gleichungssystemen.	BLACK BOXES: "Termbox" "Gleichungsbox" Das Termumformen und das Lösen einzelner Gleichungen übernimmt das CAS als Black Box.
WHITE BOX 4: "Anwendungsbox" Nutzen der Algebrakenntnisse beim Problemlösen. White Box-Aktivitäten: Modellbilden, Interpretieren.	BLACK BOXES: "Termbox" "Gleichungsbox" "Gleichungssysteme" "Differentialrechnungsbox" usw. Das Operieren übernimmt das CAS als Black Box.

4.1.4. Die Termbox

Wie Roland Fischer in seinem Buch "Mensch und Mathematik" [Fischer, 1985, S 47f] ausführt, hat die elementare Algebra sowohl einen formalen als auch einen inhaltlichen Aspekt. Mathematik lebt sowohl von der Trennung als auch von der Verknüpfung dieser Aspekte. Auch wenn die temporäre Trennung des Formalen vom Inhaltlichen eine charakteristische Methode der Mathematik und eine ihrer Stärken ist, muß doch kritisiert werden, daß ein Kennzeichen der klassischen Schulmathematik eine Überbetonung des formalen Aspekts und die fehlende Verknüpfung mit dem inhaltlichen Aspekt ist.

Die Verwendung von CAS bietet die Chance, den Lernenden im formalen Bereich Tätigkeiten abzunehmen, durch Experimentieren und Testen mehr Verständnis zu erreichen und somit Kapazitäten für den inhaltlichen Bereich und für die Verknüpfung des Formalen mit dem Inhaltlichen freizumachen.

Beispiel 4.1: Strukturerkennungsübungen

Verschiedene Untersuchungen, insbesondere die von Günther Malle [Fischer, 1985, S 59f] bestätigen, daß zu den häufigsten Fehlerquellen beim Termrechnen Strukturerkennungsfehler gehören. Durch das Arbeiten mit dem CAS gewinnt die Strukturerkennungskompetenz noch mehr an Bedeutung, da der Schüler vom Ausführer zum Planer wird, sich also aufgrund der erkannten Termstruktur für eine Lösungsstrategie entscheiden muß, bzw. basierend auf seinem Wissen um Termstrukturen einen Term entwikeln muß. Die bisher durch intensives Üben von Rechenfertigkeiten erworbene implizite Strukturerkennungskompetenz ist aber bei Verzicht auf Rechendrill nicht mehr gegeben (oder war, wie viele Untersuchungen zeigen, nie vorhanden), daher muß man die Möglichkeiten des CAS zum Erwerb dieser Kompetenz nutzen.

Eine Möglichkeit ergibt sich bei DERIVE durch Markieren von logisch korrekten Teiltermen mit Hilfe der Cursorsteuerung. Der Schüler kann durch experimentelles Arbeiten den Aufbau des Terms erforschen und außerdem wird diese Strukturerkennungskompetenz auch durch eine größere Zahl von Übungsaufgaben, die am Computer leicht möglich sind, verbessert.

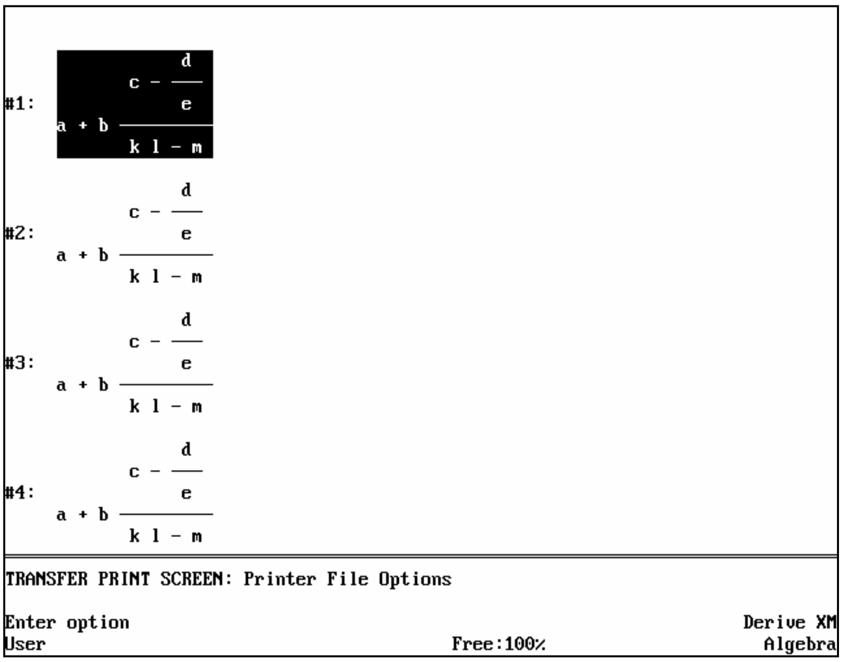


Abb. 4.1:Strukturerkennungsübungen

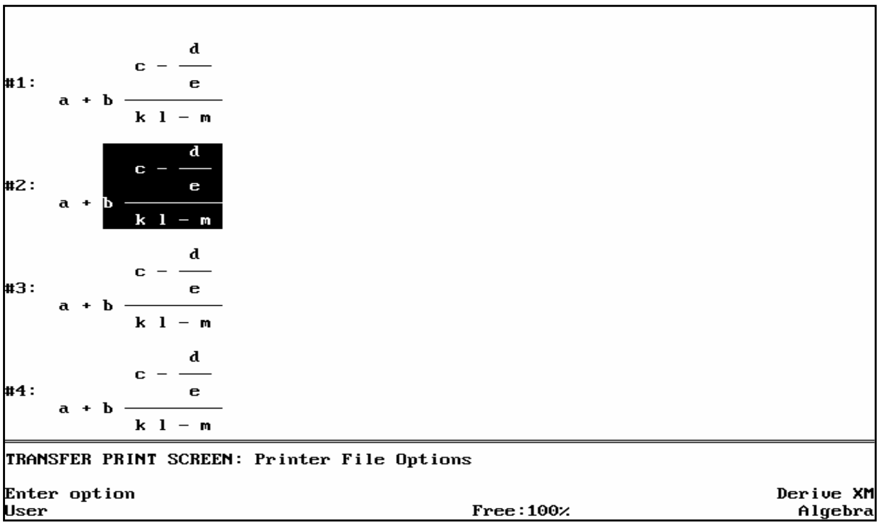


Abb. 4.2:Strukturerkennungsübungen

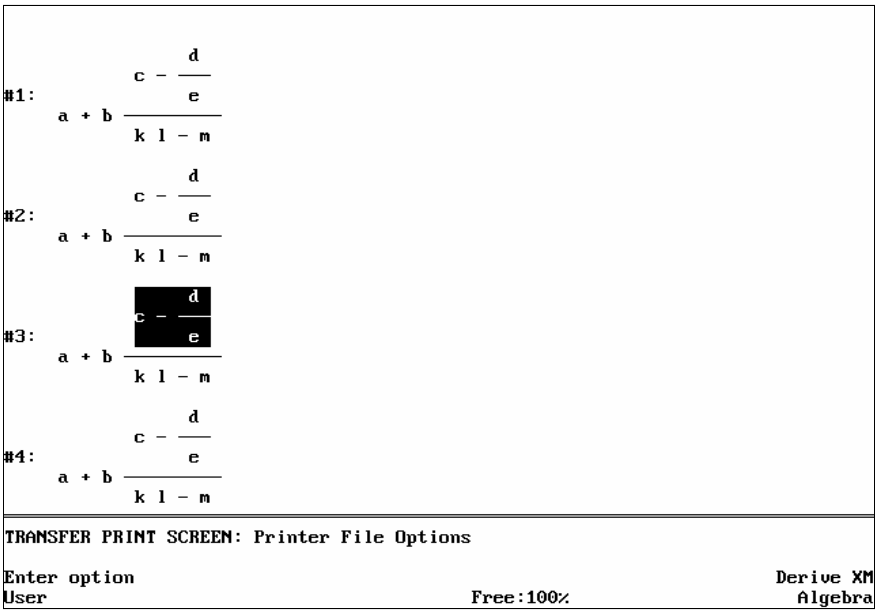


Abb. 4.3:Strukturerkennungsübungen

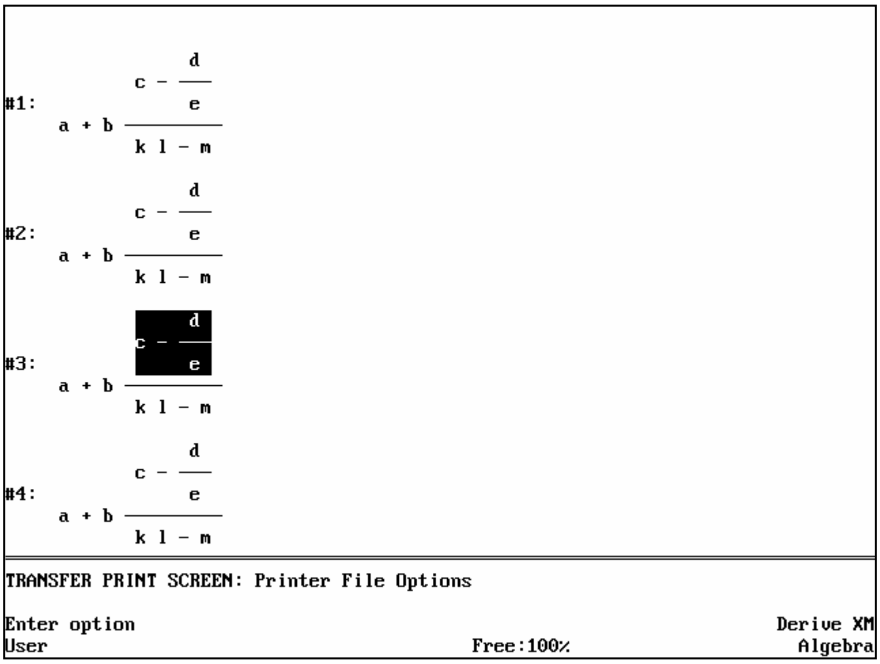


Abb. 4.3:Strukturerkennungsübungen

Didaktisch gesehen es empfiehlt sich, die Terme nicht in einem File anzubieten, sondern vom Schüler selbst eingeben zu lassen. Aus der Not der linearen Eingabe wird dabei insofern eine Tugend, als der Schüler schon vor der Eingabe eine Strukturentscheidung treffen muß. Während er bei der Eingabe in einen numerischen Taschenrechner seine Strukturerkennungsfehler nicht mehr entdeckt, sieht er bei der Eingabe in DERIVE sofort die falsche Struktur. Eine weitere bewährte Begleitmaßnahme, die das verstehende Lernen fördert und eine Verküpfung zwischen der Strukturerkennungskompetenz und der Grundgesetzerkennungskompetenz herstellt, ist der Auftrag, die beim Eindringen in die Termstruktur auftretenden Rechengesetze und Grundgesetze als Begründung anzugeben.

4.1.5. Termumformungen

Der Vorteil des CAS in der White Box-Phase besteht darin, daß der Schüler selbsttätig Bearbeitungstechniken erforschen und individuelle Techniken entwickeln kann. Folgende Techniken werden bei der Nutzung des CAS eingesetzt:

- Unterlegen von Ausdrücken und Teilausdrücken (mit den Cursortasten im Algebrafenster).
- Anwenden von Befehlen auf Ausdrücke und Teilausdrücke (**Simplify, Factor, Expand**).
- Ersetzen komplizierterer Ausdrücke durch einfachere (**Manange Substitute**).
- Rückführen von vereinfachten Ausdrücken in die komplexe Form (**Manage Substitute**).

Beispiel 4.2: Umformen in ein Produkt ("Faktorisieren")

Zerlege in Faktoren: $(3.m + 1)^2 - (2.m - 3)^2$

Im Sinne des Black Box/White Box-Prinzips könnte der Schüler die Aufgabe zuerst dem Computer übertragen und das CAS als Black Box nutzen:

```
#1:  InputMode := Word

#2:  CASeMode := Sensitive
                  2          2
#3:  (3 m + 1)  - (2 m - 3)
```

Mit **Factor** entsteht folgender Ausdsruck:

```
#4:  (m + 4) (5 m - 2)
```

Nun versucht der Schüler, die Black Box "white" zu machen. Die erste Tätigkeit ist eine Strukturerkennung. Der gegebene Term scheint die Struktur des Typs a^2 - b^2 zu haben. Mit **Manage Substitute** wird nun der erste Klammerausdruck durch die Variable *AUSDRUCK1* erstetzt.

```
                2             2
#5:  AUSDRUCK1   - (2 m - 3)
```

Nun wird (2 *m* - 3) unterlegt und durch *AUSDRUCK2* ersetzt.

```
                2             2
#6:  AUSDRUCK1   - AUSDRUCK2
```

Mit **Factor** wird folgende Formel angewendet: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

```
#7:  (AUSDRUCK1 + AUSDRUCK2) (AUSDRUCK1 - AUSDRUCK2)
```

Die Ausrücke aus #4 werden wieder substituiert.

```
#8:  ((3 m + 1) + (2 m - 3)) ((3 m + 1) - (2 m - 3))
```

Durch schrittweise Vereinfachung mit **Simplify** entsteht:

```
#9:  (5 m - 2) ((3 m + 1) - (2 m - 3))

#10: (5 m - 2) (m + 4)
```

Jetzt müßten natürlich ausreichend viele Übungen zur Festigung des Gelernten eingesetzt werden, wobei das CAS den Vorteil bietet, daß in kurzer Zeit viele solcher Beispiele geübt werden können und daß das CAS zum Testen und für Proben genutzt werden kann.

Beispiel 4.3: Anwenden von Formeln

Übungen zum Lernziel: Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat.

Es geht in dieser Lernsequenz um die folgenden Formeln:

```
              2    2            2
#1:  (u + v)   = u  + 2 u v + v                          User

              2    2            2
#2:  (u - v)   = u  - 2 u v + v                          User

      2    2
#3:  u  - v  = (u + v) (u - v)                           User
```

Auf Arbeitsblättern werden den Schülern folgende Aufgaben gestellt, die sie dann mit dem CAS durch experimentelles Lernen lösen sollen:

Ermittle *a,b,c* so, daß eine der obigen Formeln paßt:

```
        2                     2
#4:  4 x  + a + 25 = (b + c)                             User
```

Mit Hilfe von **Manage Substitute** werden die Variablen durch die vermuteten Ausdrücke ersetzt. Natürlich geht es bei selbständigem Arbeiten nicht so rasch wie hier, aber gerade die Möglichkeit des Fehlersuchens mit dem CAS, das Diskutieren über Strategien und das Finden eigener Strategien ist in dieser Form nur mit dem CAS möglich und rechtfertigt den Einsatz in der White Box-Phase.

$$\#5:\quad 4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2 \qquad \text{Sub(\#4)}$$

Einige Testmöglichkeiten: Faktorisieren des linken Ausdrucks:

$$\#6:\quad (2x + 5)^2 = (2x + 5)^2 \qquad \text{Fctr(\#5')}$$

Lösen der Gleichung nach der Variablen *x:*

$$\#7:\quad x = @1 \qquad \text{Solve(\#6)}$$

Natürlich sollte man auch Aufgaben stellen, die nicht so reibungslos funktionieren:

$$\#13:\quad 4x^2 + 2xy + a = (b + c)^2 \qquad \text{User}$$

$$\#14:\quad 4x^2 + 2xy + y^2 = (2x + y)^2 \qquad \text{Sub(\#13)}$$

Die Testmöglichkeiten mit **Factor** oder **Expand** zeigen, daß die Vermutung falsch ist:

$$\#15:\quad 4x^2 + 2xy + y^2 = (2x + y)^2 \qquad \text{Fctr(\#14)}$$

$$\#16:\quad 4x^2 + 2xy + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 \qquad \text{Expd(\#15')}$$

Das CAS hilft, die richtige Lösung zu finden:

$$\#17:\quad 2xy = 2(2x)c \qquad \text{User}$$

$$\#18:\quad c = \frac{y}{2} \qquad \text{Solve(\#17)}$$

Man beobachtet wieder: Die Haupttätigkeit des Lernenden besteht im Formulieren von Vermutungen und im Testen.

$$\#19:\quad 4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4} = \left[2x + \frac{y}{2}\right]^2 \qquad \text{Sub(\#13)}$$

$$\#20:\quad 4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4} = 4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4} \qquad \text{Expd(\#19)}$$

4.1.6. Die Gleichungsbox

Wenn man im Sinne des von Roland Fischer [Fischer, 1985, S 63ff] vorgeschlagenen Wegs in den Schulstufen 5 und 6 den Formalismus des Gleichungslösens vorsichtig aus inhaltlichen Überlegungen heraus entwickelt hat, so ist es spätestens in der 7. Schulstufe notwendig, jenen Schritt zu tun, der eine der großen Stärken der Mathematik ist, nämlich die Trennung des Formalen vom Inhaltlichen. Ich halte dabei die Idee der Äquivalenzumformung nach wie vor für die wirkungsvollste Strategie, weil sie für die Schüler eine weit über das Lösen linearer Gleichungen hinaus bedeutsame heuristische Strategie darstellt: "Unter Einhaltung bestimmter Spielregeln auf beiden Seiten dasselbe tun."

Die große Chance, die sich aus der Verwendung von CAS ergibt, besteht darin, daß der Schüler seine individuellen Strategien durch experimentelles Lernen selbst entdecken kann. Untersucht man Schülerfiles, so kann man selbst in der Prüfungssituation erkennen, daß von einem "algorithmischen Gehorsam", wo jeder Schüler den vom Lehrer vorgestellten Weg nachvollzieht, bei Einsatz des CAS nichts mehr zu sehen ist.

Einsatzmöglichkeiten des CAS in der Gleichungs-White-Box:

- Schrittweise Durchführung von Umformungen. Dabei können die beiden Seiten der Gleichung entweder einzeln oder gleichzeitig bearbeitet werden. Bei DERIVE kann die Gleichung oder Teile davon mit **F3** oder **F4** in den Editor geholt und bearbeitet werden.
- Analyse und Interpretation der dabei entstehenden neuen äquivalenten Gleichung. Eventuell Rückführen in die ursprüngliche Form als Probe.
- Vergleichen verschiedener Äquivalenzumformungen, Finden der individuell am geeignetsten Strategie. Erkennen falscher bzw. unwirksamer Strategien.
- Ständiges begleitendes Testen, Probe durch Einsetzen vermuteter Lösungen ohne großen Rechenaufwand.
- Herstellen einer Querverbindung zum Funktionsbegriff: Visualisierung der Äquivalenzumformung. Veranschaulichen der Konsequenz nicht äquivalenter Umformungen.

Beispiel 4.4: Vergleichen von Umformungsstrategien

Die Window-Shuttle-Technik (siehe Kap.4.4) erlaubt noch dazu das parallele Arbeiten in verschiedenen Fenstern, in diesem Fall das Vergleichen der Wirksamkeit verschiedener Lösungsstrategien.

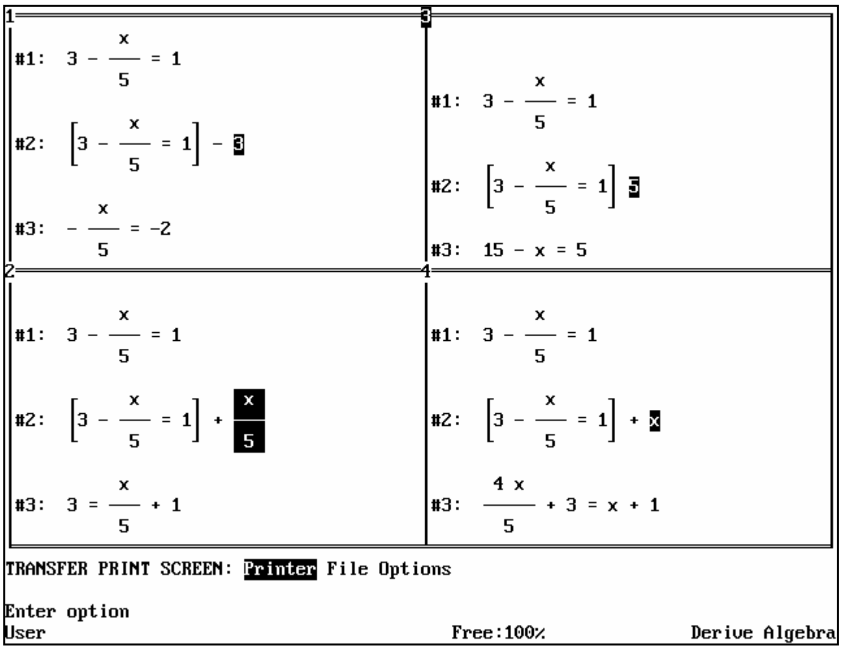


Abb. 4.4:Gleichungsbox

Wie im Fenster 4 zu sehen ist, kann der Schüler auch die Unwirksamkeit falscher Strategien erkennen, was er beim Arbeiten auf Papier wahrscheinlich nicht bemerken würde. Dort führt z.B. bei der Gleichung $3.x = 12$ die Strategie "auf beiden Seiten 3 subtrahieren" zum falschen Ergebnis $x = 9$, beim Arbeiten mit dem CAS dagegen zu $3.x - 3 = 9$.

Beispiel 4.5: Visualisierung von Äquivalenzumformungen

Deutet man eine Gleichung der Form L(x) = R(x) als Schnitt zweier Funktionen L und R, so kann man durch "Shutteln" zwischen einem Algebra- und einem Grafikfenster die Konsequenzen von Äquivalenzumformungen beobachten.

Durch die Beobachtung gemeinsamer Eigenschaften der Graphen der Zeilen #2 und #4 in der folgenden Abbildung kommt man zum Schluß: Der Schnitt erfolgt stets an der Stelle x=1. Die Überprüfung erfolgt auch durch Zeichnen von [1,*t*] (Zeile #5). Im Algebrafenster könnte man dann noch die Probe für die aus dem Grafikfenster gewonnene Vermutung machen (Abb.4.6 und Abb.4.7).

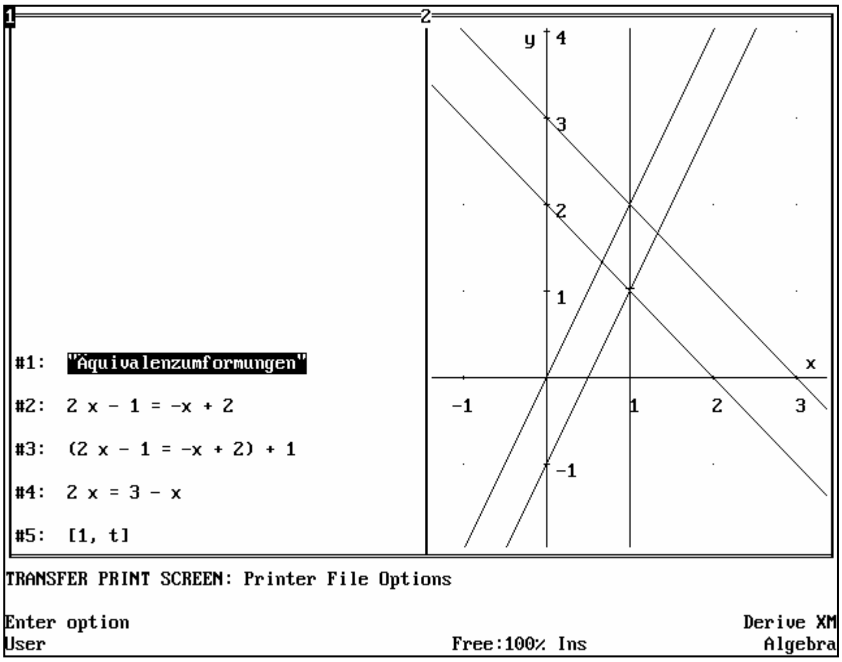


Abb. 4.5: Visualisierung von Äquivalenzumformungen

Bei weiteren Äquivalenzumformungen kommt man zum selben Ergebnis:

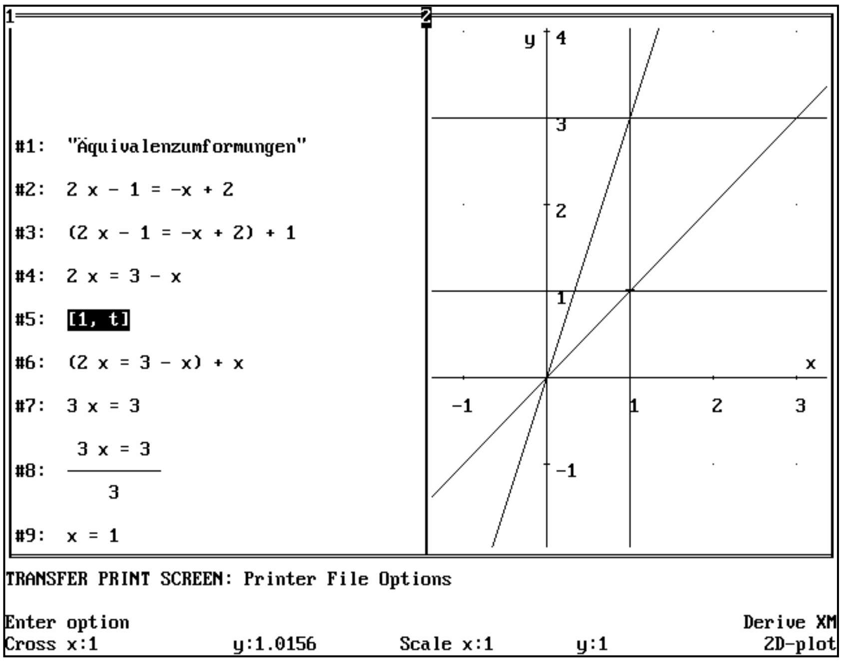


Abb. 4.6: Visualisierung von Äquivalenzumformungen

Auch die Folgen nicht äquivalenter Umformungen können im Grafikfenster beobachtet werden, wie etwa die Multiplikation mit x oder das Quadrieren der Gleichung (Abb.4.8 und Abb.4.9).

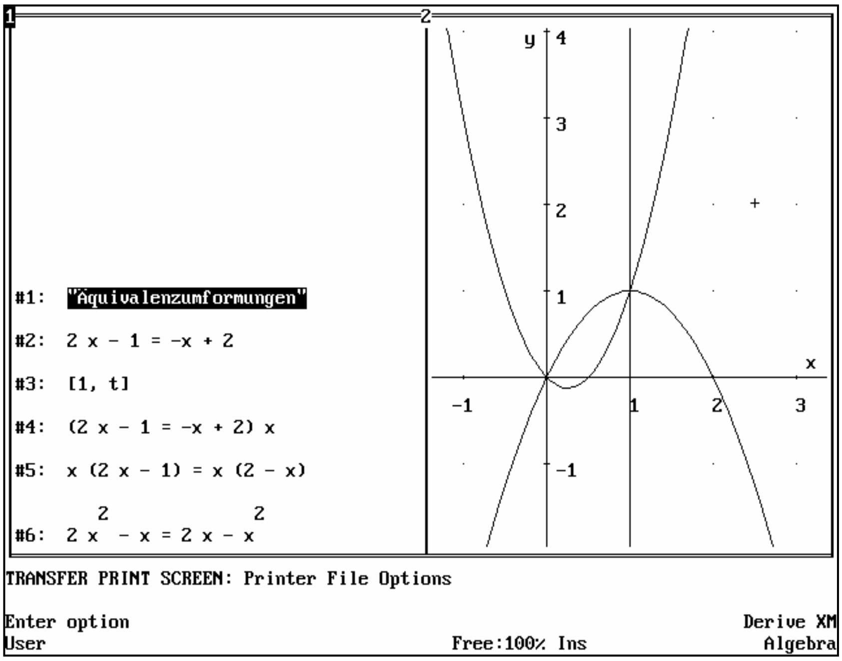


Abb. 4.7: Visualisierung von Äquivalenzumformungen

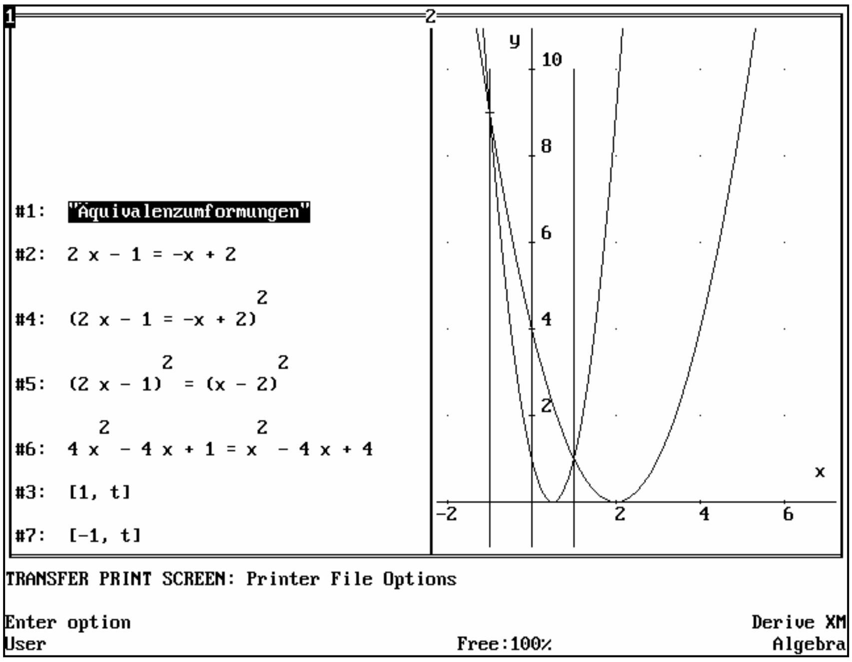


Abb. 4.8: Visualisierung von Äquivalenzumformungen

Von didaktischer Bedeutung ist bei dieser Vorgangsweise auch die bei den neuen DERIVE-Versionen mögliche "*Lehrerschnittstelle*":

Der Lehrer kann das Menü auf die Lernentwicklung der Schüler abstimmen und entscheidet, welche Einstellungen im Hauptmenü erscheinen. So bietet man in der White Box-Phase der elementaren Algebra etwa nur die Befehle **Simplify**, **Expand**, **Factor**, **Manage Substitute**, **Approx** und **Plot** an, nicht aber **soLve**. An manchen Schulen, die am CAS-Projekt beteiligt sind, gibt es im Netz des EDV-Raums schon Menüvoreinstellungen für die einzelnen Lernstufen von der 7. bis zur 12. Schulstufe. Im Kapitel 5.2.2 wird darauf noch näher eingegangen.

4.1.7. Die Box: Gleichungssysteme

Im Sinne des White Box/Black Box-Prinzips sollten in der White Box-Phase folgende Ziele angestrebt werden:

- Den Begriff des linearen Gleichungssystems erläutern können. Den Begriff der Lösungsmenge erläutern und verschiedene Lösungsmengen deuten können.
- Lösungsalgorithmen entwickeln und erklären können.
- Die entwickelten Algorihmen für einfache Fälle 'zu Fuß', d.h. ohne Computereisatz anwenden können.
- Modellbilden: Gleichungssysteme aufstellen können.
- Lösungsmengen interpretieren können.
- Den Lösungsalgorithmus des CAS anwenden können.

Lineare Gleichungssysteme in der 8.Schulstufe:

Natürlich kann man die üblichen Lösungsalgorithmen, wie etwa die grafische Lösung, das Einsetzungs- oder das Gleichsetzungsverfahren usw. auch an Hand einfacher Beispiele "zu Fuß" behandeln. Hier sollen an Beispielen einige Argumente angeführt werden, die für den Einsatz von CAS auch in dieser Phase sprechen.

Beispiel 4.6: Lösungsverfahren für Gleichungssysteme

Grafisches Lösen:

Behandeln vieler Aufgaben in relativ kurzer Zeit. Konzentrieren auf das Wesentliche des Lösens, Untersuchen verschiedener Lösungsfälle. Keine Ablenkung durch Nebentätigkeiten, wie Aufstellen von Wertemengen. Experimentelles Entdecken der Lösung durch "Wandern auf den Geraden im *Trace*-Modus von DERIVE". Nutzen der **Zoom**-Möglichkeit. Gemäß der Window-Shuttle-Technik: Pendeln zwischen dem Algebra- und Grafikfenster, Beobachten von Konsequenzen algebraischer Operationen im Grafikfenster.

Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren):

```
#1:  3.x - y = 5                                          User

#2:  2.x + 3.y = 7                                        User
```

Die Auflösung der Gleichung #1 nach y erfolgt mit dem CAS als Black Box.

```
#3:  y = 3.x - 5                                     Solve(#1)
```

Die Tätigkeit des Substituierens wird durch die Nutzung der entsprechenden DERIVE-Optionen, wie etwa das Verwenden von **Manage Substitute**, bewußt wahrgenommen. Der Schüler entscheidet die Operation, führt sie aber selbst nicht aus.

```
#4:  2.x + 3.(3.x - 5) = 7                             Sub(#2)
```

Wieder übernimmt das CAS Lerninhalte früherer White Boxes als Black Box

```
#5:  x = 2                                           Solve(#4)

#6:  y = 3.2 - 5                                       Sub(#3)
```

#7: y = 1 Simp(#6)

Gleichsetzungsverfahren:

```
#1:  3.x - y = 5                                            User

#2:  2.x + 3.y = 7                                          User

#3:  y = 3.x - 5                                       Solve(#1)

          7 - 2.x
#4:  y = ―――――――――                                     Solve(#2)
             3
```

Das bewußt durchgeführte "gleich - Setzen" erfolgt bei DERIVE durch Verwendung der Funktionstasten **F3** bzw. **F4**, mit denen markierte Ausdrücke in die **AUTHOR**-Zeile kopiert werden können. Dadurch wird die neue Gleichug durch Gleichsetzen zweier Terme gebaut. Das Lösen dieser Gleichung könnte im Sinne des White Box/Black Box-Prinzips vom CAS als Black Box übernommen werden. Eine andere Möglichkeit wäre die Verwendung des Build-Befehls, dessen Name schon seine Möglichkeiten beschreibt.

```
                7 - 2.x
#5:  3.x - 5 = ―――――――――                                    User
                   3

#6:  x = 2                                             Solve(#5)

#7:  y = 3.2 - 5                                         Sub(#3)

#8:  y = 1                                              Simp(#7)
```

Additionsverfahren (Eine Vorform des Gaußschen Eliminationsverfahrens):

Wie schon in der Gleichungsbox ausgeführt könnte sich der Schüler auf das Entscheiden der Strategie konzentrieren und die Ausführung der Äquivalenzumformungen der beiden Gleichungen dem CAS überlassen.

Lösen mit dem CAS:

Bei Verwendung von DERIVE wird das Gleichungssystem als Vektor eingegeben. Mit **soLve** erhält man sofort die gesuchte Lösung.

Lineare Gleichungssysteme in der 10. Schulstufe

Eine wesentliche Idee des Spiralprinzips besagt, daß eine Box, die in der 8. Schulstufe einmal "white" war, danach nicht für immer "black" bleiben muß, oder besser gesagt nicht "black" bleiben soll. In Österreich steht im Lehrplan der 10. Schulstufe des Realgymnasiums das Thema "Matrizen". Bis jetzt wurde es sehr stiefmütterlich behandelt. Durch Nutzung des CAS könnte es einen wesentlich höheren Stellenwert bekommen, da die aufwendige Rechenarbeit beim Rechnen mit Matrizen das CAS übernehmen könnte. Zusätzlich kann dieses Kapitel für eine White Box-Phase zum Erforschen des Gaußschen Eliminationsverfahrens genutzt werden. Somit wird das Thema "Lösen von Gleichungssystemen" in verschiedenen Altersstufen auf verschiedenen Exaktheitsniveaus behandelt. Der Unterschied zum traditionellen Spiralprinzip besteht im Nutzen des CAS einerseits zur Erhellung der neuen White Box und andererseits als Rechenhilfe bei Verwendung von Inhalten früherer White Box-Phasen.

Entsprechend der am Beginn der Box "Gleichungssysteme" formulierten Grobziele wären die Feinziele dieser White Box-Phase [Lehmann, 1990]:

-Kenntnisse über das Rechnen mit Matrizen beim Lösen von Gleichungssystemen anwenden können.

-Die Zielsetzung des Gauß Algorithmus erläutern können und die Lösung schrittweise mit Hilfe von DERIVE-Operationen für Matrizen berechnen können. Zwischenergebnisse deuten können. Die Auswirkung der DERIVE-Befehle und den dazugehörigen Algorithmus deuten können.

- Die Umformung des Gleichungssystems mit dem Derive-Befehl row_reduce durchführen können.
- Das bei den "Gaußschen" Umformungen entstehende Endschema auswerten können.

- Das Ablesen der Lösungsmenge aus dem Endschema begründen können.

4.1.8. Die Anwendungsbox

In dieser Box ist das Thema der White Box: Schulung des Problemlösens. Dabei können die in früheren White Box-Phasen erworbenen Kenntnisse im Bereich von Algebra oder Analysis unter Nutzung des CAS als Black Box eingesetzt werden. Bisher war in der Anwendungsphase (sofern sie überhaupt vorhanden war) der Schwerpunkt der Schülertätigkeit das Rechnen. Nun kann gerade das *Operieren* dem CAS übertragen werden und das *Modellbilden* sowie das *Interpretieren* gewinnen an Bedeutung.

Beispiel 4.7: Eine klassische Aufgabe in traditionellen Schulbüchern

Von einer Polynomfunktion 3. Grads kennt man den Tiefpunkt T(2/-1) und den Wendepunkt W(1,2). Ermittle die Funktionsgleichung, diskutiere die Funktion und fertige eine Zeichnung an.

Bisher war die Hauptarbeit zur Ermittlung der Funktionsgleichung das Lösen des zugehörigen Gleichungssystems. Das übernimmt jetzt das CAS als Black Box. Die Tätigkeit des Schülers konzentriert sich auf das eigentliche Ziel dieser Analysisaufgabe: *Das Modellbilden*.

#1: $F(x) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$ User

#2: $\left[\frac{d}{dx}\right]^1 F(x) = 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$ User=Simp(User)

#3: $\left[\frac{d}{dx}\right]^2 F(x) = 6\cdot a\cdot x + 2\cdot b$ User=Simp(User)

#4: $F1(x) := 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$ User

#5: $F2(x) := 6\cdot a\cdot x + 2\cdot b$ User

Die eigentliche Modellbildungstätigkeit besteht im ermitteln der Zeile #6:

#6: $[F(2) = -1, F(1) = 2, F1(2) = 0, F2(1) = 0]$ User

Das Lösen übernimmt das CAS:

#7: $\left[a = \frac{3}{2}, b = -\frac{9}{2}, c = 0, d = 5\right]$ Solve(#6)

Diese Aufgabe haben wir nicht ausgewählt, weil wir sie in einem computerunterstützten Mathematikunterricht der Zukunft für so wichtig halten, sondern um zu zeigen, wie sich die Schwerpunkte verschieben, und was von den bisherigen Schülertätigkeiten übrig bleibt.

4.1.9. Zusammenfassung: CAS in der Algebra

Im traditionellen Mathematikunterricht ist wahrscheinlich in allen Ländern der Welt die Rechenfertigkeit das dominierende Ziel. Immer dann, wenn in der Geschichte der Mathematik neue Rechenhilfsmittel oder neue Rechenverfahren entwickelt wurden, mußte die bis dahin forcierte Kalkülkompetenz überdacht werden. Nun sind wir wieder an so einem entscheidenden Punkt der mathematischen Entwicklung angelangt: Die Nutzung des Computers und insbesondere der Computeralgebra-Systeme verlangt ein Überdenken der bisher im Mittelpunkt stehenden Rechenfertigkeiten.

Folgende Kompetenzen haben sich bei unseren Experimenten als wichtig erwiesen -man könnte von einer *algebraischen Allgemeinbildung* sprechen:

Strukturerkennungskompetenz:

Sie ist bei der Entwicklung eines Terms, bei der Eingabe und bei der Entscheidung für eine bestimmte Operation aber auch beim Interpretieren und Testen von Ergebnissen notwendig.

Äquivalenzerkennungskompetenz:

Besonders zu beachten ist die Schnittstelle Operieren - Interpretieren: Der Schüler muß Ergebnisse interpretieren, die er nicht selber produziert hat. Oft liefert das CAS unerwartete Resultate und der Schüler weiß nicht, ob sie zu seinen erwarteten Ergebnissen äquivalent oder von diesen verschieden sind. Auch die individuellen Ergebnisse verschiedener Schüler beim experimentellen Lernen müssen oft in bezug auf Äquivalenz überprüft werden. Daher müssen die Schüler Teststrategien zur Steigerung dieser Kompetenz entwikeln.

Grundgesetzanwendungskompetenz:

Gerade das White Box/Black Box-Prinzip erfordert diese Begründungskompetenz in der White Box-Phase als wesentlichen Bestandteil des verstehenden Lernens.

Elementare Kalkülkompetenz:

Einig sind wir nur, daß eine solche Kompetenz nach wie vor auch bei intensiver Nutzung von CAS notwendig ist, da ja sonst auch die Entscheidung für ein bestimmtes Modell, für eine bestimmte Operation oder für einen bestimmten Beweisschritt nicht möglich wäre. Wie aber diese Kompetenz im Detail aussieht, wissen wir noch nicht. Das wird Gegenstand vieler Untersuchungen und Diskussionen sein.

Testkompetenz:

Gerade bei dem durch die Verwendung von CAS möglichen experimentellen Lernen wird das Testen eine zentrale Tätigkeit. Auch die verstärkte Bedeutung des Modellbildens und des Interpretierens erfordert diese Kompetenz. Eine unstrukturierte Versuch und Irrtumsmethode führt aber kaum zum Ziel. Es ist die bewußte Aneignung heuristischer Teststrategien seitens der Schüler notwendig.

Visualisierungskompetenz:

Das Prinzip der Anschaulichkeit ist nicht neu. Ohne Computer war das Veranschaulichen aber oft sehr aufwendig. Die Verwendung von CAS bietet für den Erwerb und die Nutzung dieser Kompetenz völlig neue Möglichkeiten. Visualisieren mit dem CAS ist nicht nur ein Beitrag zu einem besseren Verständnis, sondern stellt auch eine neue Form des Operierens dar und erlaubt ein besseres Interpretieren von Ergebnissen.

4.2. Das Black Box/White Box-Prinzip

Wie schon der Name sagt werden beim Unterrichten nach diesem Prinzip die White und die Black Box-Phase vertauscht. Unterstützt vom CAS als Black Box erforscht der Schüler einen ihm nicht bekannten Bereich der Mathematik durch experimentelles, aktives Lernen und kommt zu Vermutungen, welche in der folgenden White Box-Phase abgesichert werden.

Bei dieser Arbeitsweise erweist sich das CAS als ein völlig neues Medium für den operativen Mathematikunterricht. Der Schüler kann mit Hilfe des CAS als "Expertensystem" real und gedanklich operieren, er kann durch experimentelles Arbeiten zu Einsichten kommen.

4.2.1. Lernphasen bei Anwendung des Black Box/White Box-Prinzips:

Phase 1: Black Box-Phase

Der Schüler erforscht einen ihm unbekannten Bereich der Mathematik mit Hilfe des CAS als Black Box durch Experimentieren, wie zum Beispiel:

- Einen neuen Algorithmus durch Ausführen mit dem CAS als Black Box und durch experimentelles Zurückführen auf Bekanntes.
- Beispiel: Entdecken und Erforschen der Kettenregel beim Differenzieren.

- Eine Operation oder eine Funktion, die das CAS zur Verfügung stellt (z.B.: DIFFERENTIATE, LIMES, TAYLOR, VECTOR, usw.).
- Beispiel: Erforschen der Eigenschaften und Auswirkungen der Taylorfunktion von DERIVE in der Black Box-Phase als Vorbereitung auf die Taylorreihenentwicklung in der White Box-Phase [vgl. Barzel, 1991].
- Ein Black Box Modul, den der Lehrer entwickelt hat.
- Ein vom Schüler bearbeitetes File, in dem die vom CAS als Black Box ausgeführten Operationen hinterfragt werden ("was der Computer kann, können wir auch").
- Beispiel: Siehe "White Box/Black Box-Prinzip in der Algebra": Am Beginn der White Box-Phase verwendet der Schüler die Befehle **Factor**, **Expand** oder **soLve** und erforscht danach die Auswirkung der Befehle durch Experimentieren.

Typische Arbeitsweisen:

- Ausführen von noch unbekannten CAS-Befehlen
- Untersuchen der Auswirkungen der Befehle
- Wechsel der Darstellungsform (Algebra-, Grafikfenster)
- Zurückführen auf Bekanntes
- Betrachten von Sonderfällen
- experimentelles schrittweises Nachvollziehen von BLACK BOX - Operationen, wie etwa **soLve** oder **Simplify**, durch Nutzen bekannter Operationen, wie **Expand** oder **Factor**.

Phase 2: White Box-Phase

Durch das operative Bearbeiten der Black Box soll der Schüler zu Einsichten über die zugrundeliegenden mathematischen Begriffe, Algorithmen oder Theorien kommen. Die in der Black Box-Phase gewonnenen Vermutungen sollen nun in der White-Phase begründet und abgesichert werden. Ausreichendes Üben, vielfältiges Anwenden, Begründen und Beweisen sollen die White Box stabilisieren. In weiteren, in der Spirale folgenden Phasen können dann die Inhalte dieser White Box als Black Box genutzt werden.

Beispiel 4.8: Die Kettenregel beim Differenzieren

Voraussetzungen sind Kenntnis der Begriffe: "Verkettung von Funktionen", Grenzwert reeller Funktionen, Differenzenquotient, Differentialquotient. Differentiationsregeln für Potenzfunktionen und Polynomfunktionen.

Black Box-Phase

$$\#1: \quad (3.x^2 + 7)^5 \qquad\qquad \text{User}$$

Läßt man Schüler "demokratisch" Ergebnisse der Ableitung dieser Funktion vermuten, so finden sich am häufigsten die Antworten: $5.(3.x^2 + 7)^4$ und $5.(6.x + 7)^4$.

$$\#2: \quad \frac{d}{dx}(3\cdot x^2 + 7)^5 \qquad\qquad \text{Dif(\#1,x)}$$

Bei Nutzung des CAS als Black Box ergibt sich für viele Schüler ein unerwartetes Ergebnis:

$$\#3: \quad 30.x.(3.x^2 + 7)^4 \qquad\qquad \text{Simp(\#2)}$$

Nun stellt sich die Frage, wie dieses Ergebnis zu erklären ist, oder besser gesagt, welche Regel dahinter steckt. Ein erster Schritt ist häufig die Anwendung der heuristischen Regel: "Führe auf Bekanntes zurück". Bekannt ist die Ableitung von Polynomfunktionen. Mit **Expand** erreicht man diese Zurückführung:

Expd(#1)

$$\#4:\ 243\cdot x^{10} + 2835\cdot x^{8} + 13230\cdot x^{6} + 30870\cdot x^{4} + 36015\cdot x^{2} + 16807$$

Die Ableitung könnte der Schüler selbst ausführen, im Sinne des White Box/Black Box-Prinzips kann die Arbeit aber auch dem CAS überlassen werden.

Dif(#4,x)

$$\#5:\ \frac{d}{dx}\left(243\cdot x^{10} + 2835\cdot x^{8} + 13230\cdot x^{6} + 30870\cdot x^{4} + 36015\cdot x^{2} + 16807\right)$$

$$\#6:\ 2430\cdot x^{9} + 22680\cdot x^{7} + 79380\cdot x^{5} + 123480\cdot x^{3} + 72030\cdot x \qquad \text{Simp(\#5)}$$

Dieser Ausdruck läßt natürlich noch keine Schlüsse auf Regeln zu. Erst durch Faktorisieren erhält man die Bestätigung, daß auch bei Zurückführen auf Bekanntes dasselbe Ergebnis erhalten wird.

$$\#7:\ 30.x.(3.x^{2} + 7)^{4} \qquad \text{Fctr(\#6)}$$

Um zu einer Vermutung für eine Regel zu kommen, definiert man eine "termlose" Funktion $G(x)$

$$\#8:\ G(x) := \qquad \text{User}$$

und differenziert mehrere zusammengesetzte Funktionen:

$$\#9:\ \frac{d}{dx} G(x)^{2} \qquad \text{User}$$

$$\#10:\ 2\cdot G(x)\cdot\frac{d}{dx} G(x) \qquad \text{Simp(\#9)}$$

$$\#11:\ \frac{d}{dx} \mathrm{SIN}(G(x)) \qquad \text{User}$$

$$\#12:\ \mathrm{COS}(G(x))\cdot\frac{d}{dx} G(x) \qquad \text{Simp(\#11)}$$

$$\#13:\ \frac{d}{dx} \sqrt{(G(x))} \qquad \text{User}$$

$$\#14:\ \frac{\frac{d}{dx} G(x)}{2\cdot\sqrt{(G(x))}} \qquad \text{Simp(\#13)}$$

Die Ergebnisse haben alle etwas gemeinsam: Das Produkt aus der Ableitung der"äußeren" Funktion und der Ableitung der "inneren" Funktion *G*.

Versucht man noch weiter zu verallgemeinern, das heißt, definiert man auch die äußere Funktion *F* "termlos", so erhält man wieder ein überraschendes Ergebnis in Form eines Limes, der dann in der White Box-Phase hinterfragt werden kann:

$$\#15:\ F(x) := \qquad\qquad \text{User}$$

$$\#16:\ \frac{d}{dx}\ F(G(x)) \qquad\qquad \text{User}$$

$$\#17:\ \left[\frac{d}{dx}\ G(x)\right]\cdot \lim_{@1 \to G(x)} \frac{d}{d\ @1}\ F(@1) \qquad\qquad \text{Simp}(\#16)$$

Auch der Ersetzen von $G(x)$ durch die Variable z und das Ableiten von $F(x)$ nach x kann als Vorbereitung auf die White Box-Phase dienen:

$$\#18:\ z := G(x) \qquad\qquad \text{User}$$

$$\#19:\ \frac{d}{dx}\ F(z) \qquad\qquad \text{User}$$

$$\#20:\ \left[\frac{d}{dx}\ G(x)\right]\cdot \lim_{@2 \to G(x)} \frac{d}{d\ @2}\ F(@2) \qquad\qquad \text{Simp}(\#19)$$

White Box-Phase

Nun ist der Boden bereitet für die theoretische Absicherung der gewonnenen Vermutung. Dafür gibt es in der Schulbuchliteratur genügend Vorschläge. Der Unterschied zum traditionellen Unterricht besteht eben darin, daß der Schüler schon durch aktives Lernen zu einer Vermutung gekommen ist, also in diese White Box-Phase schon etwas mitbringt und somit die Idee in der exaktifizierenden Phase viel besser verstehen wird wie wenn die theoretische Phase am Anfang des Lernprozesses stehen würde. Ein weiterer Unterschied ergibt sich aus der Möglichkeit, das CAS auch in dieser Phase beim Operieren als Black Box zu nutzen, wodurch sich der Schüler auf das Wesentliche, nämlich auf die logischen Schritte zur Herleitung der Regel konzentrieren kann.

4.3. Das Modulprinzip

Der Modulgedanke ist eine fundamentale Idee der Informatik, die von den CAS übernommen wurde. CAS werden selbst meist modulhaft geliefert: als Kernel und Packages. Man kann weitere Packages/Module/Utility-Files dazuschreiben, in Zeitschriften werden solche ständig veröffentlicht, auf öffentlichen Fileservern sind sie massenhaft zu finden.

Ein CA-Modul kann als die konsequente Weiterentwicklung jener kurzen Programme (*short programs* – meist in Basic, Pascal oder Logo) angesehen werden, die etwa seit der zweiten Hälfte der achziger Jahre verstärkt Einzug in den Mathematikunterricht gehalten haben. Diese Art von Programmen ist auch auf den Begleitdisketten fast aller gängigen österreichischen Mathematiklehrbücher zu finden, und oft sind Quelltexte auch direkt in den Lehrbuchtext eingearbeitet. Sie dienen vielfach Visualisierungszwecken oder zur Implementationen der meist kurzen Algorithmen, die aber für den Taschenrechner zu aufwendig wären.

4.3.1. Was ist ein Modul?

Unter Modularität versteht man, grob gesprochen, die Anwendung des Baukasten-Prinzips bei Problemlöseprozessen. Der Modulgedanke hat viele Quellen. Die zwei bekanntesten seien hier angeführt. R.Descartes faßt im "Discours de la méthode" das Wesentliche an der damals entstehenden Naturwissenschaft in vier Vorschriften zusammen:

- Die erste besagt, niemals eine Sache als wahr anzuerkennen, von der ich nicht evidentermaßen erkenne, daß sie wahr ist: d.h. Übereilung und Vorurteile sorgfältig zu vermeiden und über nichts zu urteilen, was sich meinem Denken nicht so klar und deutlich darstellte, daß ich keinen Anlaß hätte, daran zu zweifeln.
- Die zweite, jedes Problem, das ich untersuchen würde, in so viele Teile zu teilen, wie es angeht und wie es nötig ist, um es leichter zu lösen.
- Die dritte, in der gehörigen Ordnung zu denken, d.h. mit den einfachsten und am leichtesten zu durchschauenden Dingen zu beginnnen, um so nach und nach, gleichsam über Stufen, bis zur Erkenntnis der zusammengesetztesten aufzusteigen, ja selbst in Dinge Ordnung zu bringen, die natürlicherweise nicht aufeinander folgen.
- Die letzte, überall so vollständige Aufzählungen und so allgemeine Übersichten aufzustellen, daß ich versichert wäre, nichts zu vergessen. [Descartes, S.31f]

Verbirgt sich nicht in Punkt zwei und drei der Descartesschen analytischen Methode bereits vollständig das, was wir heute Top-Down-Methode bzw. Bottom-Up-Methode nennen? Und stehen nicht am Ende dieser Teilung eines Problems kleinste Einheiten, einzelne Bausteine, die wir als *Module* bezeichnen können? Diese Module sind also einerseits Endprodukt einer intensiven Auseinandersetzung mit einem Problem, einem Ausschnitt aus der uns umgebenden Realität. Andererseits sind sie aber auch Ausgangspunkt eines konstruktiven Prozesses, bei dem aus diesen kleinsten Wissenspaketen wieder größere Einheiten, größere Module zusammengesetzt werden können.

H.J.Vollrath sieht auch in den Elementen des Euklid bereits Ansätze zum Modulgedanken, wenn er schreibt: "Hier wird also gar nicht mehr auf die Konstruktionen der Postulate zurückgegriffen, sondern nur noch auf bereits gelöste Aufgaben, die man als "Bausteine" verwendet. Betrachtet man Konstruktionsbeschreibungen als Algorithmen, dann benutzt Euklid also bereits Module" [Postel/Kirsch/Blum, 1991, S.220].

Von besonderer Bedeutung und zu außerordentlicher Blüte gekommen ist die Methode der Modularisierung natürlich in der Informatik. Nach J.Ziegenbalg [Ziegenbalg,1984,S.404ff] meint hier Modularisierung insbesondere:

- Zerlegung eines komplexen Problems in einfache, überschaubare Bestandteile (Module). Jedes Modul sollte nach Möglichkeit eine gewisse eigenständige Bedeutung haben.
- Bearbeitung und Lösung der einzelnen Teilprobleme.
- Zusammensetzung der Teillösungen zu einer Gesamtlösung des Ausgangsproblems.

Für die Mathematik hat W. Dörfler [Dörfler, 1991, S.71f] zwei wesentliche Aspekte des Modulgedankens herausgearbeitet und dabei auch auf die weitreichenden Konsequenzen für den Mathematikunterricht hingewiesen.

Demnach können wir Module auffassen als *Wissenseinheiten*,

- in denen (komplexes) Wissen komprimiert wird, und
- in denen Operationen durch diese Kapselung als Ganzes abrufbar und einsetzbar werden.

"Das Modul entspricht einem als kognitive Einheit aufrufbaren kognitiven Schema, das zu seiner Verwendung nicht weiter aufgelöst werden muß, weil genügend "kondensierte" Erfahrung mit der kognitiven Tätigkeit des Schemas vorliegt". [Dörfler, a.a.O.]

Module haben sicher kognitive Entlastungsfunktion, sie tragen zur Reduktion der Komplexität bei, indem sie Abläufe, Tätigkeiten, komplexes Wissen als Einheit handhabbar machen und wie H.G.Weigand [Weigand,1993, S.431] ergänzt, wird "erst durch modulares Arbeiten ... ein effizientes kalkülhaftes Arbeiten ermöglicht".

Dörfler weist auch darauf hin, daß "der »erwachsene« Mathematiker ... gewisse Wissensblöcke als Muster, Vorlagen (templates) in seinem Denken zur Verfügung (hat), er kennt von diesen die Einsatz- und Verwendungsmöglichkeiten und kann sie flexibel in Problemlöseprozessen einsetzen. Als Beispiele solcher Module kann man benennen: Diagonalverfahren, vollständige Induktion, Lemma von Zorn, Auswahlaxiom; aber auch: Ableitung, Riemann Integral, lineare Abbildung usf."

Es muß hier angefügt werden, daß nicht nur bei den erwachsenen Mathmatikern, sondern auch im Unterricht bei den »jungen« Mathematikern immer schon solche Module verwendet wurden und werden. In ganz selbstverständlicher - ja trivialer Weise - etwa, wenn die fortgesetzte Addition zum Modul der Multiplikation zusammengefaßt oder die fortgesetzte Multiplikation zum Modul der Potenz erhoben wird. Aber natürlich kann auch das Lösen einer Gleichung, der Ableitungskalkül oder die Bestimmung von Extremwerten als Modul angesehen werden.

Durch die "Kapselung" von Wissen kann dieses in Form von Elementen, Einheiten, Objekten (vgl. 2.5.2, Bereitstellung neuer Sprachelemente) oder "Bausteinen" in den Problemlöseprozeß eingebaut werden. Die besondere Bedeutung der "Einkapselung" von erworbenem Wissen für den Mathematikunterricht liegt in der Veränderung und Reorganisation mathematischer Tätigkeiten. Diese Reorganisation läßt sich in drei Schritten beschreiben.

Schritt 1: Verstehen, Strukturieren, Aufspüren von Wissenseinheiten

Am Beginn steht das Verstehen. Ein bearbeiteter Problembereich, ein Unterrichtsthema, ein Projekt, ein mathematisches Teilgebiet muß soweit durchdrungen und verstanden sein, daß Wissenseinheiten aufgespürt werden und diese Wissenseinheiten zueinander in eine (hierarchische) Ordnung gebracht werden können (Stichworte: "lokales Ordnen", strukturierte Darstellung). "Es sei allerdings darauf hingewiesen,daß ein inhaltliches Begriffsverständnis dieser Module unverzichtbar ist, da nur so ein "didaktisches Prinzip der Balance zwischen Bedeutungshaltigkeit und operativer Aktion" beim Arbeiten mit dem Computer im Unterricht entwickelt werden kann." [H.G.Weigand, a.a.O.,S.432]

Schritt 2: Implementieren, Testen und Dokumentieren

Durch den Einsatz von CAS (die selbst als umfangreiche Sammlung von Modulen betrachtet werden können), wird nun ein weiterer Schritt möglich. Wir können nun über eine statische Zusammenfassung des erworbenen Wissens hinausgehen, indem wir es durch eine Implementation im CAS (das dann als Speicher und Prozessor dient) interaktiv nutzbar machen. Durch die Implementation verbindet sich die Ökonomie der Mathematisierung ("die Kraft des Formalen", über das so viele Kalküle, Techniken und Verfahren zugänglich werden) mit der numerischen, symbolischen und grafischen Leistungsfähigkeit des CAS.

Im Prozeß der Implementierung berühren sich Mathematik und Informatik: Implementierung heißt *mathematisch*: Definieren, Exaktifizieren, konstruktives Beschreiben, Strukturieren, Algorithmisieren und heißt *informatisch*: Formulieren in der Sprache des CAS, Nutzen von vorangehenden Modulen, Nutzen der Möglichkeiten des CAS, Beachten der Grenzen des CAS, Nutzbarmachen der Systemresourcen, eventuell Programmieren.

Beim Prozeß der Implementation (bei dem die "Kapselung" des Wissens stattfindet), ist es natürlich notwendig, in erster Linie den inneren Aufbau von Modulen im Auge zu haben. Demgegenüber steht beim Prozeß des Testens und der Dokumentation bereits das Wissen um die Funktionalität, die Anwendbarkeit und die Bedingungen der Anwendung im Vordergrund.

Schritt 3: Problemlösen mit Hilfe von Modulen

Durch die Verwendung der Module erfolgt nun die eigentliche Reorganisation mathematischer Tätigkeit, von der die Rede ist: Terme, Gleichungen, Funktionen, Algorithmen, Kalküle stehen als Ganzes zur Verfügung und können als Ganzes in den Problemlöseprozeß eingebaut werden, der damit überschaubarer wird. Denken und Arbeiten in der Problemlöseebene werden dadurch leichter möglich. Damit verbunden ist natürlich eine Verschiebung des Schwerpunkts von der Tätigkeit des Ausführens hin zur Tätigkeiten wie Planen, Reflektieren und Anwenden von Strategien. Damit ermöglicht der Modulgedanke letztendlich eine neue Qualität des Problemlösens.

4.3.2. Zur Genese von Modulen

Wir wollen hier eine Forderung H.G.Weigands voranstellen und gleichzeitig mit diesem Abschnitt einen kleinen Beitrag zu ihrer Erfüllung leisten: "Bei der Verwendung moderner Softwaresysteme ist es eine wichtige Aufgabe der Mathematikdidaktik, den Aufbau, die Konstruktion und den Umgang mit Modulen unter mathematischen und didaktischen Gesichtspunkten zu analysieren sowie Vorschläge und Strategien für die Einordnung von Modulen in den Mathematiklehrgang zu entwickeln" [a.a.O, S.432].

Die Implementation von Modulen kann von verschieden Seiten erfolgen. Die drei in bezug auf den Mathematikunterricht wesentlichsten sollen hier betrachtet werden:

Von Schülern erstellte Module

Module können das Produkt der Einzelarbeit von Schülern sein oder von diesen gemeinsam in Gruppen entwickelt werden. Für eine Umsetzung im Unterricht ist es allerdings notwendig, daß den Schülern der Umgang mit DERIVE hinreichend vertraut ist, wenngleich sich auch der "Programmieraufwand" - soweit überhaupt von einem solchen die Rede sein kann - meist in Grenzen hält, so daß er auch Schülern, die nicht einschlägig informatisch vorbelastet sind, zuzumuten ist. Dieser notwendige Grad an Vertrautheit stellt sich unserer Erfahrung nach dann ein, wenn das CAS einige Zeit im Unterricht konsequent eingesetzt wurde. Dabei spielt weniger die Zeit eine Rolle als vielmehr die Vielfalt der Probleme, die mit dem CA-Werkzeug behandelt wurden. Günstig ist sicher Vertrautheit mit der Definition von CA-Funktionen, Bekanntheit mit den wesentlichen Steuerstrukturen und, wenn möglich, mit rekursiven und iterativen Ausdrüken.

Zu Schritt 1: "Aufspüren" von Modulen

Für Schüler ist es sicher nicht einfach, ein mathematisches Teilgebiet zu strukturieren, frühestens kann dies nach einer eingehenden Bearbeitung dieses Gebiets von ihnen verlangt werden. Eine solche Strukturierung erfolgte bisher z.B. in Form einer Kurzfassung, einer Zusammenfassung des Gebiets, einer schematischen Darstellung und dem Erstellen einer Formelsammlung. Es ist aber in der Praxis nicht notwendig, mit der Implementation von Modulen wirklich bis zum Abschluß einer Unterrichtseinheit zu warten. Unserer Beobachtung nach sind Schüler sehr kreativ im Aufspüren von Wisseneinheiten.

Beispiel 4.9: Häufig wiederkehrende Abläufe als Module - das Modul als Rechenhilfe

Ein häufig wiederkehrender Ablauf im Mathematikunterricht ist das Erstellen von Tabellen, z.B. das Erstellen einer Wertetabelle. Dazu kann ein Modul entwickelt werden, das den immer wiederkehrenden Vorgang des Eintippens und Berechnen eines Terms für eine bestimmte Belegung in einem Schritt ausführen läßt.

```
#1:  WERTETABELLE(f, ug, og, sw) :=
                          VECTOR([x, f], x, ug, og, sw)          User
```

Auftretende Parameter: *f* Funktionsterm, *ug, og* untere und obere Grenze der Wertetabelle, *sw* Schrittweite. Dieses einfache Modul kann dann mit folgendem Aufruf verwendet werden:

$$\#2:\quad \mathrm{WERTETABELLE}\left[\frac{1}{x}, -2, 2, 0.5\right] \qquad \text{User}$$

$$\#3:\quad \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ -1.5 & -0.666666 \\ -1 & -1 \\ -0.5 & -2 \\ 0 & \pm\infty \\ 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1.5 & 0.666666 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \text{Approx(\#2)}$$

Das immer Wiederkehrende ist damit zu einem einzigen Schritt, zur Anweisung "Generiere eine Tabelle mit den angegebenen Spezifikationen" geworden.

Beispiel 4.10: Die Formel als Modul

Auch jede Formel kann als ein Modul betrachtet werden. Bei der Behandlung von Aufgaben in der Analytischen Geometrie etwa tritt oft das Problem auf, den Winkel zwischen zwei Vektoren - sowohl in der Ebene als auch im Raum - ermitteln zu müssen.

Die Formel $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|}$ [22] stellt hier eine Lösung dieses Problems dar.

Das Modul WINKEL (#1) stellt dann die (sogar dimensionsunabhängige) Implementation (in DERIVE) dar:

```
#1:   [Angle := Degree ]                                         User
```

Die in #1 durchgeführte Programmvoreinstellung ermöglich des Rechnen im Gradmaß.

```
                                  ┌     a · b     ┐
#2:   WINKEL(a, b)  := ACOS│─────────────│                      User
                                  └  |a| · |b|  ┘
```

Auftretende Parameter: *a, b* beliebig-dimensionale Vektoren

Ein Test dieser Implementation besteht im einfachsten Fall darin, mit dem implementierten Modul zuvor behandelte Aufgaben nochmals zu lösen:

Beispiele aus der Ebene:

```
#3:   WINKEL([1, 0], [0, 1])                                     User
#4:   90                                                   Approx(#3)

#5:   WINKEL([1, 1], [0, 1])                                     User
#6:   45                                                   Approx(#5)
```

Oder aus dem $\mathbb{R}^3$: Wie groß ist der Winkel zwischen Raumdiagonale und Grundfläche eines Würfels?

```
#7:   WINKEL([1, 1, 0], [1, 1, 1])                               User
#8:   35.2643                                              Approx(#7)
```

Beispiel 4.11: Anpassung des Systems an die Wünsche des Schülers - Erweiterung der Leistungsfähigkeit durch Module

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen tritt auch das Problem auf, Gleichungen der Art

$$x^n - z = 0$$

lösen zu müssen, d.h., es stellt sich die Frage nach den Wurzeln aus komplexen Zahlen. Mit diesem Problem wird man auch bereits im Zusammenhang mit der Definition von Wurzeln aus reellen Zahlen konfrontiert. Läßt sich die Wurzel aus einer negativen Zahl angeben?

Ist nicht $\sqrt[3]{-8} = -2$ [23]? Was ist eigentlich nicht korrekt an der Umformung

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \ ?$$

An Ende der Klärung dieses versteckten Begriffsproblems steht die Definition der n-ten komplexen Wurzeln, die sich mittels Satz von Moivre berechnen lassen. Man erhält alle n-ten Wurzeln aus $z = r.\ (\cos\varphi + i.\ \sin\varphi)$ mit

$$\zeta_k = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}) \ .$$

Das CAS liefert nun aber - je nach Voreinstellung - entweder die Hauptwurzel (k=0) oder eine reelle Wurzel, falls eine existiert, auch wenn sie nicht die Hauptwurzel ist, oder einfach nur irgendeine Wurzel. Wollen wir wirklich alle *n*-ten Wurzeln ermitteln, so läßt sich diese Systemanpassung durch ein Modul bewerkstelligen:

```
                               ┌   1/n  ┌    ┌ PHASE(z) + k·2·π ┐
#1:  C_ROOTS(z,n):= VECTOR  │|z|    ·│COS│──────────────────│  +
                               └        └    └        n         ┘

                     ┌ PHASE(z) + k·2·π ┐┐                ┐
                 î·SIN│──────────────────││, k, 0, n - 1│  User
                     └        n         ┘┘                ┘
```

Auftretende Parameter: *z* komplexer Radikand, *n* Wurzelexponent.

Die drei dritten Wurzeln von -8 sind damit:

```
#2:  C_ROOTS(-8,3) = [1+√3·î, -2, 1-√3·î]      User=Simp(User)
```

Sie erfüllen alle die Gleichung $x^3 + 8 = 0$

```
User=Simp(User)
                 3
#3:  VECTOR(rz , rz, [1 + √3·î, -2, 1 - √3·î]) = [-8, -8, -8]
```

Beispiel 4.12: Zusammenfassung eines Kapitels und interaktive Formelsammlung

Die Formelsammlung im CA-unterstützten Unterricht ist eine Sammlung von Modulen. Im folgenden wird ein Ausschnitt aus einer bei der schriftlichen Abschlußarbeit (Matura) tatsächlich verwendeten Formelsammlung (vgl. dazu 4.2.4) wiedergegeben. (Es wurde lediglich die Syntax an die Version 3.0 von DERIVE angepaßt). Dieser Ausschnitt besteht aus einer Reihe von Modulen, die im Laufe des Lehrplankapitels "Wachstumsprozesse und vernetzte Systeme" von Schüleren und Lehrer gemeinsam erarbeitet wurden. Ihr Sinn liegt hauptsächlich darin, Module zur Generierung von Tabellen und Module zur grafischen Darstellung bereitzustellen.

```
#1:  "Wachstumsprozesse und vernetzte Systemen"          User

#2:  "Wertetabelle für explizite Funktionen"             User

#3:  WERTETAB_E(f, ug, og, sw) :=
          VECTOR([x, f], x, ug, og, sw)                  User
```

Auftretende Parameter: f F*u*nktionsterm, *ug, og* untere und obere Grenze der Wertetabelle, sw Schrittweite.

```
#4:  "Wertetabelle für rekursive Funktionen"             User

#5:  WERTETAB_R(f, x0, y0, sz) :=
          ITERATES([n + 1, f], [n, x],[x0, y0], sz)      User
```

Auftretende Parameter: *f* rekursiver Funktionsterm, *x*0, *y*0 Startwerte, *sz* Schrittzahl.

```
#6:  "Einige nützliche Funktionen bei vernetzten Systemen"

#7   "Modul zur Simulation eines Systems mit einer
      Bestandsgröße"                                 User

#8:  SYSTEM1(r, y, y0, t0, δt, sz) :=
     ITERATES([t + δt, y + r·δt],[t, y], [t0, y0], sz)   User
```

Auftretende Parameter: r Änderungsrate, y Bestandsgröße, $y0$ Anfangsbestand, $t0$ Anfangszeit, δt Zeitintervall, sz Schrittzahl.

```
#9    "Modul zur Simulation eines Systems mit zwei
       Bestandsgrößen"                              User

#10:  SYSTEM2(r1, r2, y1, y2, y10, y20, t0, δt, sz) :=
      ITERATES([t + δt, y1 + r1·δt, y2 + r2·δt], [t, y1, y2],
    [t0, y10, y20],sz)                       User
```

Auftretende Parameter: $r1$,$r2$ Änderungsraten, $y1$,$y2$ Bestandsgrößen, $y10$, y20 Anfangsbestände, $t0$ Anfangszeit, δt Zeitintervall, sz Schrittzahl.

```
#11:  "Hilfsmodul zum Extrahieren einzelner Spalten aus
       einer Tabelle"                                     User

      ZWEISPALTEN(m, s1, s2) := [m`   , m`  ]`
#12:                             [   s1     s2]           User
```

Auftretende Parameter: m Tabelle (Matrix), $s1$,$s2$ zu extrahierende Spalten

Zum Schritt 2: Umsetzung im CAS

Eine Implementation von Modulen durch die Schüler selbst ist nur dann möglich, wenn solche Einheiten von diesen überhaupt erkannt werden, z.B. in Form von wiederkehrenden -algorithmischen - Abläufen, in Formeln, als gewünschte Systemerweiterungen oder als Zusammenfassungen von Unterrichtseinheiten. Eine weitere Voraussetzung ist - wie bereits erwähnt - die nötige Vertrautheit im Umgang mit dem CAS.

Zur Dokumentation ist es erforderlich, einen Ausdruck des implementierten Moduls bereitzustellen, einige Testbeispiele und vor allem die Bedingungen, die für einen Aufruf notwendig sind. Gemeint sind spezielle Einstellungen im System (in Bsp.4.10 etwa erfolgt durch Umstellung auf das Gradmaß `Angle := Degree`), die Beantwortung möglicher Fragen (etwa: Wie müßte die Implementation abgeändert werden, damit sie auch im Bogenmaß funktioniert?) und sonstiger wichtiger Voraussetzungen für einen erfolgreichen Einsatz des Moduls.

Zum Schritt 3: Integration in den Problemlöseprozeß

Gerade bei selbsterstellten Modulen sollte deren Anwendung beim Lösen von Aufgaben und als Hilfe zur Problemlösung keine besondere Schwierigkeiten bereiten. Allerdings ist bei der Erstellung solcher Module in Partnerarbeit oder durch ein Team von Schülern eine gewisse Vorsicht sicher am Platz. Module können unverstanden übernommen werden, selbsterstellte Module nach einiger Zeit nicht mehr richtig eingesetzt werden, weil der Zusammenhang, in dem sie entstanden sind, nicht mehr erinnert wird. K.Aspetsberger [Müller, 1995, S.77] führt verschiedene Vor- und Nachteile solcher Schüler-generierter Module an:

Vorteile der Modulkonzepts:

"Gute Schüler sind motiviert, sich durch das Definieren von Funktionen ein eigenes System zu schaffen. Dies ist umso mehr der Fall, als auch der Nutzen von Funktionen für Schüler leicht einsehbar ist. Das Schreiben von Funktionen ist eine Art des konstruktiven Exaktifizierens und bildet den Abschluß einer intensiven Erarbeitungsphase"

Nachteile des Modulkonzepts:

"Leistungsschwache Schüler verwenden Module "blind". Sie verwenden Funktionen, ohne ihre Wirkungsweisen zu verstehen und zu hinterfragen. Unverstandenes kann durch die Verwendung von Funktionen noch mehr verschleiert werden.

Die Fehlersuche bei unerwünschten Ergebnissen wird für den Schüler noch schwerer, falls die Funktionsweise der verwendeten Module vom Schüler nicht wirklich nachvollzogen werden kann."

Vom Lehrer zur Verfügung gestellte Module

Vom Lehrer zur Verfügung gestellte Module haben in erster Linie dann eine Berechtigung, wenn sie als Hilfsmittel zur Visualisierung eingesetzt werden, Simulationen ermöglichen oder wenn es sich um speziellen Systemanpassungen handelt, um Module zur Steigerung der Leistungsfähigkeit des Systems in einem bestimmten Problembereich. Es können hier Module, deren innerer Aufbau dem Schüler zugänglich gemacht werden soll, wie Beisp.4.13 von Modulen, deren innerer Aufbau für den Schüler eine Black Box bleiben kann, unterschieden werden. Zugänglich gemacht werden sollen solche Module, deren innere Struktur für das Verständnis eines Begriffs einen Betrag leisten kann. Bei beiden dargestellten Beispielen geht es um Visualisierung, wobei im ersten die "Öffnung" des Moduls Sinn machen kann, im zweiten eher nicht.

Beispiel 4.13: Erzeugung eines Stabdiagramms - ein zugängliches Modul

Das hier vorgestellte Modul STAB nützt die Rechenleistung des Systems zur Erzeugung von Diagrammen zur Visualisierung von Aufgaben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment (=aus einer Folge von *n* Versuchen bestehendes Experiment, bei dem jeder Versuch genau zwei mögliche Versuchsausgänge besitzt und jeder einzelne Versuch unter gleichen Bedingungen abläuft) mit der "Erfolgs"-Wahscheinlichkeit P die Anzahl *X* der "Erfolge" genau *k* ist, beträgt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \qquad (k = 0,1,....,n)$$

Der DERIVE-Befehl COMB(n,k) berechnet den Binomialkoeffizienten (#2), STRECKE ist ein Hilfsmodul, das an der Stelle k eine Strecke mit der Höhe h zeichnet..

```
#1:  "Binomialverteilte Zufallsvariable mit den
      Parametern n und p"                              User
                                   k         n - k
#2:  B(n, p, k) := COMB(n, k)·p ·(1 - p)                User

                          ┌ k  0 ┐
#3:  STRECKE(k, h) :=     │      │                      User
                          └ k  h ┘

#4:  STAB(n,p) := VECTOR(STRECKE(k,B(n,p,k)),k,0,n)     User
```

Auftretende Parameter: *n* Umfang der Stichprobe, *p* Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses *E*.

Mit diesem Modul können nun konkrete Verteilungen leicht visualisiert werden. Es kann dadurch zu einem besseren Verständnis des Begriffs "Wahrscheinlichkeitsverteilung" beitragen.

```
#5:  STAB(20, 0.5)                                      User

#6:  STAB(40, 0.5)                                      User

#7:  STAB(60, 0.5)                                      User

#8:  STAB(80, 0.5)                                      User
```

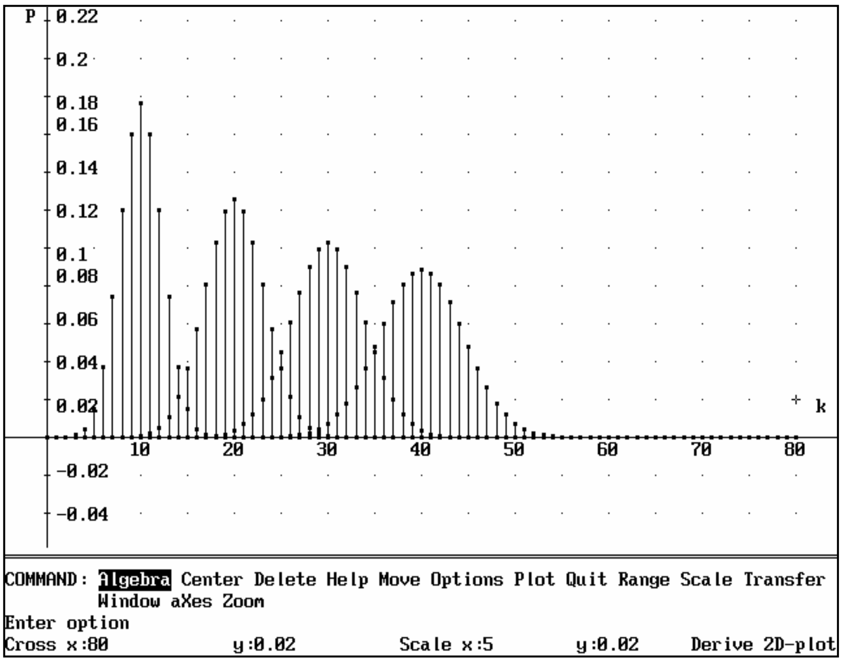


Abb. 4.9: Wahrscheinlichkeitsverteilungen binomialverteilter Zufallsvariablen

Beispiel 4.14: Modul zur Erzeugung von Webdiagrammen - ein geschlossenes Modul

Im Zusammenhang mit Simulationsaufgaben tritt häufig der Wunsch auf, zusätzlich zur Darstellung der Abhängigkeit von der Zeit (n-x_n-Diagramm) auch ein sogenanntes Web-Diagramm zu erstellen, um etwa Konvergenz oder chaotische Entwicklung besser verfolgen zu können.

Nach Angabe einer wichtigen Voreinstellung (in #1) und der Definition einer Leerfunktion (`NEXT(xn)` dient zur Aufnahme des iterativen Folgenterms) werden in #3 und #4 zwei Hilfsmodule definiert, die zum Zeichnen des ersten Striches bzw. der "Treppe" im gewünschten Diagramm dienen.

```
#1:  InputMode := Word                                        User

#2:  NEXT(xn) :=                                              User
                    ┌ x0        0       ┐
#3:  AUFTAKT(x0) := │                   │                     User
                    └ x0   NEXT(x0)     ┘

                   ┌     xn          NEXT(xn)        ┐
#4:  NEXTP(xn)  := │  NEXT(xn)       NEXT(xn)        │         User
                   └  NEXT(xn)    NEXT(NEXT(xn))     ┘
```

Nun kann das gesuchte Modul zusammengebaut werden. Append(Liste1,Liste2) dient dabei zur Vereinigung zweier Listen zu einer:

```
#5:  WEB(x0, sz) :=

       APPEND([AUFTAKT(x0)], VECTOR(NEXTP(xn), xn,
               ITERATES(NEXT(xn), xn, x0, sz - 1)))          User
```

Auftretende Parameter: $x0$ Startwert, sz Schrittzahl.

Damit sind wir z.B. in der Lage, ein Webdiagramm für eine Simulation eines Erwärmungsprozesses [Szirucsek u.a., 1990, S.178] zu erstellen.

Ein Gegenstand hat im Kühlschrank eine Temperatur von 6 °C. Er wird in eine Umgebung mit 20 °C gebracht. Sein Temperaturzuwachs beträgt pro Minute 30% des Unterschiedes zwischen der Umgebungstemperatur von 20 °C und seiner Temperatur am Beginn dieser Minute.

Die Aufgabe läßt sich durch folgende Iterationsgleichung beschreiben:

$$x_{n+1} = x_n + 0.3\,(20 - x_n)$$

$$x_{n+1} = 0.7\,x_n + 6 \quad \text{mit} \;\; x_0 = 6\,°\text{C}$$

Der Einsatz des Moduls erfolgt durch #6 und #7.

```
#6:  NEXT(xn) := 0.7·xn + 6                              User

#7:  WEB(6, 10)                                          User
```

In #8 und #9 wird die Iterationsgleichung aus Beispiel 2.?? verwendet:

```
#8:  NEXT(xn) := xn + 0.00625·xn·(400 - xn)              User

#9:  WEB(20, 10)                                         User
```

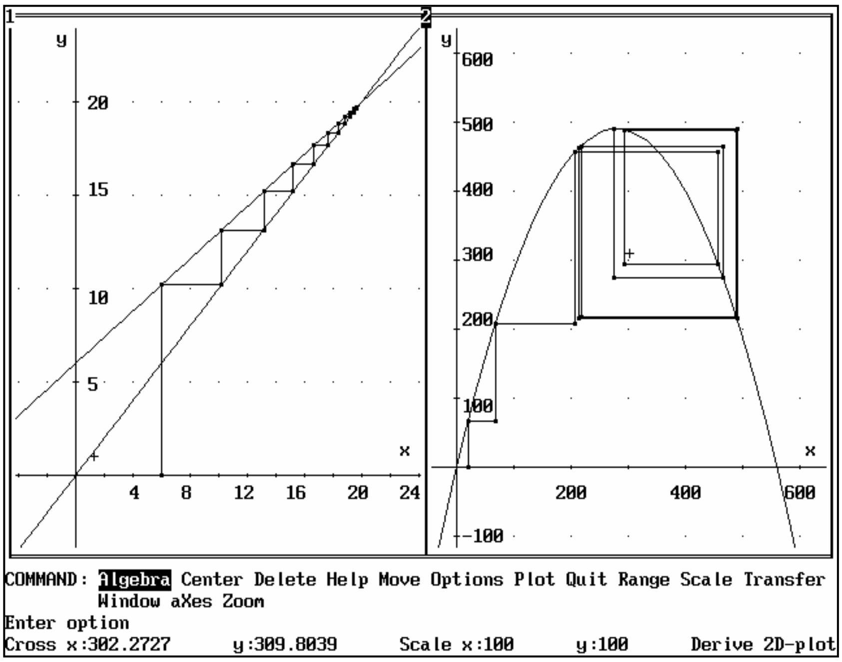


Abb. 4.10: Zwei Spinnwebdiagramme

Wird das Ergebnis von #7 und #8 (die entsprechenden Zahlenkolonnen sind aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nicht wiedergegeben) geplottet, so erhält man die folgenden Diagramme (Abb. 4.11).

Anmerkung: Der erste CA-fähige Taschenrechner (TI-92) hat dieses Modul bereits fest im System integriert.

Module, die vom Systementwickler zur Verfügung gestellt werden

Module werden bei praktisch allen CAS (in Form von Utilityfiles, Hilfsdateien, Pakages etc.) von den Systementwicklern beigestellt, um bausteinartig entweder Systemerweiterungen zur Verfügung zu stellen, die nicht dauernd im Kern des Systems zur Verfügung stehen müssen, oder um für bestimmte mathematische Gebiete Problemlösungen zu liefern.

Beispiel 4.15: Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Integration von Differenzengleichungen

Wir wollen zuerst ein Beispiel aus der Biologie bzw.Ökologie betrachten, das häufig in der Systemdynamik behandelt wird. Sehr oft geht es bei systemdynamischen Fragestellungen darum, das Langzeitverhalten von voneinander abhängigen Populationen (Räuber-Beute-Beziehung, Konkurrenz, Symbiose etc.) vorherzusagen. Für diese Zwecke ist das Euler-CAuchy-Verfahren oder das verbesserte Euler-CAuchy-Verfahren (Halbschrittverfahren) als Methode der numerischen Integration nicht ausreichend [vgl. Ossimitz/Schlöglhofer 1990,S.253]. In diesem Fall ist es günstig, genauere Verfahren, die in Modulform vorliegen müssen, einsetzen zu können. Bei der numerischen Approximation von Differentialgleichungen ist dies das Runge-Kutta-Verfahren. Im folgenden wird ein Ausschnitt aus der Datei ODE_APPR.MTH wiedergegeben, in der eine Implementation des Runge-Kutta-Verfahrens erfolgt und die wohl ohne intimere Kenntnisse sowohl des besagten Verfahrens wie auch der DERIVE-Programmierweise nicht zu verstehen ist. Bei einem Einsatz - im Zusammenhang mit der Behandlung vernetzter Systeme etwa - ist es daher empfehlenswert, dieses Modul im Hintergrund als sogenanntes Utilitiy-File zu laden.

```
#1:  "File ODE_APPR.MTH, copyright (c) 1990-1994 by Soft
   Warehouse, Inc."                                     User

#2:  RK_AUX3(p, v, u_, c1, c2, c3) :=

    c1 + (    lim      p) + 2·(c2 + c3)
          v->u_ + c3
   ───────────────────────────────────                  User
                   6

#3:  RK_AUX2(p, v, u_, c1, c2) :=

          RK_AUX3(p, v, u_, c1, c2,    lim      p)      User
                                   v->u_ + c2/2

#4: RK_AUX1(p, v, u_, c1) :=

          RK_AUX2(p, v, u_,c1,    lim      p)           User
                  v->u_ + c1/2
#5: RK_AUX0(p, v, v0, n) :=

  ITERATES(u_ + RK_AUX1(p, v, u_, lim p), u_, v0, n)    User
                                  v->u_

#6: RK(r, v, v0, h, n) :=

          RK_AUX0(h·APPEND([1], r), v, v0, n)           User
```

Auftretende Parameter: *r* Liste der Änderungsraten, *v* Liste der Bestände, *v*0 Liste der Anfangsbestände, *h* Schrittweite, *n* Anzahl der Berechnungsschritte.

Bemerkung: Für eine genauere Behandlung der in der Systemdynamik verwendeten numerischen Verfahren mit CA-Unterstützung siehe CA-Report #5 [Lechner, Wien, 1996]

Unter Verwendung dieses Numerik-Moduls sind wir in der Lage, das Langzeitverhalten eínes Systems zu untersuchen, und können dabei Unsicherheiten - zumindest aufgrund eines inadäquaten numerischen Verfahrens - ausschließen. Als Beispiel wollen wir ein Räuber-Beute-Modell betrachten:

Ein Biotop sei von Räuber- und Beutetieren bevölkert. Die Zahl der Beutetiere ist bestimmt durch ihren natürlichen Zuwachs von jährlich 18% und ihre Abnahme durch ihre Feinde. Diese Abnahme ist proportional zur Anzahl der Räuber und zur Anzahl der Beutetiere selbst (Proportionalitätsfaktor b=0.005). Der Zuwachs an Räubern ist proportional zur Zahl der Beutetiere und zur Zahl der Räuber (Proportionalitätsfaktor d=0.0001). Die natürliche Abnahme betrage 15%. Anfangs gibt es 1500 Beutetiere und 25 Räuber im betrachteten Biotop. Beschreibe die Langzeitentwicklung der beiden Populationen!

Die Aufgabe läßt sich in zwei gekoppelte Iterationsgleichungen fassen:

$$x_{n+1} = 0.18 \cdot x_n + 0.005 \cdot x_n \cdot y_n$$
$$y_{n+1} = -0.15 \cdot y_n + 0.0001 \cdot x_n \cdot y_n$$

Unter Verwendung des Moduls RK (#8) und anschließender Einschränkung der entstehenden Tabelle mit der Hilfsfunktion #9 ergibt sich mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 25$, $y_0 = 1500$ folgendes Bild der Langzeitentwicklung:

```
#8: RK([0.18·x-0.005·x·y, -0.15·y+0.0001·x·y], [t,x,y],
                   [0,1500,25], 1, 80)     User
```

$$\#9: \quad \text{ZWEISPALTEN(m, s1, s2)} := \left[m\grave{}_{s1}, m\grave{}_{s2} \right]\grave{} \qquad \text{User}$$

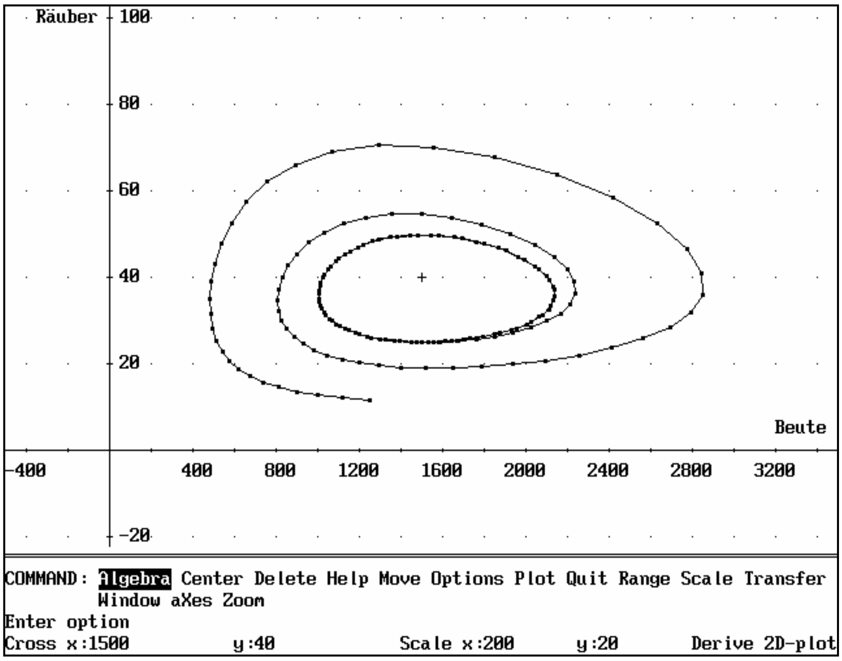


Abb. 4.11: Ein stabiles (?) Räuber-Beute-System (Phasendiagramm)

Vergleichsweise wurde die Aufgabe auch mit dem Euler-CAuchy-Verfahren gerechnet. Das Ergebnis zeigt, daß bei längerfristigen Prognosen das verwendete numerische Verfahren von großer Bedeutung ist (Abb.4.12).

Nach der Behandlung eines diskreten Prozesses wollen wir noch ein Beispiel eines kontinuierlichen Vorgangs aus der Physik betrachten (nach J.Zöchling [Reichel, 1995, S.278ff]), bei dem ein System-Modul zum Einsatz kommt.

Beispiel 4.16: Ein idealer und ein realer Vorgang:

a) Die ideale Bewegung eines Federpendels:

Wollen wir die Bewegung eines Federpendels unter idealen Verhältnissen beschreiben, so können auf Newtons dynamischem Grundgesetz (2.Newtonsches Axiom) aufbauend anschreiben

$$F = m.a = m.\frac{d^2 x}{d t^2}$$

wobei *m* die Masse des schwingenden Körpers und *a* die Beschleunigung des Massenstücks an der Feder beschreibt. Unter Verwendung des Hookschen Gesetzes $F = -k.x$ ergibt sich daraus die Bewegungsgleichung:

$$m.\frac{d^2 x}{dt^2}+k.x=0$$

Durch Einführung der bekannten Beziehung $\omega^2=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 25 für die Kreisfrequenz ω können wir die allgemeinere Bewegungsgleichung anschreiben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2}+\omega^2.x=0$$

Wir wählen nun für die Eigenfrequenz f= 0.5 Hz (⇒ ω = 2 π f = π) und für die Anfangswerte $x(0)=0$ und $v(0) = \pi$ wählen. Unter Einsatz des Moduls DSOLVE2_IV aus dem Utilitiy-File ODE2.MTH erhalten wir eine Lösung, die auch zu erraten gewesen wäre:

```
                           2
#1:   DSOLVE2_IV(0, π , 0, t, 0, 0, π)                    User

#2:   SIN(π·t)                                         Simp(#1)
```

Plotten wir #2, so erhalten wir Abb.4.13 (obere Hälfte).

b) Die reale Bewegung eines Federpendels unter Reibungseinfluß

In der Realität wird aber keine Feder sich derart ideal bewegen, Reibungseinflüsse sind unvermeidlich. Um realtätsnäher zu arbeiten, setzen wir in unserem Modell die Reibung proportional zur Geschwindigkeit an.

$$\frac{d^2 x}{dt^2}+c.\frac{dx}{dt}+\omega^2.x=0$$

Wenn wir (willkürlich) c = 0.5 setzen und im übrigen obige Bedingungen übernehmen, erhalten wir mit dem Differentialgleichungsmodul

```
                             2
#3:   DSOLVE2_IV(0.5, π , 0, t, 0, 0, π)                  User
```

die Lösung:

```
                                   2
                - t/4    ┌ t·√(16·π  - 1) ┐
       4·π·ê        ·SIN│────────────────│
#4:                      └       4        ┘                Simp(#3)
      ───────────────────────────────────────
                           2
                     √(16·π  - 1)
```

Wenn wir #4 plotten, so erscheint die erwartete gedämpfte Schwingung. Ohne Sinusfunktion ergeben sich die Einhüllenden (Abb. 4.13, unterer Teil).

Schließlich können wir uns noch von der Richtigkeit unserer Lösung überzeugen, wenn wir diese (hier zuerst der Funktion $X(t)$ zugewiesen) in die Ausgangs-Differentialgleichung einsetzen.

```
      ┌d ┐2          1   ┌d ┐1         2
#7:   │──│ X(t)+  ───·│──│ X(t)+ π ·X(t)  =  0     User=Simp(User)
      └dt┘          2   └dt┘
```

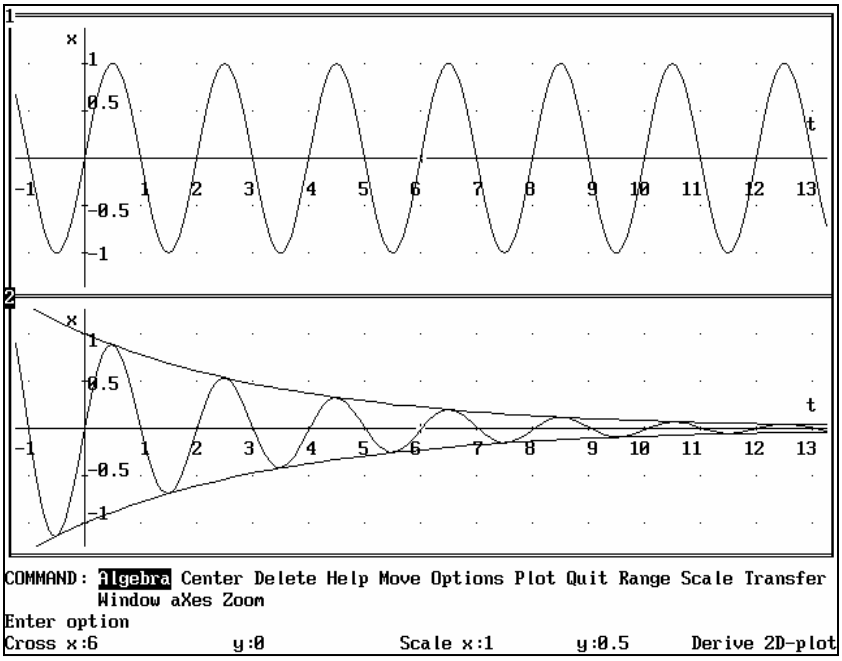


Abb. 4.12: Schwingungsgleichung ohne und mit Reibung

Zusammenfassung:

CAS fördern modulares Denken und Problemlösen: Anzustreben ist, daß die Lernenden die Module auch selber entwickeln und dabei zumindest grundsätzliche Kenntnisse des inneren Aufbaues erwerben. Bei der Nutzung dieser Module steht aber dann das Wissen um Funktionalität, Wirksamkeit, Anwendbarkeit usw. im Vordergrund.

Module stellen eine wesentliche Komponente eines CA-unterstützten, experimentellen Zuganges zur Mathematik dar, sie können helfen, Begriffe vorzubereiten, und sollen zu einer Exaktifizierung hinführen. "Man stellt Teile einer Begriffsbildung, eines Lösungsprozesses, etc. als mögliches Objekt im CAS (z.B. als Funktionsausdruck, Term o.ä.) dar und verwendet es in anderen Zusammenhängen, entwickelt das Objekt weiter, setzt verschiedene Objekte zusammen und gelangt damit zu einer höheren Stufe im Prozeß des mathematischen Arbeitens“ [Köhler, 1995, S.87]

Module können sie *eine wesentliche Rolle im Rahmen eines anwendungsorientierten* Mathematikunterrichts - spielen, bei dem der Schwerpunkt in der Bildung geeigneter Modelle und Mathematisierungen liegt. Werden solche Module geschickt im Unterricht eingesetzt, so können sie zu wachsen anfangen, *eine Eigendynamik entwickeln und eine fruchtbare Weiterentwicklung* erfahren.

Ihre **Sinnhaftigkeit** liegt einerseits

- im Erstellen, wenn damit schrittweises Definieren, Förderung des modularen Arbeitens und strukturierten Vorgehens (Fallunterscheidungen, Übersichtlichkeit, "lokales Ordnen") trainiert wird. Aber auch dann, wenn Problemlösungen und Unterrichtseinheiten zusammengefaßt werden sollen;
- im Endprodukt, wenn das Modul Rechenhilfe, eine Erweiterung der grafischen Möglichkeiten sein soll. Und auch dann, wenn die Sammlung der geschaffenen Module Basis für eine höhere Stufe des Problemlösens sein soll.

4.4. Die Window-Shuttle-Technik

Beispiel 4.17: "Linearisieren von Daten"

Eine Datenmenge ist durch eine lineare Funktion gegeben. Es werden Daten angegeben: f(101)=271.1; f(102.4)=275.6; f(104.6)=280.1; f(106)=283.6.

Durch einen Abschreibfehler ist ein Wert falsch angegeben worden. Stelle anhand einer geeigneten Zeichnung fest, welcher Datenwert falsch ist! Bestimme die Termdarstellung der linear organisierten Datenmenge und korrigiere den falschen Wert! [vgl.Bürger-Fischer-Malle Oberstufe 1]

Ziele: Erkennen von linearen Beziehungen. Lösen von Gleichungssystemen.

Rolle des CAS: Die Grafik dient als Entscheidungshilfe für das Aufsuchen von Zusammenhängen. Die Berechnungen erfolgen im Algebramodus. Ergebnisse werden im Grafikmodus getestet

Schritt 1:

Zuerst wird die Datenmatrix als Vektor eingegeben. Bei einer ersten groben Skalierung erscheint die Punktmenge undifferenziert auf dem Bildschirm (Abb 4.14).

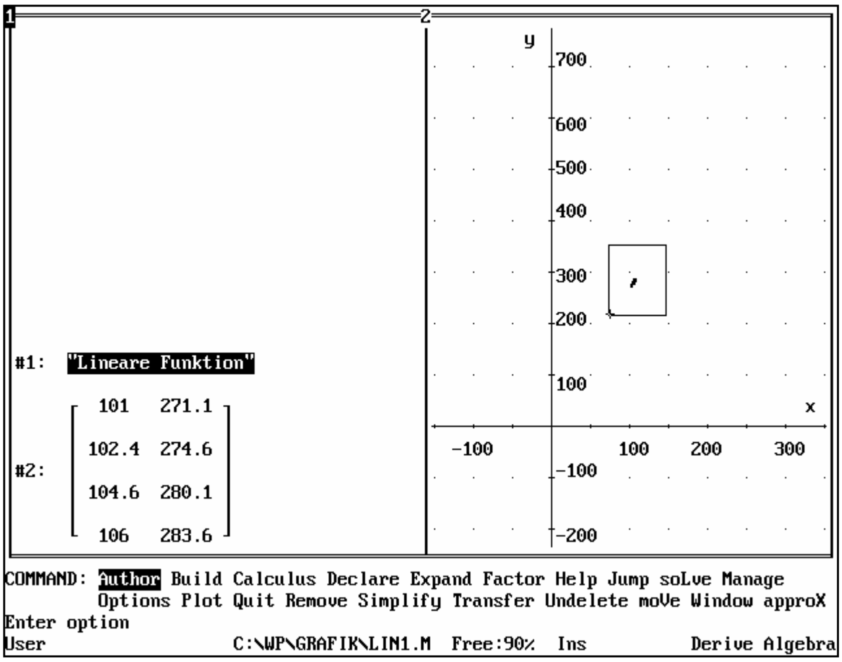


Abb. 4.13: Visualisieren von Daten

Mit dem Befehl **Zoom** oder mit dem **Range**-Befehl kann der Bildausschnitt vergrößert werden. *Connected* verbindet die gezeichneten Punkte. Man erkennt, daß der 2. Punkt der Datenmatrix nicht auf der Geraden liegt (Abb. 4.15).

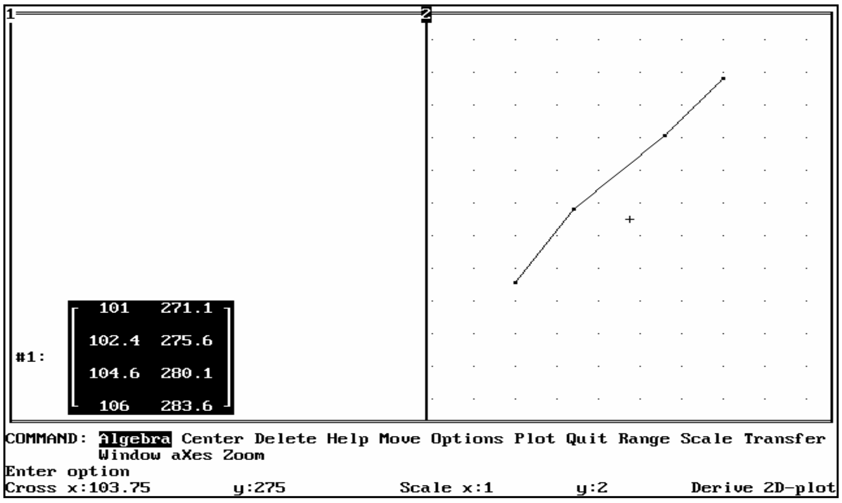


Abb. 4.14: Visualisieren von Daten

Schritt 2:

Nun kehrt man in das Algebrafenster zurück, um die Gleichung einer Geraden aufzustellen. Man wählt dafür etwa den ersten und den letzten Punkt. Das Lösen von Gleichungssystemen erfolgt durch Eingabe eines Vektors bestehend aus den zwei Gleichungen. Mit dem **soLve**-Befehl erhält man die Steigung *k* und den Abschnitt *d*.

Die so ermittelte lineare Funktion wird nun im Grafikfenster eingezeichnet (Abb.4.16).

Schritt 3:

Danach wird der Funktionswert des zweiten Punkts korrigiert und überprüft, ob auch der dritte Punkt auf der Geraden liegt. Jetzt wird die Datenmatrix richtiggestellt und zur Probe nochmals gezeichnet (Abb.4.17).

Dieses Beispiel soll aufzeigen, daß die Chance, in verschiedenen Fenstern mehrere Darstellungsarten gleichzeitig zu nutzen, neue didaktische Möglichkeiten bietet.

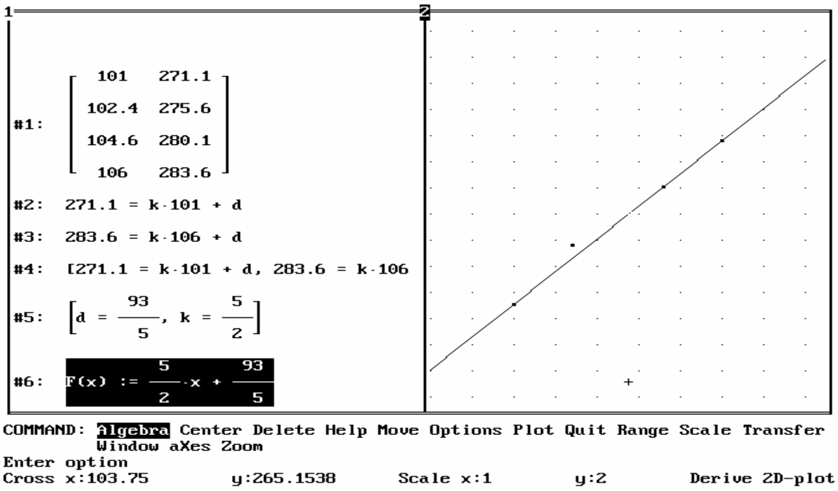


Abb. 4.15: Linearisieren

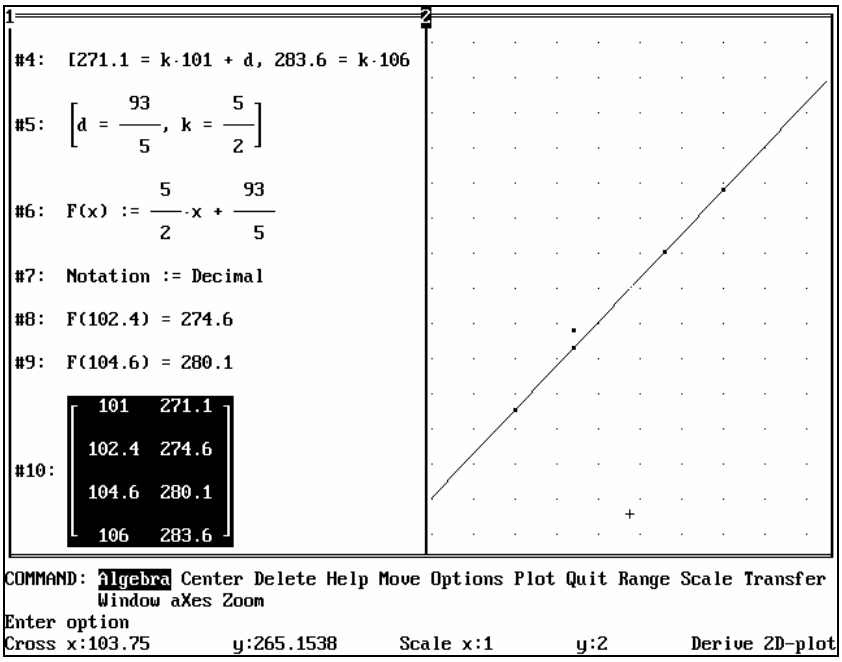


Abb. 4.16: Linearisieren

4.4.1. Die Idee der Window-Shuttle-Technik

Viele Anregungen zur Formulierung dieses Prinzips sowie zur Entwicklung von Unterrichtsmaterialien und zur Durchführung von Experimenten mit Schülern verdanken wir einer Arbeit von W. Dörfler mit dem Titel "Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium" [Dörfler, 1991]. Besonders Experimente in Klassen, wo das CAS in jeder Arbeitssituation zur Verfügung steht - also nicht nur im Unterricht, sondern auch zu Hause und in der Prüfungssituation - haben die These bestätigt, daß Kognition als funktionales System gesehen werden muß, das Mensch und Werkzeug, aber auch den sonstigen materiellen und sozialen Kontext umfaßt. Das Werkzeug ist demnach nicht nur "Verstärker" menschlicher Leistungen, es kann Kognition qualitativ verändern und neue Fähigkeiten generieren.

Sowohl im Abschnitt "Kognitive Modelle und Gegenständlichkeit des Denkens" als auch im Kapitel "Computer als Medium für Prototypen" finden sich Thesen, die die Window-Shuttle-Technik begründen:

"Denkprozesse erfolgen oft vorteilhaft anhand gegenständlicher Vorstellungen, Repräsentationen, Modellierungen der jeweiligen Problemsituation"

"Allgemeinbegriffe bzw. Kategorien werden mittels prototypischer Repräsentanten oder Vertreter kognitiv verfügbar gemacht für kognitive Funktionen wie Gedächtnis, Problemlösen, Herstellen von Beziehungen zwischen Klassen. Es wird also i.a. mental nicht abstrakt mit definierten Eigenschaften oder Bündeln von Eigenschaften operiert, sondern gegenständlich mittels der mentalen Vorstellung charakteristischer Exemplare oder sogar direkt an materiellen prototypischen Repräsentanten."

"Erst die Bereitstellung verschiedener Prototypen eines bestimmten Allgemeinbegriffs, das Herstellen von Beziehungen zwischen den einzelnen Prototypen lenkt die Aufmerksamkeit des Lernenden über die Spezifität des einzelnen Prototyps hinaus auf den übergeordneten Begriff."

"Um das "Prototypische" als invariante Eigenschaft erkennen zu können, muß der Prototyp öfter Veränderungen unterworfen werden."

Man denke zum Beispiel nur an den Funktionsbegriff. Nicht durch eine, noch so "saubere", abstrakte Definition wird der Schüler einen Zugang zu diesem Begriff finden, sondern durch das Angebot an geeigneten Prototypen

- enaktive (d.h.:handlungsorientierte), ikonische oder symbolische - , die die Aufmerksamkeit des Lernenden auf die wesentlichen Eigenschaften des Begriffs lenken. Eine besonders wichtige Tätigkeit in diesem Prozeß ist das Herstellen von Beziehungen zwischen den einzelnen Prototypen. Dadurch kann der Lernende zur Einsicht gelangen, daß der einzelne Prototyp nur eine von mehreren Erscheinungsformen des Begriffs Funktion ist, und erst danach ist eine verbale oder formal-allgemeine Definition des Begriffs "Funktion" sinnvoll.

Der Ablauf des Lernprozesses nach der Window-Shuttle-Technik und die Funktion des CAS bei diesem Prozeß:

- Der Lernende aktiviert in verschiedenen Fenstern des CAS verschiedene für das jeweilige Problem oder den jeweiligen Begriff adäquate Prototypen. Zum Beispiel einen symbolischen im Algebrafenster und einen grafischen im Grafikfenster. Durch den Einsatz des Computers werden noch dazu Darstellungsmöglichkeiten erschlossen, die vorher nicht zugänglich waren, wie etwa rekursive Modelle.
- Nun erfolgt die Bearbeitung der einzelnen Prototypen, wobei die Vorzüge des CAS, wie Interaktivität, leichte Manipulierbarkeit, Wiederholbarkeit, genutzt werden können.
- Die Mehrfenstertechnik erlaubt das simultane Arbeiten mit den verschiedenen Prototypen. So kann etwa in ständiger Wechselwirkung zwischen Algebra- und Grafikfenster die Auswirkung algebraischer Operationen auf den Graphen untersucht werden, oder es können sich aus der Untersuchung des Graphen Ideen für Aktivitäten im Algebrafenster ergeben. Die Konsequenzen der Veränderung einzelner Parameter im Algebrafenster (etwa bei rekursiven Darstellungen) können direkt im anderen Fenster (etwa an Tabellen oder am Graphen) untersucht werden.
- Arbeiten mit der Window-Shuttle-Technik bedeutet also, daß sich ein Begriff, eine Problemlösung durch mehrmaliges Hin- und Herpendeln ("Shutteln") zwischen verschiedenen Darstellungsformen, das heißt zwischen verschiedenen Fenstern des CAS, entwickelt.

Die Beobachtung der Schüler im Rahmen unseres CAS-Projekts lassen gestützt auf die in der Arbeit von W. Dörfler formulierten Thesen über den Computer als kognitives Medium den Schluß zu, daß die Arbeitsweise mit der Window-Shuttle-Technik, die erst durch CAS möglich gemacht wurde, wesentlich zur qualitativen Veränderung von Kognition beitragen kann.

Beispiel 4.18: Asymptotische Polynomfunktionen an rationale Funktionen

Ziele:Ausgehend von einem naiven Asymptotenbegriff ("nähert sich beliebig") soll diese Aufgabensequenz zu einem exakteren Begriff führen. Der Schüler soll erkennen, daß asymptotische Funktionen von rationalen Funktionen nicht nur lineare Funktionen, sondern auch Polynomfunktionen höheren Grades sein können.

Voraussetzungen:Ein naiver Asymptotenbegriff; Grenzwert von Zahlenfolgen; Polynomdivision.

1. Schritt:

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ 26 wird gezeichnet und mit dem **ZOOM**-Befehl verkleinert, um das Verhalten im Unendlichen untersuchen zu können.

1. Vermutung: Die Asymptote ist eine Gerade. Nun soll der Schüler experimentell einige Geradengleichungen aufstellen und im Grafikfenster testen (siehe Abb.4.18).

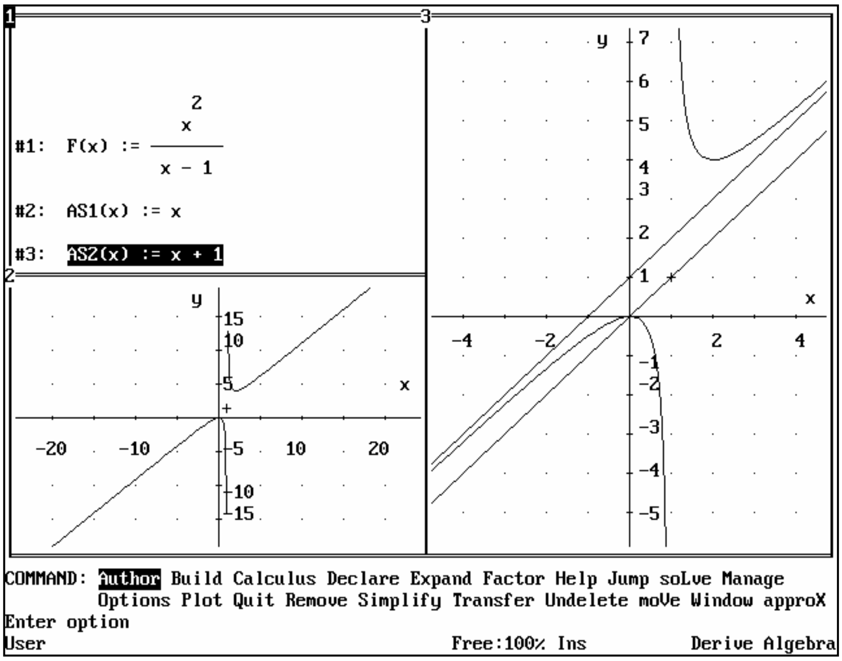


Abb. 4.17: Asymptotische Funktionen

2. Schritt:

Die Idee "nähert sich beliebig" oder "der Abstand zwischen der Funktion und der asymptotischen Funktion strebt gegen Null" wird nun im Algebrafenster durch die Definition der Distanzfunktion DIST(x) "mathematisiert".

#1: $F(x) := \dfrac{x^2}{x - 1}$

#2: AS1(x) := x

#3: AS2(x) := x + 1

#4: DIST(x) := F(x) - AS2(x)

Zuerst wird durch Einsetzen mit Zahlen experimentiert.

#5: Precision := Approximate

#6: DIST(5) = 0.25

#7: DIST(-5) = -0.1666666666666666666

#8: DIST(10000) = 0

Dabei kann es notwendig sein, die Rechengenauigkeit zu erhöhen, um falsche Vermutungen auszuschließen.

#9: PrecisionDigits := 20

#10: $\text{DIST}(10000) = 1.0001000100010001000 \cdot 10^{-4}$

Danach ermittelt man den Limes von DIST(x) für $x \to \pm\infty$. Dabei wird das CAS als Black Box eingesetzt (siehe White Box/Black Box-Prinzip).

```
      lim  DIST(x) = 0
#11:  x->∞

       lim  DIST(x) = 0
#12:  x->-∞
```

Vereinfacht man mit **Simplify** die Distanzfunktion, so erhält man:

$$\text{\#13: } \mathrm{DIST}(x) = \frac{1}{x - 1}$$

3.Schritt:

Nach dieser experimentellen Phase soll nun nach einer Methode gesucht werden, die asymptotische Funktion rechnerisch zu ermitteln.

Aus Zeile #3 ergibt sich: F(x) = AS(x) + DIST(x), wobei AS(x) die asymptotische Polynomfunktion ist und DIST(x) die Distanzfunktion, die für $x \to \pm\infty$ gegen 0 strebt.

Andererseits ist von der Polynomdivision bekannt:

Seien p und q Polynome m-ten und n-ten Grades, so erhält man bei der Division $p(x) \div q(x)$ ein Quotientenpolynom $a(x)$ und ein Restpolynom $r(x)$, wobei der Grad von r kleiner n ist.

Somit ist eine rationale Funktion $F(x)$ folgendermaßen darstellbar:

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$. Von rationalen Funktionen $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ mit Grad(r) < Grad(q) wissen wir aber, daß sie für $x \to \pm\infty$ gegen 0 streben.

Diese Überlegungen führen also zum Satz von der asymptotischen Annäherung einer rationalen Funktion durch eine Polynomfunktion:

Es sei f: y = p(x)/q(x) eine rationale Funktion und a(x) das Quotientenpolynom der Polynomdivision p(x):q(x). Dann ist a eine asymptotische Funktion an f. [Reichel, 1991]

Damit haben wir aber auch eine Methode gefunden, die gerade mit CAS sehr einfach ermöglicht, die asymptotische Polynomfunktion zu finden. Bei Verwendung von DERIVE erhält man mit dem Befehl **Expand** sofort das Ergebnis der Polynomdivision.

#14: $\dfrac{1}{x - 1} + x + 1$	Expd(#1)
#15: AS(x) := x + 1	User
#16: REST(x) := $\dfrac{1}{x - 1}$	User

4. Schritt:

Nachdem man mit **F3** die asymptotische Funktion (#15) und das Restglied (#16) isoliert hat, wechselt man gemäß dem Shuttle Prinzip wieder in das Grafikfenster und untersucht die Graphen der Asymptote und des Restgliedes in Relation zur rationalen Funktion.

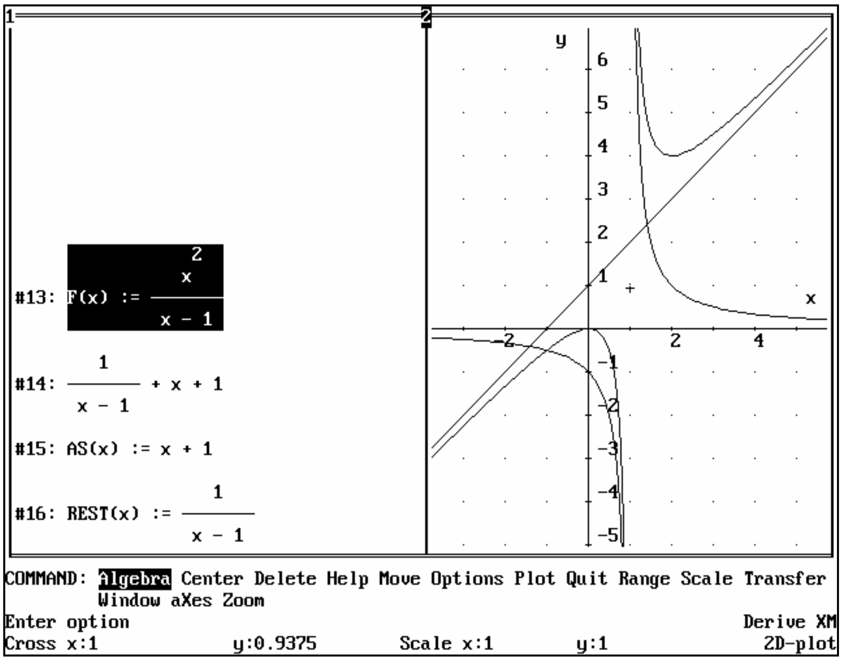


Abb. 4.18: Asymptotische Funktionen

Es sollten auch einige rationale Funktionen mit asymptotischen Funktionen höheren Grades untersucht werden, wie zum Beispiel in Abb.4.20:

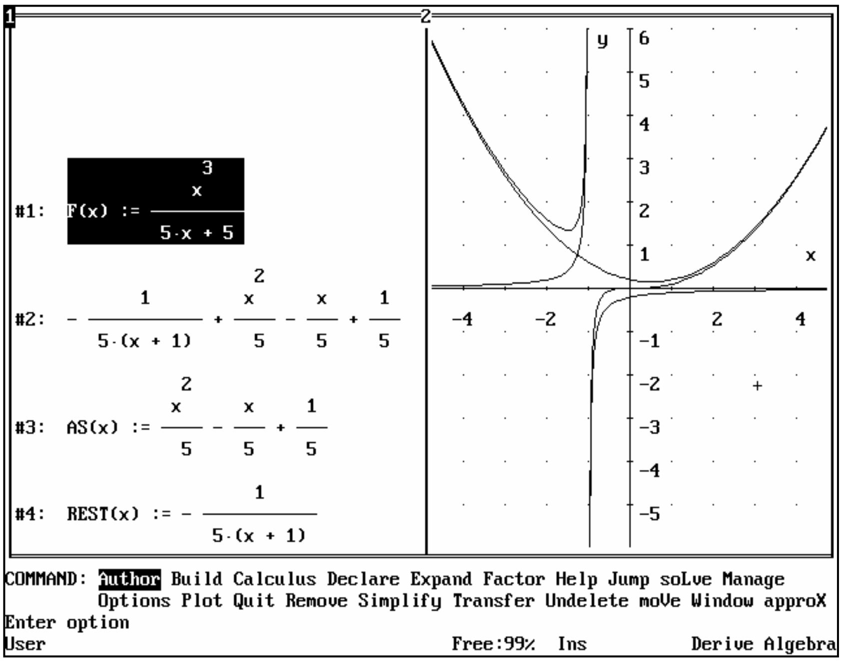


Abb. 4.19: Asymptotische Funktionen

Ein Beispiel, bei dem mehrere Algebrafenster verwendet werden, um Strategien für das Lösen von Gleichungen zu vergleichen, findet man in der 'Gleichungsbox' in Kap.4.1 (White Box/ Black Box-Prinzip). Der Schüer vergleicht verschiedene Prototypen von Äquivalenzumformungen mit dem Ziel, durch Abwägen der Vor- und Nachteile eine ihm passende Strategie zu finden.

5. Veränderung in der Unterrichtskonzeption

Wenn man sich für ein computerunterstütztes Unterrichtskonzept entscheidet, muß man sich darüber im klaren sein, daß diese neue Lernumgebung die gesamte Unterrichtsorganisation, das Rollenbild von Lehrern und Schülern, beginnend von der Vorbereitungsarbeit des Lehrers bis hin zur Prüfungssituation verändert. Es ist daher nicht nur notwendig, wie in den vorangehenden Kapiteln beschrieben, die Lernformen und die didaktisch-strategische Planung neu zu überdenken, es müssen auch notwendige Veränderungen von den Unterrichtsmethoden, über Arbeitsunterlagen bis hin zu den Prüfungsinhalten und -formen mit berücksichtigt werden.

5.1. Veränderungen im Methodeneinsatz

Wir beziehen uns in diesem Kapitel auf eine Untersuchung, die Robert Nocker im Rahmen des österreichischen Computeralgebraprojekts durchgeführt hat. Eine genauere Beschreibung dieses Projekts folgt im Kapitel 6. In dieser Studie werden die Ergebnisse einer Unterrichtsbeobachtung in 20 Unterrichtsstunden mit Einsatz von Computeralgebra und 37 Stunden ohne Computereinsatz verglichen. Die Beobachtung erfolgte in gymnasialen Klassen der 9. bis 11. Schulstufe. Genauere Informationen über das Beobachungsinstrument, die Stichprobe und ausführlichere Interpretationen können Interssierte aus den Berichten über das Projekt entnehmen [Nocker, 1994].

Wir wollen hier nur jene Bereiche beschreiben, wo signifikante Unterschiede zwischen dem traditionellen und dem computerunterstützten Unterricht zu beobachten waren.

5.1.1. Methodische Grundformen

In diesem Bereich geht es vor allem um den Grad der Lehrer- und Schülerzentriertheit im Unterricht. Tendenziell erkennt man in Stunden mit Computereinsatz einen geringeren Anteil an Lehreraktivität, die Differenz ist aber nicht signifikant. Hochsignifikant sind der Rückgang des Vorrechnens durch Schüler und vor allem der Anstieg der selbständigen Schülertätigkeit (siehe Abb. 5.1).

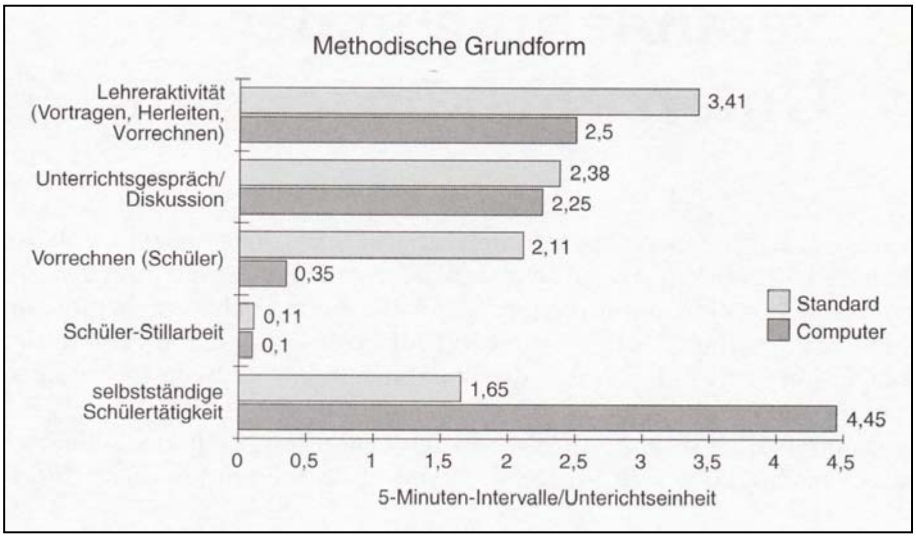


Abb. 5.1: Methodische Grundformen

5.1.2. Sozialformen

Noch deutlicher als bei den methodischen Grundformen ist hier der Wechsel zu individualisierten Unterrichtsformen erkennbar. Während in traditionellen Unterichtsstunden die Arbeit im Klassenverband klar dominiert, beobachtet man im computerunterstützten Unterricht eine gleichmäßige Aufteilung auf Unterricht im Klassenverband und Einzel- bzw. Partnerarbeit (siehe Abb. 5.2)

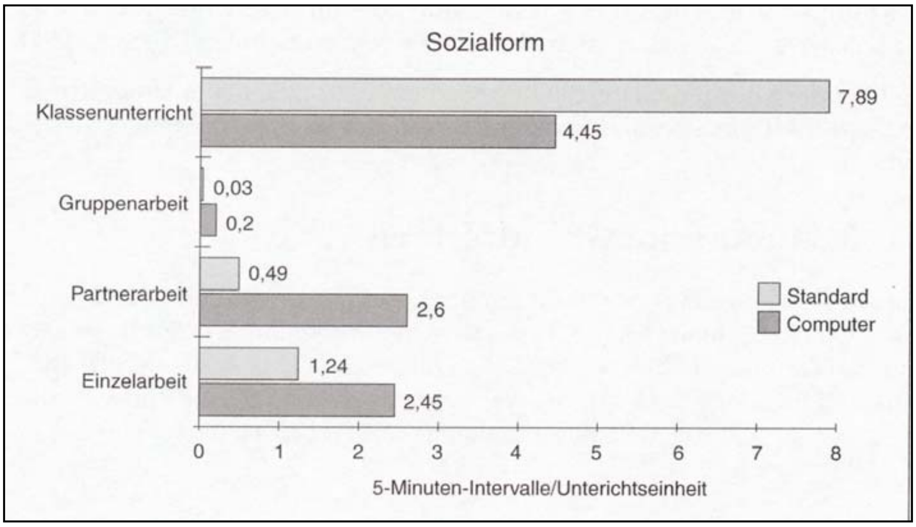


Abb. 5.2: Sozialformen

Daß die Partnerarbeit relativ häufig vorkommt, hängt auch mit der Hardwareausstattung zusammen. In den EDV-Räumen gibt es 14 bis 15 PCs, so daß die Partnerarbeit eine Notwendigkeit ist. Aus dieser Not wird aber insofern eine Tugend, insofern dieses Arbeiten zu zweit meist zu einer intensiven Diskussion über mathematische Probleme führt. Selten habe ich Mathematikstunden erlebt, in denen so viel über Mathematik diskutiert wurde wie bei solchen Stunden im EDV-Raum. Ein weiterer Vorteil besteht in der Möglichkeit der gegenseitigen Kontrolle bei der Eingabe von Daten in den Computer, was vor allem bei Schülern mit wenig Computererfahrung wichtig ist.

Gruppenarbeit spielte praktisch keine Rolle. Ich sehe das auch in Zusammenhang mit dem Untersuchungsergebnis, daß sich die Inhalte und Fragestellungen noch nicht sehr verändert haben, was aber im ersten Jahr des Projekts nicht zu erwarten war. Die beteiligten Lehrer waren vorerst auf traditionelle Inhalte angewiesen, da neue Unterrichtsmaterialien erst im Laufe der Projekarbeit entwickelt wurden. Wenn es in der Zukunft gelingt, den Schülern offenere Aufgaben zu stellen, den gesamten Problemlöseprozeß zum Gegenstand des Lernens zu machen, wird diese Sozialform an Bedeutung gewinnen.

Schülertätigkeit

Wie aus der Abb. 5.3 zu erkennen ist, dominiert in den traditionellen Stunden das reproduktive Lernen - hier als 'Aufnehmen' bezeichnet. In Stunden mit Computereinsatz überwiegt dagegen signifikant das 'Produzieren', also die selbständige produktive Schülertätigkeit.

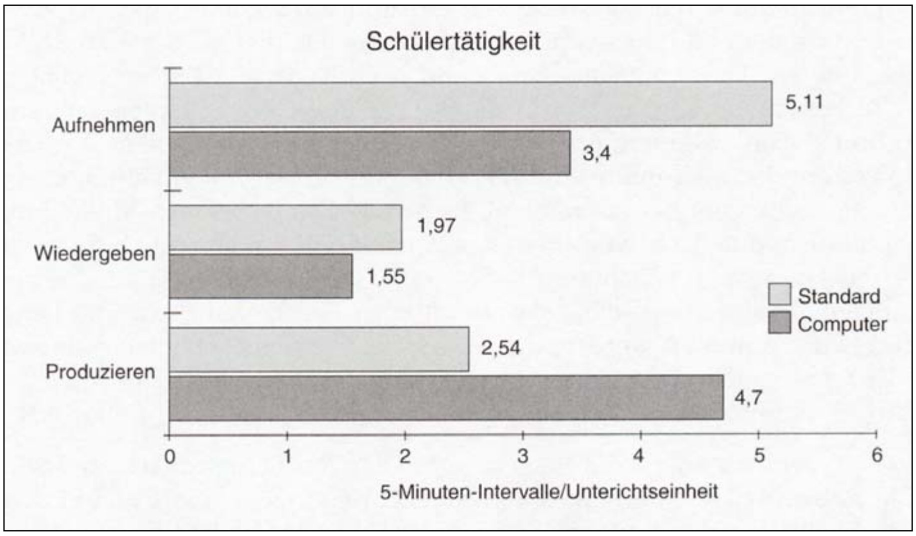


Abb. 5.3: Schüleraktivitäten

Wir halten es für eines der wichtigsten Ergebnisse, daß die Schüler durch das neue Lernmedium Computer zu mehr Selbsttätigkeit geführt werden. Beachten sollte man allerdings auch, daß bei solchen schülerzentrierten Computerstunden die individuelle Belastung der Schüler steigt. Aber auch für den Lehrer, der dabei mehr die Aufgabe des Initiators und Betreuers hat und weniger die zentrale Rolle des Wissensvermittlers, sind computerunterstützte Stunden wesentlich anstrengender. Man könnte seine Rolle mit der eines Schachspielers vergleichen, der gegen mehrere Gegner eine Simultanpartie spielt. Durch die individuellen Aktivitäten der einzelnen Schüler ist der Lehrer oft an jedem Arbeitsplatz mit neuen Problemen konfrontiert. Der positive Ertrag rechtfertigt aber die Mühe.

5.2. Zur Rolle des Lehrers

Die Veränderungen im Gefolge des Auftauchens von Taschenrechnern im Mathematikunterricht erscheinen geradezu harmlos im Vergleich zu CAS. Fast unbemerkt gestattete der Taschenrechner eine größere numerische Flexibilität, erlaubte mit realistischerem Zahlenmaterial ('krummen Zahlen') zu arbeiten und brachte die verschiedenen Tafelwerke zum Verschwinden. Begleitend wurden Überlegungen angestellt, wie denn einer durch den Taschenrechner drohenden Kopfrechenschwäche zu begegnen sei, und wie man Schüler am besten mit dem Handling vertraut machen kann.

Man braucht wohl kein großer Prophet zu sein, um zu sehen, daß CAS viel breitere Veränderungen mit sich bringen wird. Im Zusammenhang mit CAS stellt sich auch die Frage nach dem Bildungswert bisheriger Lernziele (vgl. Kap. 5.4), nach Veränderungen in den Unterrichtsmethoden und nach Kompetenzen im Umgang mit neuen Technologien. Und mitten in diesen Veränderungen werden Lehrerinnen und Lehrer stehen. "Als nächstes müssen Lehrerinnen und Lehrer ins Blickfeld geraten. Diese müssen ihren Unterricht ja mit den neuen Werkzeugen konzipieren und durchführen, sind hierzu aber weder von den Fähigkeiten noch von den Einstellungen her ausgebildet. Es bedarf also wirksamer Maßnahmen in der Lehrerausbildung und vor allem der Fortbildung. „Wirksam“ bezieht sich in diesem Zusammenhang auch auf die Form und „Philosophie“ von Lehrerfortbildung. Eigenständiges und selbstverantwortliches Lernen kann nur von Lehrerinnen und Lehrern initiiert werden, die solches selbst erfahren haben. Insbesondere bzgl. der weniger lehrerzentrierten Interaktions- und offenen Lernformen besteht im Mathematikunterricht ein großer Erfahrungsbedarf.“ [Schmidt, 1995, S.17]

Wir wollen hier aber zuerst auf Fragen, mit denen der Lehrer gleich zu Beginn eines CA-unterstützten Unterrichtes konfrontiert ist, eingehen: Wie kann man CAS möglichst selbstverständlich und konstruktiv in den Mathematikunterricht integrieren und auf die bei der Einführung solcher Systeme auftauchenden Probleme reagieren? Soll der Lehrer den Funktionsumfang - je nach mathematischem Wissensstand der Schüler - steuern? Hilft er seinen Schülern damit oder bevormundet er nur? Wie wirkt sich ein derartiger Unterricht auf die Vorbereitungsarbeit des Lehrers aus? Ist CAS ein Partner, der die Unterrichtsarbeit unterstützt oder sehen die Schüler darin eine zweite Autorität, an der die Kompetenz des Lehrers gemessen wird?

5.2.1. Einführung in das CAS

Im Rahmen des in Österreich durchgeführten CAS-Projekts gab es ursprünglich verschiedene Denkvarianten, wie die Einführungsphase verlaufen könnte, wie die Schüler am besten mit den Möglichkeiten und der Handhabung des Systems vertraut gemacht werden könnten. Auf Grund früherer Erfahrungen mit einem Unterrichtsversuch H.Heugls [Heugl, 1989] mit dem TI-48 tauchte etwa die Idee auf, sich mit der Handhabung in einem 'verbindlichen' Freifach parallel zum Mathematikunterricht zu beschäftigen. Eine andere Möglichkeit wäre, die Einführung im Rahmen des laut österreichischen AHS-Lehrplan in der 9.Schulstufe vorgesehenen Faches Informatik durchzuführen. Durchgesetzt hat sich eindeutig die im Mathematikunterricht integrierte Einführung von DERIVE, die sich mit ansteigender Komplexität an den jeweiligen mathematischen Inhalten des Unterrichts orientiert. Die erste Variante verpflichtet alle Schüler zu einem zusätzlichen Unterricht, und dieser Idealismus kann nicht immer eingefordert werden. Eine auf die neunte Schulstufe beschränkte Einführung hat den Nachteil, daß sie sich auf die mathematischen Inhalte dieser Schulstufe reduzieren muß und dieses hier praktizierte Lernen auf Vorrat nicht unbedingt motivationsfördernd ist. Der Hauptvorteil der integrierten Einführung und Verwendung des CAS liegt in der natürlichen und genetischen Entwicklung des im Zusammenhang damit notwendigen Wissens.

So steht die Einführung nicht isoliert und kann bei geeignetem Aufbau einen wertvollen Beitrag für den Mathematikunterricht selbst darstellen. Die Problematik der Verwendung eines CAS entschärft sich zunehmend, da immer mehr Schüler bereits Vorerfahrungen im Umgang mit dem Computer aufweisen. Ziel dieser Einführung wird es daher vor allem sein, die Schüler mit

- Fertigkeiten im Werkzeuggebrauch,
- Übersetzungtechniken
- heuristische Techniken im Zusammenhang mit CA auszustatten und
- zu einer kritischen Betrachtung der CA-Ergebnisse

zu erziehen.

Fertigkeiten im Werkzeuggebrauch

(1) Editieren, Modifizieren, Strukturieren und Kommentieren eines CAS-Arbeitsblatts

Beim Arbeiten auf Papier ist der „Blick aufs Ganze“ eine Selbstverständlichkeit, so selbstverständlich, daß uns dies erst dann erst bewußt wird, wenn er plötzlich nicht mehr vorhanden ist, z.B. wenn ein Schüler an der Tafel arbeitet und es nicht gewohnt ist, plötzlich nur mehr einen kleinen Ausschnitt aus seinen Berechnungen wahrnehmen zu können. Genauso ist es natürlich kein Zufall, daß viele Fehler bei schriftlichen Arbeiten gerade dann passieren, wenn umgeblättert wird. Entsprechende Probleme haben auch oft Anfänger im Umgang mit einem CAS. Teile der Berechnung wandern durch Scrollen aus dem Blickfeld, Fehlversuche und Nebenrechnungen unterbrechen den Aufgabenzusammenhang, der Überblick droht auf diese Weise verlorenzugehen.

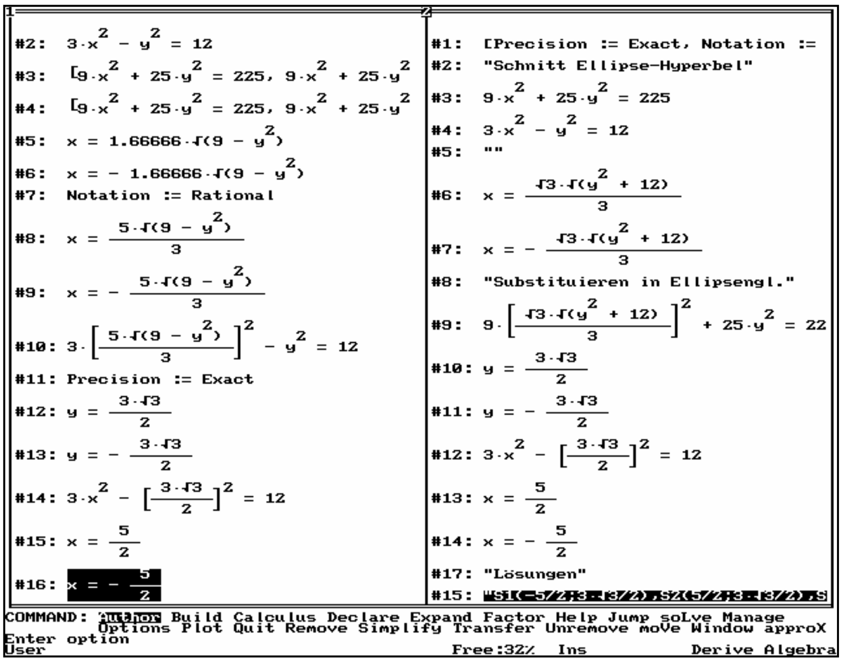


Abb. 5.4: Chaos und Ordnung

Es ist daher wichtig für eine effiziente Arbeit mit dem CAS, die Schüler dahingehend zu trainieren, ihre Lösungsansätze besser zu strukturieren, (Bildschirm-)platzsparend zu arbeiten und das Kommentieren nicht zu vernachlässigen.

Wie stark dieses strukturierte Vorgehen sein soll, hängt natürlich auch davon ab, ob das CAS in Form eines Taschenrechners eingesetzt wird und die Dokumentation einer Bearbeitung per Hand im Heft erfolgt oder ob das ausgedruckte CA-File zur Dokumentation eingesetzt wird.

(2) Aufbau von Kompetenzen bei der grafischen Darstellung von mathematischen Objekten

Speziell in der 2D-Grafik sollten die grundlegenden Befehle geübt werden und für flexibles Bearbeiten der Grafik als Rüstzeug zur Verfügung stehen. Nicht jede Datenmenge, jeder Graph einer Funktion liefert nach **Plot Plot** sofort im Grafikfenster eine geeignete Darstellung, häufig geschieht scheinbar nichts. Überlegungen zu einer geeigneten Skalierung sind Voraussetzung für spätere Interpretationen am Graphen (**Scale**). Das CAS bietet die didaktisch sehr gut einsetzbare Möglichkeit, auf den Funktionsgraphen zu springen (mit **F3**) und darauf herumzuwandern. Des weiteren kann ein gewünschtes Fenster mittels **Range** justiert werden. Als Beispiel soll die Darstellung der rationalen Funktion f in Abb.5.5 dienen.

#1: $F(x) := \dfrac{x^2 - 3\cdot x + 2}{x^2 + x - 6}$ User

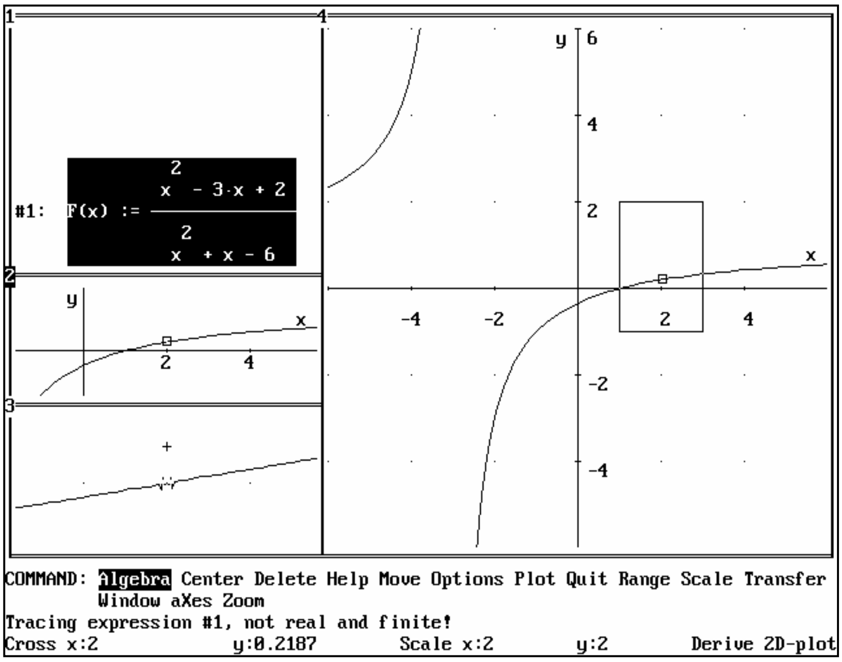


Abb. 5.5: Berarbeitung von Graphen

In den geöffneten Fenstern (**Window Split**) kann die Art des Fensters festgelegt werden (**Designate**). Neben den Koordinaten des Cursors (+) am linken unteren Rand des Bildschirmes erhält man im *Trace*-Mode (**Option State** *Trace*) auch weitere Rückmeldungen. Im Fenster 2 wird die Tatsache, daß an der Stelle 2 dieser Funktion eine hebbare Lücke aufscheint, durch die Rückmeldung 'not real and finit' beschrieben. Die Tasten **F9** und **F10** bieten die Möglichkeit des Vergrößerns und Verkleinerns (siehe Fenster 3). Bei diesem Beispiel sieht man, daß diese hebbare Lücke beim Zeichnen des Graphen größere Probleme auslöst, die auftretenden Zacken sollen nur andeuten, daß an dieser Stelle etwas Besonderes vorzufinden ist. Diese Darstellung soll einige Hinweise geben, welche Qualifikationen im Umgang mit der Grafik in der Einführung gelernt werden sollen, und umfaßt natürlich keineswegs die gesamte Palette an Grafikmöglichkeiten in DERIVE.

(3) Fähigkeiten im Vergleichen und Umformen mathematischer Ausdrücke

Auf eine Diskussion dieser Fähigkeiten soll hier verzichtet werden, da darauf in Kap. 3.5 (Schnittstelle Operieren-Interpretieren) bereits eingegangen wurde.

(4) Bearbeiten und Analysieren von Strukturen, Zugriff auf Teilstrukturen und deren Substitution

Kompetenz im Umgang mit einem CAS heißt auch, auf die dargestellten mathematischen Gegenstände zugreifen zu können, Teilstrukturen herauszugreifen, aus vorhandenen neue komplexere Strukturen aufzubauen. Eine besondere 'Spezialität' von DERIVE in diesem Zusammenhang ist etwa die Möglichkeit, Teilterme unterlegen zu können und nur gezielt auf diese eine mathematische Operation anzuwenden (vgl. Kap.4.1). Gerade solche Möglichkeiten erlauben einen sehr flexiblen und 'mathematiknahen' Umgang mit dem System. (Leider wurde diese Termmarkierung nicht in die TI-92-Version von DERIVE übernommen.)

(5) Voreinstellungen von Rechenoptionen und Statusvariablen

In diesem Buch gibt es eine Fülle von Beispielen, die aufzeigen, daß die festgelegte Voreinstellung für die gewählte Vorgangsweise, den Lösungsansatz und die Ausgabe von Werten von Bedeutung ist. Alle Einstellungen zusammen schaffen einen gewünschten Bearbeitungshintergrund. In DERIVE sind zu unterscheiden:

Einstellungen, die am Arbeitsblatt aufscheinen

Seit der Version 3.0 können bei einer Reihe von Optionen Veränderungen direkt im Arbeitsblatt vorgenommen und mit diesem abgespeichert werden, was zu einer größeren Transparenz beim Arbeiten mit dem CAS führt. Es ist zu beachten, daß im Gegensatz dazu die Grundeinstellungen (die in der Initialisierungsdatei DERIVE.INI zusammengefaßt sind) nicht angezeigt werden.

Einige wenige Beispiele, die im Unterricht von Bedeutung sind:

- Option Input :

Das Arbeiten mit Wortvariablen wird durch das Umstellen von *Character* auf *Word* ermöglicht, wird eine Differenzierung von Groß- und Kleinbuchstaben gewünscht, wird von *Insensitive* auf *Sensitive* umgestellt.

-Option Precision / Notation :

Jene Statusvariable, die die Rechengenauigkeit kontrolliert, wird mit *Exact* und *Approximate* festgelegt, die Ausgabe am Bildschirm - *Notation* - wird automatisch mitgeschalten. Sollte eine selbstgewählte Bildschirmausgabe erfolgen, kann zwischen *Decimal*, *Rational*, *Mixed* und *Scientific* gewählt werden. Darüber hinaus kann die Anzahl der Stellen (nicht der Dezimalstellen) bei *Digits* eingestellt werden.

- Option Output:

Mit dieser Option kann der Multiplikationspunkt ein- und ausgestellt werden.

- Manage Trigonometrie:

Bei manchen Bearbeitungen ist es sinnvoll, das Gradmaß zu wählen, andere Angaben und Beispiele erfordern das Bogenmaß.

Beispiel 5.1: Wertetabelle 1

Erzeuge eine Wertetabelle für besondere Winkel im Gradmaß und deren Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte.

```
#1:  Angle := Degree                                User
#2:  VECTOR([x, SIN(x), COS(x), TAN(x)], x,0,360,45)  User
```

#3: $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 45 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 90 & 1 & 0 & \pm\infty \\ 135 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 180 & 0 & -1 & 0 \\ 225 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 270 & -1 & 0 & \pm\infty \\ 315 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 360 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Simp(#2)

Beispiel 5.2: Wertetabelle 2

Erzeuge eine Wertetabelle für besondere Winkel im Bogenmaß und deren Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte.

```
#4:   Angle := Radian                                              User
```

$$\#5: \quad \mathrm{VECTOR}\left[[x,\ \mathrm{SIN}(x),\ \mathrm{COS}(x),\ \mathrm{TAN}(x)],\ x,\ 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{4}\right] \qquad \text{User}$$

$$\#6: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\pi}{2} & 1 & 0 & \pm\infty \\ \frac{3\cdot\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \pi & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Simp(\#5)}$$

Einstellungen, die nicht im Arbeitsblatt aufscheinen

Problematischer in der Unterrichtsarbeit sind Voreinstellungen, die zwar gesetzt aber in keiner Übersicht angezeigt werden. Oft wird man erst durch ein unerwartetes Verhalten des CAS auf sie aufmerksam.

Zwei Beispiele: Der Schüler möchte ein Trapez durch Angabe der entsprechenden Koordinaten zeichnen lassen, enttäuscht stellt er fest, daß nur Punkte zu sehen sind. **Option State** *Connected* ist nicht gesetzt. Beim Ausdruck des Funktionsgraphen kommt nur ein halber leerer Rahmen. **Transfer Print Options Printer** muß auf den Typ des Druckers umgestellt werden. Bei Verwendung von Farbdruckern ist darüber hinaus auf die Einstellung einer geeigneten Hintergrundfarbe zu achten!

b) Übersetzungstechniken

(1) Der mathematische Formalismus und die Syntax des Computeralgebra-Systems

Bei der Verwendung eines CAS ist es erforderlich, daß die mathematische Sprache in die Syntax des CAS übersetzt werden kann. Wenn auch die Erwartungen in die Richtung gehen, daß „die Kommunikation mit dem Rechner in einer Sprache erfolgen wird, die sich an der symbolischen und fachwissenschaftlichen Darstellung mathematischer Begriffe und Ausdrücke, am mathematischen Sprachparadigma“ orientiert [Weigand, 1993/2, S.332-343], so muß hier doch darauf hingewiesen werden, daß alle zur Zeit verfügbaren CAS jeweils individuelle "Softwareparadigmen" repräsentieren. Der Benutzer muß sich daher für einen effektiven Umgang mit diesen Systemen mit den Grundideen, die von den Entwicklern in die Systeme integriert wurden, vertraut machen. Auf eine Reihe von Inkompatibilitäten zwischen mathematischer Notation und mathematischer Standardsoftware und auf die damit im Unterricht verbundenen Probleme hat R.Köhler [MNU, 1995, S.195-198] hingewiesen, indem er sich mit der Rolle des Zuweisungsoperators und des Gleichheitszeichens in DERIVE beschäftigte.

Beispiel 5.3: Ohne exakte Syntaxkenntnis keine Lösung in Sicht

Um etwa nur ein lineares Gleichungssystem zu lösen, ist es erforderlich, die entsprechende Syntax zu kennen und exakt einzuhalten. Nur wenn der Schüler in der **Author**-Zeile

```
[x-2y=-30, 3x -y=40]
```

eingibt und **soLve** drückt bzw. wenn er

```
solve([x-2y=-30, 3x -y=40],[x,y])
```

eingibt, wird er zur Lösung [22,26] gelangen. Eine runde Klammer an der falschen Stelle und der Erfolg bleibt aus. Andererseits lassen sich die handschriftlichen Umformungsschritte mit DERIVE nachvollziehen, dies wird aber ein Schüler meist nur dann versuchen, wenn er es einmal (beim Lehrer und seinen Mitschülern) gesehen hat. Und auch hier ist ein gewisses Mindestmaß an 'technischem' Wissen notwendig.

Natürlich ist dieses Beispiel trivial. Andererseits muß Lehrer und Schülern aber klar sein, daß die Einhaltung der Syntax Voraussetzung ist für den nutzbringenden Einsatz des Systems. Im Unterricht hat es sich z.B. bewährt, Randbemerkungen und Beispiele zur Syntax des Systems im Schulübungsheft in einer anderen Farbe notieren, um die Syntax sozusagen parallel mit den Inhalten mitzulernen und ihre dienende Rolle erkennbar zu machen.

Beispiel 5.4: Verschiedene Übersetzungsmöglichkeiten für einen mathematischen Gegenstand

Sehr oft stehen alternative Syntaxformen zur Verfügung. Dabei ist es je nach Aufgabenstellung manchmal völlig unerheblich, welche Variante der Schüler wählt, bei geänderter Zielrichtung aber entscheidend. Ein konkretes Beispiel: Die Quadratfunktion läßt sich in DERIVE u.a. in folgenden Formen darstellen:

```
#1:  a x²
#2:  f:=a x²
#3:  F(x):=a x²
#4:  [x,a x²]
#5:  f=a x²
#6:  y=a x²
#7:  QUADRATFUNKTION_1(x):=a x²
#8:  QUADRATFUNKTION_2(a,x):=a x²
```

Will der Schüler einen Funktionsgraph erzeugen, so sind alle dargestellten Varianten im wesentlichen gleichwertig. Will er aber den Funktionswert an der Stelle 1.37 berechnen, so wird ihn nur Variante #3 oder #7 rasch zum Ziel bringen. "Übersetzen ins CAS" heißt also, sich nicht irgendeiner möglichen Syntax zu bedienen, sondern die für den Aufgabenzusammenhang geeignete herauszugreifen. Dazu muß der Schüler natürlich einen entsprechenden Überblick haben.

Der Lehrer kann ihm dabei helfen. Dadurch z.B., daß er diese Palette an Übersetzungsmöglichkeiten zum Anlaß nimmt, auf die verschiedenen möglichen Schreibweisen von Funktionen und die damit verbundenen Aspekte von Funktionen einzugehen.

`#1: a x²`

Der Term wird als Funktion interpretiert.

`#2: f:=a x²`

Der Term bekommt einen Namen.

`#3: F(x):=a x²`

Eine Funktion wird definiert und *x* wird zur freien, *a* zur Formvariablen.

`#4: [x,a x²]`

Der Zuordnungsaspekt $x \rightarrow a\,x^2$ wird ins CAS übertragen (Grafik schaltet auf Parameterdarstellung um, was eigentlich der mathematischen Schreibweise $\vec{X}(x) = \begin{pmatrix} x \\ a x^2 \end{pmatrix}$ 27entspricht.)

`#5: f=a x²`

Eine unglückliche (?) Darstellung der Funktionsgleichung.

`#6: y=a x²`

Funktionsgleichung.

`#7: QUADRATFUNKTION_1(x):=a x²`

Die Funktion bekommt einen Namen.

`#8: QUADRATFUNKTION_2(a,x):=a x²`

Funktion in 2 Variablen, die Formvariable hat sich endlich emanzipiert.

Generell ist diese Vielfalt an Übersetzungsmöglichkeiten sicher positiv zu sehen, gestattet sie doch, den Reichtum an Aspekten eines mathematischen Begriffs besser abzubilden. Allerdings muß darauf geachtet werden, daß sich der Unterricht nicht durch die syntaktischen Möglichkeiten und Begrenzungen einengen läßt. Konkret etwa: Welche Aspekte bietet der Funktionsbegriff, die vom System nicht erfaßt werden?

(2) Schrittweises Umformen mit dem Computeralgebra-System

Natürlich muß es erklärtes Ziel und Forderung der Didaktik der Mathematik an die Systementwickler sein, die Unterschiede zwischen der mathematischen Syntax und der Syntax des CAS immer geringer und bedeutungsloser werden zu lassen, dies auch durch das Implementieren möglichst toleranter Parser (jener Teil im Programm, der die Benutzereingaben analysiert).

Neben der Formulierung mathematischer Zusammenhänge in der CA-Umgebung, wie sie in (1) behandelt wurde, ist es auch notwendig, daß der Schüler befähigt wird, Umformungen mit dem System durchführen zu können. Von den Entwicklern der CAS wurden dazu verschiedenste Ansätze vorgestellt: Von syntaxorientierten Transformationen wie bei MATHEMATICA oder MAPLE - die eine entsprechende Kenntnis dieser Syntax beim Benutzer voraussetzen - über menüorientierte Systeme bis hin zur intensiven Nutzung von grafischen Oberflächen wie etwa bei MATHEPLUS, wo Variablen mit der Maus aufgegriffen und "auf die andere Seite" gezogen werden.

DERIVE ermöglicht sowohl eine menü- als auch eine syntaxorientiere Arbeitsweise. Dies ist vielleicht nicht immer die bequemste Variante, erfordert aber - was didaktisch positiv zu bewerten ist - ein bewußtes Anwenden der entsprechenden Umformungsschritte.

Beispiel 5.5: Lösen einer einfachen Differentialgleichung

Will man die folgende Differentialgleichung des beschränkten Wachstums nicht automatisiert (z.B. mit DSOLVE1) lösen lassen, so kann dies auch Schritt für Schritt durchgeführt werden.

#1: $Y(t) :=$ User

#3: $\frac{d}{dt} Y(t) = k\cdot(g - Y(t))$ User

#5: $\dfrac{\frac{d}{dt} Y(t) = k\cdot(g - Y(t))}{g - Y(t)}$ User

#6: $\dfrac{\frac{d}{dt} Y(t)}{g - Y(t)} = k$ Simp(#5)

#7: $\int \left[\dfrac{\frac{d}{dt} Y(t)}{g - Y(t)} = k\right] dt$ User

#8: $- LN(Y(t) - g) = k\cdot t$ Simp(#7)

#9: $LN(Y(t) - g) = - k\cdot t + c$ User

#10: $ê^{LN(Y(t) - g) = - k\cdot t + c}$ User

#11: $Y(t) - g = ê^{c - k\cdot t}$ Simp(#10)

#12: $Y(0) - g = ê^{c - k\cdot 0}$ Sub(#11)

#13: $Y(0) - g = ê^{c}$ Simp(#12)

#14: $Y(t) = g + (Y(0) - g)\cdot ê^{- k\cdot t}$ User

(3) Variablenordnung

Bei der Übersetzung in eine implizite Darstellung von Funktionen und Relationen und darauffolgender grafischer Darstellung muß die Variablenordnung beachtet werden.

Beispiel 5.6: Funktion und Umkehrfunktion (?)

Die voreingestellte Variablenordnung beginnt mit den Variablen *x, y,* und *z*, danach geht es weiter mit *a, b, c ...*

```
              2
#1:  y - x  = 0                                     User
#2:  s - 5·t = 2                                    User
```

Wird etwa mit der Standardeinstellung die Gleichung in #1 gezeichnet, erhalten wir die Darstellung einer Parabel in zweiter Hauptlage, also jene Parabel, die durch die explizite Gleichung $y = x^2$ festgelegt ist. Ändern wir jedoch mit **Manage Ordering** die Ordnung der Variablen, indem *x* und *y* in der Rangordnung vertauscht werden, wird die Parabel in erster Hauptlage gezeichnet (Abb. 5.6).

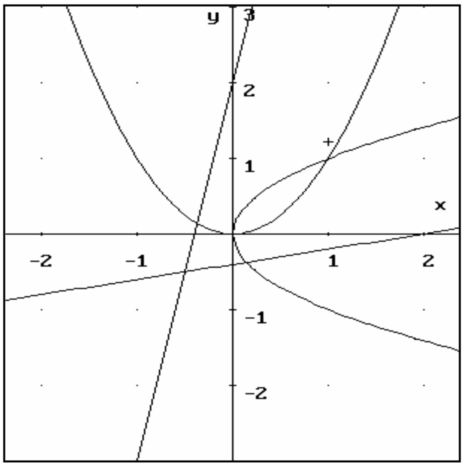


Abb. 5.6: Umkehrrelationen und -funktionen

Wird die lineare Gleichung in #2 mit der Grundeinstellung gezeichnet, erscheint der Graph der inhomogenen linearen Funktion mit der Steigung 5. Nach Änderung der Ordnung der Variablen, also *t* vor *s*, wird dieselbe Gleichung als Unkehrfunktion mit der Steigung 0.2 gezeichnet (Abb. 5.6). Die eindeutige Beschriftung der Achsen bereitet hier natürlich Probleme.

(4) Plausibilitätsabfragen

Werden etwa bei der Definition von Funktionen Zahlenbereichstests oder Tests für gewünschte Eingaben durchgeführt, können diese mit eingebauten Abfragen bewerkstelligt werden. Der Benutzer kann dadurch auch Rückmeldungen über seine Eingabe erhalten, die zur Interpretation der Auswertung dienen. Als Beispiel wird die Entwicklung einer Funktion für das Generieren einer Datenmatrix betrachtet. Zu beachten ist, daß die Verbindung von Punkten die Einstellung **Option State** *Connected* erfordert.

Als nicht geeignete Eingaben für die Auswertung werden Variablen und Polstellen von Funktionen angenommen. Zuerst wird die kleine Funktion VT_ für den 'Variablentest' definiert, wobei positive Zahlen zu 2, nicht positive zu 1 und Fehleingaben zu 0 ausgewertet werden.

```
#1:  VT_(ausdruck) := IF(ausdruck > 0, 2, 1, 0)       User
```

Danach wird eine Funktion ORDNER definiert, die bei Auswertung von nichtreellen Zahlen (das Produkt der 'Variablentests' ist 0) eine Fehlermeldung ausgibt, sonst wird die Datenmatrix für das Zeichnen der Zuordnungslinien erzeugt.

```
User
#2: ORDNER(x,fx) := IF⎡VT_(x)·VT_(fx)=0, "Fehler: Variable(n)
                      ⎣
                           ┌ x    0 ┐┐
  eingegeben oder kein Funktionswert vorhanden" , │ x   fx ││
                                                  └ 0   fx ┘┘
```

Am Beispiel der Funktion H(x) können nun verschiedene Fälle getestet und bei geeigneter Ausgabe gezeichnet werden (Abb. 5.7).

```
                    2
#3:  H(x) :=  ───────                                    User
                  x - 1
                          ┌ -1   0 ┐
#4:  ORDNER(-1, H(-1)) =  │ -1  -1 │             User=Simp(User)
                          └  0  -1 ┘
#5:  ORDNER(1.5, H(1.5))                                 User

      ┌ 1.5  0 ┐
#6:   │ 1.5  4 │                                   Approx(#5)
      └  0   4 ┘
```

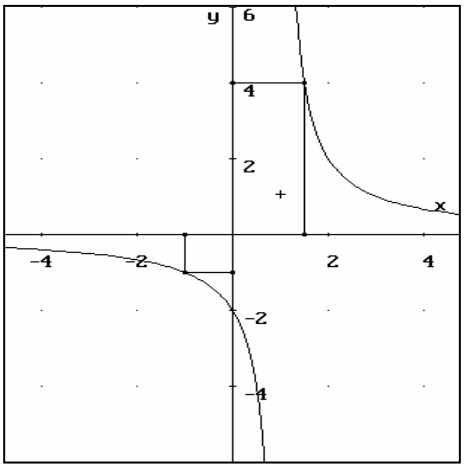


Abb. 5.7: Eingezeichnete Zurodnungslinien

Nun zwei Beispiele mit verbalen Rückmeldungen:

```
User=Simp(User)
#7:  ORDNER(1, H(1)) = "Fehler: Variable(n) eingegeben oder
  kein Funktionswert vorhanden"

User=Simp(User)
#9:  ORDNER(a, H(1)) = "Fehler: Variable(n) eingegeben oder
  kein Funktionswert vorhanden"
```

Offen bleibt die Frage, ob es sinnvoll ist, sehr viele Plausibilitätsabfragen zu tätigen, oder ob der Benützer für die Verwendung von Funktionen und die Interpretation der Ergebnisse selbst verantwortlich ist.

c) Heuristische Techniken

Verschiedene heuristische Techniken wurden bereits ausfürhlich in Kapitel 3 betrachtet. Es ist auch eine wichtige Aufgabe des Lehrers, den Lernenden mit solchen Techniken vertraut zu machen.

(1) Parametervariation

Bereits in Kapitel 2 wurde am Beispiel des freien und begrenzten Wachstums aufgezeigt, daß man im Unterricht sehr schnell, speziell im Zusammenhang mit der Grafik, Auswirkungen von Parametern untersuchen und geeignete Vermutungen aufstellen kann.

Nun soll die Auswirkung eines Parameters auf die Anzahl von Extremstellen bei einer Funktion dritten Grads analysiert werden.

Beispiel 5.7: Kurvenscharen

Zeige, daß die Funktion f: $x \to x^3 + b\,x^2 + 3\,x + 5$ für $b^2 > 9$ genau zwei lokale Extremstellen, für $b^2 < 9$ keine lokale Extremstelle hat! Wie viele lokale Extine lokale Extremstelle hat! Wieviele lokale Extremstellen gibt es für $b^2 = 9$?

[Bürger/Fischer, 1991, Beispiel 2.117]

Wir definieren die Funktion allgemein:

```
                3       2
#1:  F(x) := x   + b·x   + 3·x + 5                          User
```

Mit einem VECTOR-Befehl generieren wir neun Funktionen, indem wir *b* von -4 bis 4 mit Schrittweite 1 variieren.

```
#2:  VECTOR(F(x), b, -4, 4)                                 User
```

Wir erhalten eine Schar von Polynomfunktionen dritten Grads:

```
Approx(User)
      ┌3     2          3     2          3     2
#3:   └x -4·x +3·x+5,x -3·x +3·x+5,x -2·x +3·x+ 5,
 3  2        3        3  2       3     2        3     2
x -x +3.x+5,x +3.x+5, x +x +3·x+5,x +2·x +3·x+5,x +3·x +3·x+5,
                                                   3     2
                                                  x +4·x +3·x+5┘
```

Wir bilden die erste Ableitung für alle Funktionen aus #3:

```
      ┌d ┐1
#4:   │──│  VECTOR(F(x), b, -4, 4)                          User
      └dx┘
```

```
Approx(#4)
        2          2          2          2          2
#5:   └3·x -8·x+3,3·x -6·x+3,3·x -4·x+3,3·x -2·x+3,3·x +3,
             2          2          2          2
          3·x +2·x+3,3·x +4·x+3,3·x +6·x+3,3·x +8·x+3┘
```

Wenden wir den Differentialoperator für die Berechnung der zweiten Ableitungen auf die Schar von Funktionen an:

```
      ┌d ┐2
#6:   │──│  VECTOR(F(x), b, -4, 4)                          User
      └dx┘
```

```
Approx(#6)
   #7:  [6·x-8,6·x-6,6·x-4,6·x-2,6·x,6·x+2,6·x+4,6·x+6,6·x+8]
```

Beim Zeichnen der Kurvenschar kann beobachtet werden, daß für b = -4 zwei Extremstellen, für alle weiteren b keine Extremstelle auftritt (Abb. 5.8). Die ersten Ableitungsfunktionen bestätigen diesen Sachverhalt, für b = 3 und b = -3 gibt es noch jeweils eine Nullstelle, jedoch ändert sich das Monotonieverhalten dieser beiden Funktionen nicht (Abb. 5.9). Alle Funktionen haben eine Wendestelle, für b = 3 und b = -3 existiert also nur eine Wendestelle (vgl. Abb. 5.10).

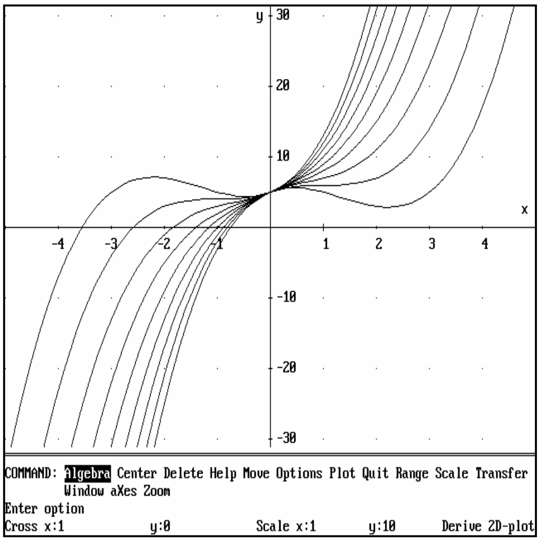


Abb. 5.8: Die Funktionen mit variiertem b

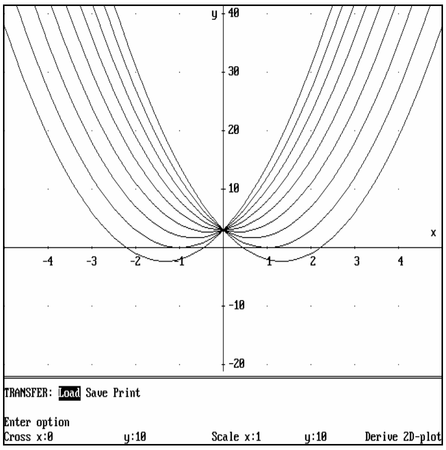


Abb. 5.9: Die ersten Ableitungen der Funktionen

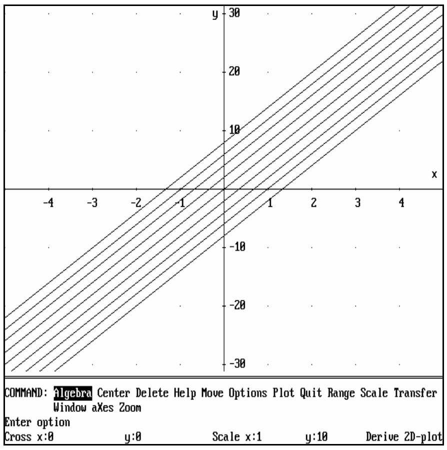


Abb. 5.10:Die zweiten Ableitungen

Die Auswirkung des Parameters b läßt sich auch algebraisch untersuchen. Wir bestimmen die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion f und erhalten 2 Lösungen in #9 und #10. Für unsere Aufgabenstellung ist nur der Ausdruck unter der Wurzel von Bedeutung, also existeren zwei Lösungen - zwei lokale Extremstellen - wenn b^2 > 9 ist. Setzen wir diese Lösungen in die zweite Ableitung ein, können wir gleich die Art der Extremstelle - lokale Maximumstelle oder Minimumstelle - nachweisen. Der Wert in #14 ist immer negativ und der Wert in #16 immer positiv.

#8: $\left[\frac{d}{dx}\right]^1 F(x) = 0$ User

$$\#9: \quad x = - \frac{\sqrt{(b^2 - 9)} + b}{3} \qquad \text{Solve(\#8)}$$

$$\#10: \quad x = \frac{\sqrt{(b^2 - 9)} - b}{3} \qquad \text{Solve(\#8)}$$

$$\#11: \quad \left[\frac{d}{dx}\right]^2 F(x) \qquad \text{User}$$

$$\#12: \quad 6 \cdot x + 2 \cdot b \qquad \text{Approx(\#11)}$$

$$\#13: \quad 6 \cdot \left[- \frac{\sqrt{(b^2 - 9)} + b}{3} \right] + 2 \cdot b \qquad \text{Sub(\#12)}$$

$$\#14: \quad - 2 \cdot \sqrt{(b^2 - 9)} \qquad \text{Simp(\#13)}$$

$$\#15: \quad 6 \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - 9)} - b}{3} + 2 \cdot b \qquad \text{Sub(\#12)}$$

$$\#16: \quad 2 \cdot \sqrt{(b^2 - 9)} \qquad \text{Simp(\#15)}$$

Für $b^2 < 9$ (in unserem Beispiel b = -2,-1,0,1,2) existiert keine Nullstelle der ersten Ableitung und damit auch keine mögliche lokale Extremstelle.

Ohne Betrachtung der dritten Ableitung wird das Argument der Wendestelle für jede einzelne Funktion in #18 bestimmt.

$$\#17: \quad \left[\frac{d}{dx}\right]^2 F(x) = 0 \qquad \text{User}$$

$$\#18: \quad x = - \frac{b}{3} \qquad \text{Solve(\#17)}$$

(2) Lokale, globale und 'familiäre' Betrachtungen von Termen und Funktionen

Zu den „neuen“ heuristischen Techniken, die durch CAS besonders unterstützt werden, gehört sicher die bewußte Betrachtung eines mathematischen Begriffs vom lokalen, globalen und vom 'familiären' Standpunkt aus. Was die Funktionenlupe für die grafische Ebene, ist der pointierte Standpunktwechsel für die symbolische Ebene.

Beispiel 5.8: Ableitung von Potenzfunktionen

Der lokale Aspekt

Wir bilden den Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 28an der Stelle x = 1. Es bereitet keine große Mühe sich mit dem Differenzenquotienten der betrachteten Stelle x = 1 zu nähern. Wesentlich dabei ist, daß sich der Schüler auf die Art der Näherung konzentrieren kann und sich nicht durch die dazu erforderlichen Rechnungen davon abhalten läßt. Im folgenden einige Anregungen.

Ein erster Versuch: Annäherung entlang der Folge <1/10^n>

$$\#1: \quad F(x) := \frac{1}{x^2} \qquad \text{Simp(User')}$$

$$\#2:\quad \text{VECTOR}\left[\frac{F\left[1+\dfrac{1}{10^{n}}\right]-F(1)}{\dfrac{1}{10^{n}}},\ n,\ 1,\ 10\right] \qquad \text{User}$$

Simplify liefert zehn Brüche, die eine interessante Gesetzmäßigkeit aufweisen.

Wir können dieses Annähern exakt oder nur numerisch betrachten. Wir können uns dieses Annähern auch grafisch darstellen lassen, wir können sie mit beliebigen anderen Folgen betrachen, die gegen 1 streben. Wie muß eine Folge gebaut sein, damit sie gegen 1 strebt? Wir können uns von links, von rechts oder alternierend annähern. Wir können uns aber auch gleich unbegrenzt annähern und das mit beliebigen Formalismen bewerkstelligen (Leider steht in DERIVE das Symbol Δ nicht zur Verfügung, daher wird im folgenden der entsprechende Kleinbuchstabe δ verwendet.):

$$\#3:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{F(1+\delta x)-F(1)}{\delta x}=-2 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#4:\quad \lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=-2 \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Der globale Aspekt

Nun soll der Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotionen global betrachtet werden. Nicht mehr eine konkrete Stelle ist interessant, sondern jede beliebige, für die die Funktion definiert ist. Auch hier steht uns wieder die ganze Pallette an Möglichkeiten zur Verfügung. Betrachten wir die unbegrenzte Näherung zuerst in Zeitlupe und dann im Zeitraffer.

$$\#5:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{F(x+\delta x)-F(x)}{\delta x} \qquad \text{User}$$

$$\#6:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+\delta x)^{2}}-\dfrac{1}{x^{2}}}{\delta x} \qquad \text{Simp(\#7')}$$

Wir können Schritt für Schritt betrachten und kommen schließlich zu:

$$\#11:\quad \lim_{\delta x\to 0} -\frac{2\cdot x+\delta x}{x^{4}+2\cdot x^{3}\cdot\delta x+x^{2}\cdot\delta x^{2}}=-\frac{2}{x^{3}} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Eine direkte Anwendung von **Simplify** hat hier die Wirkung eines Zeitraffers:

$$\#12:\quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{F(x+\delta x)-F(x)}{\delta x}=-\frac{2}{x^{3}} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

Der 'familiäre' Aspekt

Nun soll auch die 'Verwandtschaft' betrachtet werden. Wir versuchen durch die Differentiation einer Schar von Funktionen auf ein allgemeines Gesetz zu kommen.

#13: $F(x) := x^n$ User

#14: VECTOR(F(x), n, -3, 3) User

#15: $\left[\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, x^3\right]$ Simp(#14)

#16: $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, x^3\right]$ User

#17: $\left[-\frac{3}{x^4}, -\frac{2}{x^3}, -\frac{1}{x^2}, 0, 1, 2\cdot x, 3\cdot x^2\right]$ Simp(#16)

Zuletzt wieder im Zeitraffer:

#18: $\lim_{\delta x \to 0} \frac{F(x + \delta x) - F(x)}{\delta x} = n\cdot x^{n-1}$ User=Simp(User)

(3) Erstellen von Indikatormodulen

Auch die Erstellung von Indikatormodulen kann zu den heuristischen Techniken gerechnet werden. Wir verstehen darunter CA-Funktionen, die eine bestimmte mathematische Eigenschaft (Lage, Krümmung etc.) überprüfen. Bei vielen Gelegenheiten im Unterricht erweist sich die Erstellung einfacher Indikatormodule als hilfreich und nützlich. Zudem wird der Schüler dazu geführt, Fallunterscheidungen zu treffen und dadurch eine Situation umfassender zu analysieren. Dazu zwei einfache Beispiele:

Beispiel 5.9: Ein Lagetest

Die Lage eines Punkts bezüglich eines Kreises soll durch das Modul LAGE(x,y) bestimmt werden. Solche Lagetestmodule sind bei vielen Gelegenheiten denkbar, etwa: Lage eines Punkts zu einer Geraden, zu einer Ebene, zu einer geschlossenen Kurve, zu einer geschlossenen Fläche im Raum, Lage zwischen zwei Geraden, zwei Ebenen etc. Um solch ein Modul zu erstellen, ist es notwendig, mit den mathematischen Begriffen operational umzugehen und - wie bereits erwähnt - die Module anschließend entsprechenden Tests zu unterwerfen.

#1: KREIS(x, y) := $x^2 + y^2 = 4$ User

```
#2:   LAGE(x, y) :=                                          User

         IF(KREIS(x, y), "Auf Kreis!",
           IF(LHS(KREIS(x,y)) < RHS(KREIS(x, y)),

           "Innerhalb des Kreises!", "Außerhalb des Kreises"))

#3:   LAGE(2, 0)                                             User
#4:   "Auf Kreis!"                                       Simp(#3)

#5:   LAGE(0, 0)                                             User
#6:   "Innerhalb des Kreises!"                           Simp(#5)
```

```
#7:  LAGE(3, 0)                                           User
#8:  "Außerhalb des Kreises"                            Simp(#7)
```

Beispiel 5.10: Krümmungstest

Das folgende Testmodul wurde von einem Schüler erstellt und stellt eine Frage an eine vorgegebene Funktion:

```
                3
#9:  F(x) := x   - 2·x + 1                               User
             ┌d ┐2
#10: F2(x) := │──│  F(x)                                  User
             └dx┘
#11: F2(x) := 6·x                                   Simp(#10')

#12: KRUEMMUNG(stelle) :=                                 User
     IF(F2(stelle) < 0, "Ich bin hier rechtsgekrümmt",
            IF(F2(stelle) > 0,
                          "Ich bin hier linksgekrümmt!",
               "Ich bin hier nicht gekrümmt!"))

#13: KRUEMMUNG(-1)                                        User
#14: "Ich bin hier rechtsgekrümmt!"                   Simp(#13)

#15: KRUEMMUNG(0)                                         User
#16: "Ich bin hier nicht gekrümmt!"                   Simp(#15)

#17: KRUEMMUNG(1)                                         User
#18: "Ich bin hier linksgekrümmt!"                    Simp(#17)
```

Zwei weitere heuristische Techniken, auf die in diesem Buch bereits eingegangen wurde, sind:

(4) Window-Shuttle-Technik

Die im Zusammenhang mit den didaktischen Prinzipien vorgestellte Window-Shuttle-Technik (vgl. Kap. 4.4) stellt sicher eine wesentliche, neue heuristische Technik im CAS-unterstützten Unterricht dar.

(5) Projektionstechnik

Eng verwandt mit der Window-Shuttle-Technik ist die in Kap. 2.5 betrachtete Möglichkeit, ein Objekt in verschiedene Darstellungsebenen zu projizieren, etwa in die symbolische, numerische, grafische oder logische Ebene.

d) Ergebniskritik

So problematisch die strikte Ausklammerung von CAS im Unterricht unseres Erachtens ist, da man den Schülern damit viele Möglichkeiten vorenthält, genauso problematisch ist die blinde und unreflektierte Übernahme von CA-Ergebnissen. Hier ist besonders der Lehrer aufgerufen, die Schüler zu einer kritischen Haltung hinzuführen. „Natürlich sind zahlreiche aktuelle oder potenielle Probleme beim Computereinsatz zu beachten; das wird leider oft nicht genügend betont. So haben Rechner prinzipielle *Grenzen,* z.B. bei der Auswahl und Beurteilung von Modellen für Realsituationen. Weiter gibt es vielerlei neue *Gefahren*, z.B. eine unkritische Computergläubigkeit.“ [Blum, 1995, S.13]. Vielleicht sollte im Zusammenhang mit CAS das Motto vernünfigerweise etwa lauten: „Trau' nie einem Ergebnis, das du im Prinzip nicht nachvollziehen kannst!“ Dazu wieder einige Punkte bzw. Beispiele:

(1) Vorsicht - bestimmtes Integral!

DERIVE bestimmt die Integrale in der Art, wie wir dies auch handschriftlich machen. Zuerst werden die Stammfunktionen der Integranden ermittelt und dann die Grenzwerte der Stammfunktionen, wenn sich die Integrationsvariable von oben der unteren bzw. von unten der oberen Grenze nähert. Schließlich wird vom Grenzwert der oberen Integrationsgrenze jener von der unteren subtrahiert. Die *Verantwortung* für die Korrektheit des Ergebnisses bleibt also dem *Benutzer* überlassen. (Und dies gilt natürlich nicht nur im betrachteten Einzelfall!) Blindes Vertrauen ins System kann zu herben Enttäuschungen führen, wie folgendes Beispiel zeigen soll:

Beispiel 5.11: Ein bestimmtes Integral

#1: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$ User=Simp(User)

Im Gegensatz zu #1 gibt es verständlicherweise bei uneigentlichen Integralen keine Probleme:

#2: $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \infty$ User=Simp(User)

#3: $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\infty$ User=Simp(User)

Ein weiteres Beispiel zum Stichwort 'Verantwortung' des Benutzers:

(2) Vorsicht - Rundungskatastrophe

Beispiel 5.12: Die Exhaustion des Kreises

Die Kreiszahl π soll durch Ein- und Umschreiben von regelmäßigen n-Ecken angenähert werden.

Bekanntlich besteht die *Exhaustionsmethode* des Archimedes darin, den Kreisumfang mittels ein- und umschriebener regelmäßiger n-Ecke iterativ zu approximieren, wobei der Iterationsschritt in der Eckenverdoppelung besteht. Nutzt man dabei die Proportionalität von Umfang des *n*-Ecks und Kreisdurchmessers aus, so kann man sich auf die Betrachtung des Einheitskreises beschränken.

Eingeschriebenes n-Eck (Abb. 5.11)

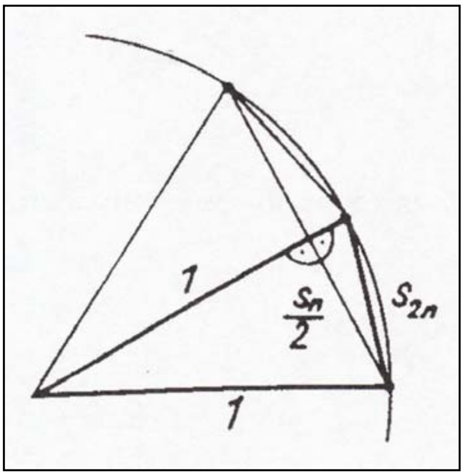


Abb. 5.11:Einschreibung eines n-Ecks

Es sei s_n die Seitenlänge und $u_n = n{\cdot}s_n$ der Umfang des eingeschriebenen n-Ecks. Die Näherungen für π ergeben sich dann als Verhältnis von Umfang zu Durchmesser, in unserem Fall also $\pi \approx \frac{n \cdot s_n}{2}$ [29]

Für den Zusammenhang zwischen s_{n+1} und s_n ergibt sich nun gemäß Abb. 5.11:

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}s_n)^2}\right)^2$$

$$\text{\#1:}\quad s2n^2 = \left[\frac{1}{2}\cdot sn\right]^2 + \left[1 - \sqrt{\left[1 - \left[\frac{1}{2}\cdot sn\right]^2\right]}\right]^2 \qquad \text{User}$$

$$\text{\#2:}\quad s2n^2 = 2 - \sqrt{(4 - sn^2)} \qquad \text{Simp(\#1')}$$

s_{n+1} in Abbhängigkeit von s_n können wir damit folgendermaßen definieren:

$$\text{\#3:}\quad S2N(sn) := \sqrt{(2 - \sqrt{(4 - sn^2)})}$$

Eine analoge Beziehung können wir für das umschriebene n-Eck herleiten, so daß für die Approximation von π sich schließlich folgende Ungleichung ergibt:

$$\frac{n \cdot s_n}{2} \le \pi \le \frac{n \cdot t_n}{2}$$

Wir können diesen iterativen Prozeß der *Exhaustion* des Kreises durch Einsatz des **ITERATES**-Befehls von DERIVE beschleunigen

$$\text{\#15:}\quad \text{ITERATES}(S2N(sn), sn, \sqrt{3}, 9) \qquad \text{User}$$

$$\text{\#16:}\quad \left[\sqrt{3},\ 1,\ \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right]},\right. \qquad \text{Simp(\#15)}$$

$$\sqrt{\left[2 - \sqrt{\left[\frac{}{2}\left[+\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\right]\right]}\right]},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}+2}+2}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+2}+2}+2}+2}+2}+2}}$$

Wenn wir Näherungswerte ausrechnen, so beobachten wir etwas Eigenartiges - die letzte Seitenlänge (zum $3*2^9$-Eck = 1536-Eck gehörig) wird zu 0 ausgewertet.

```
#17: [1.73205, 1, 0.517638, 0.261052, 0.130806, 0.0654373,
        0.0327225, 0.0163626, 0.00818490, 0]           Approx(#16)
```

Irgendetwas stimmt hier nicht, selbst wenn wir die Genauigkeit erhöhen, tritt dieser Effekt zwar später, aber trotzdem auf! Was ist schiefgelaufen? Wenn wir den Auswertungsvorgang sozusagen in Zeitlupe betrachten, indem wir den Term 'von innen her' schrittweise mit **approX** vereinfachen, können wir von #22 zu #24 (Abb. 2.3) das beobachten, was man unter Numerikern eine Subtraktionskatastrophe nennt:

```
#15: [√3, 1, √6/2 - √2/2, √[- √6/2 - √2/2 + 2], √[2 - √[√6/2 + √2/2 + 2]], √[2 -

#16: [1.73205, 1, 0.517638, 0.261052, 0.130806, 0.0654373, 0.0327225, 0.0163626,

#17: √[2 - √[√[√[√[√[√[√6/2 + √2/2 + 2] + 2] + 2] + 2] + 2] + 2]]

#18: √(2 - √(√(√(√(√(√3.93185 + 2) + 2) + 2) + 2) + 2))

#19: √(2 - √(√(√(√(√3.98288 + 2) + 2) + 2) + 2))

#20: √(2 - √(√(√(√3.99571 + 2) + 2) + 2))

#21: √(2 - √(√(√3.99892 + 2) + 2))

#22: √(2 - √(√3.99973 + 2))

#23: √(2 - √3.99993)

#24: √(2 - 2)

#25: 0

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove moVe Window approX
Enter option
User                                      Free:60%  Ins          Derive Algebra
```

Abb. 5.12: Subtraktionskatastrophe

Die Auslöschung von in der Dezimaldarstellung sich am Anfang befindlichen Ziffern bei Differenzen annähernd gleichgroßer Werte führt zu einer explosionsartigen Vergrößerung der Auswirkung von Rundungsfehlern, so daß die Ergebnisse völlig unsinnig werden. Wie kann dieses numerische Problem behoben werden? Ganz einfach dadurch, daß wir in der Iterationsformel mit $\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}$ [30] erweitern. Die Iterationsformel wird dadurch zwar etwas komplizierter, dafür ist der Algorithmus stabiler gegenüber Rundungsfehlern, Differenzen fast gleichgroßer Werte werden auf diese Weise vermieden.

```
#26: "Der erweiterte Term verhält sich wesentlich stabiler"
                                 2                 2
                   √((2 - √(4 - sn ))·(2 + √(4 - sn )))
#27: S2N(sn) := ──────────────────────────────────────
                                        2
                           √(2 + √(4 - sn ))
```

Ein Problem, auf das in diesem Zusammenhang hingewiesen werden muß, ist die Tatsache, daß bei der Erweiterung die Iterationsformel so durchgeführt werden soll, daß im Zähler sofort das Produkt unter der Wurzel zu stehen kommt. Obwohl das System nomalerweise Terme der Gestalt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 31 korrekt vereinfacht, ist es bei diesem konkreten Term offenbar bisher nicht dazu in der Lage.

```
                          sn
     S2N(sn) := ───────────────────
#28:                        2
                 √(√(4 - sn ) + 2)

#29: ITERATES(S2N(sn), sn, √3, 9)

Approx(#39)

  #30: [1.73205, 1, 0.517638, 0.261052, 0.130806, 0.0654381,
        0.0327234, 0.0163622, 0.00818114, 0.00409057]

                                 9
     APPROX(0.00409057·3·2 )
  #31: ─────────────────────────── = 3.14155          User=Simp(User)
                 2
```

Nun haben wir unser Ziel erreicht, wir erhalten auch beim 9. Iterationsschritt einen brauchbaren Näherungswert für π.

(3) Stetige Fortsetzung - ein Seiteneffekt von **Simplify**

Wird verwenden wieder die Funktion *f*, die bereits unter "Fertigkeiten im Werkzeuggebrauch" grafisch dargestellt wurde. Wird die Funktion *f* definiert und an der Stelle 2 ausgewertet, dann erhalten wir als Rückmeldung ein '?', es existiert also kein Funktionswert an dieser Stelle.

```
                    2
                   x  - 3·x + 2
     #1:  F(x) := ──────────────                       User
                    2
                   x  + x - 6
     #2:  F(2) = ?                                User=Simp(User)
```

Wird der Term an der Stelle *x* ausgewertet ($F(x) =$) oder mit **Simplify** vereinfacht, erscheint ein neuer Term und die Auswertung an der Stelle 2 liefert einen Wert.

```
                 x - 1
     #3:  F(x) = ─────                                Simp(#1')
                 x + 3

                 1
     #4:  F(2) = ─                                User=Simp(User)
                 5
```

Das CAS verändert also die auswertbaren Stellen einer Funktion oder anders gesagt, es wird eine stetige Fortsetzung der Funktion *F* durch 'Kitten' der hebbaren Lücke automatisch durchgeführt. Dies sieht man natürlich sofort durch Faktorisieren des Nenners.

```
                  (x - 1)·(x - 2)
          F(x) := ───────────────
     #5:                2                             Fctr(#1')
                       x  + x - 6
```

$$\#6: \quad F(x) := \frac{(x - 1)\cdot(x - 2)}{(x - 2)\cdot(x + 3)} \qquad \text{Fctr(\#5')}$$

Stehen etwa Stetigkeitsuntersuchungen im Vordergrund, kann dieser Verlust von Nullstellen des Nenners von Bedeutung sein.

(4) Wurzelgleichungen - No Solutions found?

Häufig führen gerade jene Inhalte, die im konkreten numerischen Fall kaum Schwierigkeiten bereiten, im allgemeinen Fall zu Gleichungen, die nur schwer algorithmisch bewältigbar sind.

Beispiel 5.13: Eine Extremwertaufgabe

Vom Ort A soll längs der geradlinigen Straße AB ($\overline{AB}$32= 8 km) bis zum Punkt D und dann durch das angrenzende Gelände zu einem Kraftwerk C (CB _ AB, $\overline{CB} = 2$ km 33) unter der Erde eine Leitung verlegt werden. Die Kosten der Verlegung je Kilometer längs der Straße betragen α Schilling; im Gelände sind die Verlegungskosten je Kilometer das k-fache dieses Betrags ($k > 0$).

In welcher Entfernung von B muß der Abzweigungspunkt D der geradlinigen Abzweigung DC liegen, damit die gesamten Kosten der Verlegung möglichst gering werden? [Reichel u.a., S.142]

Die Mathematisierung dieser Aufgabe führt auf einen Wurzelausdruck:

$$\#1: \quad \mathrm{KOSTEN}(x) := (8 - x)\cdot\alpha + \sqrt{(4 + x^2)}\cdot k\cdot\alpha \qquad \text{User}$$

$$\#2: \quad \frac{d}{dx}\,\mathrm{KOSTEN}(x) = \frac{\alpha\cdot(k\cdot x - \sqrt{(x^2 + 4)})}{\sqrt{(x^2 + 4)}} \qquad \text{User=Simp(User)}$$

$$\#3: \quad \frac{\alpha\cdot(k\cdot x - \sqrt{(x^2 + 4)})}{\sqrt{(x^2 + 4)}} = 0 \qquad \text{User}$$

Der Lösungsversuch von #3 nach *x* endet in der Meldung "No solutions found!". Soweit, so bitter. Nun beobachet man aber leider immer wieder, daß Schüler diese Meldung interpretieren als "Es gibt keine Lösungen". Unseres Erachtens ist es eine wesentliche Aufgabe des Lehrers, bei der Einführung eines solchen Systems deutlich auf diese Fehlinterpretationen einzugehen und klarzustellen, daß die Meldung "No solutions found" noch lange nicht heißt, daß es keine Lösungen geben kann. Hier hilft z.B. ein kleiner Schritt weiter:

$$\#4: \quad k\cdot x = \sqrt{(x^2 + 4)} \qquad \text{User}$$

$$\#5: \quad (k\cdot x = \sqrt{(x^2 + 4)})^2 \qquad \text{User}$$

$$\#6: \quad k^2\cdot x^2 = x^2 + 4 \qquad \text{Simp(\#5)}$$

$$\#7: \quad x = \frac{2}{\sqrt{(k^2 - 1)}} \qquad \text{Solve(\#6)}$$

$$\#8: \quad x = -\frac{2}{\sqrt{(k^2 - 1)}} \qquad \text{Solve(\#6)}$$

Auf die Interpretation und Auswertung der Lösung (#7 bzw #8) soll hier nicht mehr weiter eingegangen werden.

5.2.2. Lehrerschnittstelle

Das CAS DERIVE bietet die Möglichkeit, die zugelassenen Befehle und Operationen auf die Lernentwicklung der Schüler abzustimmen. Das Hauptmenü kann eingeschränkt werden. In der White Box-Phase 'Elementare Algebra' werden die Befehle **Simplify**, **Expand**, **Factor**, **Manage Subtitute** und **approX** benötigt. Der Lehrer entscheidet, welche Einstellungen im Hauptmenü aufscheinen. Der Schüler kann dadurch nur mit diesen Einstellungen arbeiten. Die neue Menügestaltung läßt sich leicht mit einem Texteditor erstellen. Die DERIVE-Variante wird mit DERIVE.MEN abgespeichert und automatisch beim Starten von DERIVE geladen. Dabei könnten die Namen der Befehle und Optionen auch in deutsche Sprache übersetzt werden, jedoch erscheinen die englischen Bezeichnungen unproblematisch und im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts und der Vorbereitung auf das Studium wünschenwert. Es erweist sich als sinnvoll, nicht zu viele Varianten in der Schule anzubieten. Eine in der Praxis gestestete Anzahl von selbsterstellten Menüs stammt vom Gymnasium Stockerau. An dieser Schule werden vier Varianten eingesetzt. Das Menü I: *Umformen* für Bearbeitung der elementaren Algebra und Umformungen bei Gleichungen wird ohne den **soLve**-Befehl und Grafikoptionen erstellt. Die Menüführung II: *Algebra* mit Zulassung von **soLve**, das Menü III: *Grafik* arbeitet ohne die Optionen **Calculus** und Einstellungen, die erst im späteren Lernprozeß Verwendung finden. Als Menü IV wird das gesamte DERIVE Menü zur Bearbeitung angeboten.

Das Beispiel *Umformen* soll diese Möglichkeit der Erstellung von eigenen Menüs aufzeigen. Es sollen, speziell für Schüler bis zur achten Schulstufe, möglichst wenige Optionen aufscheinen:

Das eigene Menü wird erstellt, indem man die vorhandenen Haupt- und Untermenüoptionen angibt und den Namen der neuen Menüzeile anschreibt. Jede Option wird mit Hochkommas versehen und in Klammern gesetzt. Das ganze Menü wird mit einer runden Klammer begonnen und beendet.

```
(("Author" "Author")
 ("Expand" "Expand")
 ("Factor" "Factor")
 ("Manage" ("Substitute" "Manage" "Substitute")
        ("Renumber" "Manage" "Renumber" ))
 ("Options" ("Input" "Options" "Input")
         ("Output" "Options" "Output")
         ("Precision" "Options" "Precision"))
 ("Quit" "Quit")
 ("Remove" "Remove")
 ("Simplify" "Simplify")
 ("Transfer" ("Load" "Transfer" "Load")
          ("Save" "Transfer" "Save")
          ("Merge" "Transfer" "Merge")
          ("Clear" "Transfer" "Clear")
          ("Print" "Transfer" "Print")
          ("menUe"))
 ("approX" "approX"))
```

Die Option **menUe** erscheint im Untermenü von **Transfer** auf. Mit dieser Option kann man einmalig in die Gesamtversion einsteigen und eine Einstellung oder Tätigkeit ausführen, die von diesem Menü aus nicht möglich ist.

Eng verbunden mit der Frage der Einführung von CAS im Mathematikunterricht ist für den Lehrer die Bereitstellung entsprechender Unterlagen für den Unterricht. Dies ist um so wichtiger, da es zur Zeit nur wenige und meist schwer zugängliche Unterrichtsmaterialien gibt. Erste Ansätze zur Entwicklung sind aber an verschiedenen Stellen bereits zu beobachten. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sei etwa erwähnt, daß es hier in Österreich z.B. eine Gruppe von (vorwiegend) aus dem Bereich technischen Schulen kommende Lehrer um Peter Schüller gibt, die sich in der AMMU (Arbeitsgruppe moderner Mathematikunterricht) zusammengefunden haben und sich zum Ziel gesetzt haben, entsprechende Materialien zu erarbeiten. Hier sind aber natürlich auch die Materialien zu erwähnen, die von BK-Teachware in Hagenberg vertrieben werden. Eine Gruppe um G.Schmidt hat begonnen, eine Reihe von Unterrichtsmaterialien für einen Unterricht mit CA-Unterstützung, herauszugeben. Auch die Unterrichtsversuch und Materialien von R.Baumann in Celle sollen hier nicht unerwähnt bleiben. Aus unserem Projekt werden eine Reihe von Materialien als CA-Reports veröffentlich werden. Eine erste Sammlung wurde 1995 von [Aspetsberger/Fuchs/ Klinger, 1995] veröffentlicht.

5.2.3. Unterrichtsvorbereitung und Arbeitsunterlagen

Die Nutzung von CAS bietet dem Lehrer einerseits erweiterte Möglichkeiten in der Unterrichsvorbereitung, erfordert aber andererseits eine andere Unterrichtsgestaltung, die wieder entsprechende Vorbereitung bedingt. Aber auch wenn CAS nicht durchgängig im Unterricht eingesetzt werden, leisten diese Systeme unschätzbare Dienste, wenn es darum geht, Problemstellungen zu visualisieren, Übungsbeispiele und Prüfungsaufgaben rasch durchzurechnen, geänderte Aufgabenstellungen zu testen und Materialien für Interpretationen und Argumentationen im Mathematikunterricht zur Verfügung zu stellen. Im Folgenden wollen wir auf drei Punkte eingehen:

- Technische Tips
- Arbeitsblätter
- Planungen im Zusammenhang mit dem Modulprinzip

CAS sind Informatiksysteme. Für ihre Verwendung ist ein gewisses Mindestmaß an technischem Wissen notwendig. Sehr oft führt ein Mangel an solchem Hintergrundwissen zu unnötigen Frustrationen oder ungerechtfertigter Ablehnung - unserer Beobachtung nach häufiger auf Seite des Lehrers als auf der des Schülers.

a) Technische Tips

(1) Initialisierungsdatei

Wird mit dem CAS DERIVE gearbeitet, sollte man die Arbeitsumgebung für alle Schüler gleich gestalten. Die Grundeinstellungen in DERIVE sind in der Datei DERIVE.INI festgelegt. Für den Umgang mit dem Programm ist ein Wissen über die dort getroffenen Einstellungen nötig.

Es erweist sich als sinnvoll, im Computerraum der Schule wie in der Übungsphase zu Hause, daß alle Schüler dieselbe Grundeinstellung verwenden. Dazu dient eine einheitliche Gestaltung der Initialisierungsdatei. Dadurch tritt eine Reihe von Problemen, die das Arbeitsklima bei der eigenen Arbeit wie im Unterricht beeinträchtigen können, nicht auf. Als Beispiel für diese Grundeinstellung könnten folgende Werte gelten, wichtige Einstellungen sind fett gedruckt. Alle diese Einstellungen werden in der vertrauten Umgebung vorgenommen, mit **Transfer Save State** in der Datei DERIVE.INI gespeichert und können im Hilfemodus eingesehen werden:

```
Einstellungen des Algebrafensters
  Rechengenauigkeitsmodus: Exact
  Stellenzahl: 6
  Notationstyp: Rational
  Stellenzahl: 6
  Zahlenbasis für Eingabe: 10
  Zahlenbasis für Ausgabe: 10

Einstellungen des Algebrafensters für das Vereinfachen
  Wurzel: Principal
  Logarithmische Umformungen: Auto
  Exponentialumformungen: Auto
  Trigonometrische Umformungen: Auto
  Trigonometrische Potenzen: Auto
  Winkelmodus: Radian

Einstellungen des Algebrafensters für die Eingabe
  Eingabemodus: Character
  Groß/Kleinschreibung: Insensitive
  Pfeiltastenmodus: LineEdit

2D-Grafikfenster-Einstellungen
  Automatischer Maßstab: No
```

```
  Folgemodus: Yes
  Zeichengenauigkeit: 7
  Koordinatensystem: Rectangular
  Grafikpunkte: Connected
  Punktgröße: Large
  Zeilen pro Gitterpunktabstand: 4
  Spalten pro Gitterpunktabstand: 4
  Automatischer Farbwechsel: No
  Farbe für Achsen: 0
  Farbe für das Kreuz: 0

Einstellungen für 3D-Grafikfenster
  Farbe für Oberseite: 15
  Farbe für Unterseite: 7

Druckseitenlayout
  Seitenlänge: 100
  Seitenbreite: 74
  Oberer Rand: 0
  Unterer Rand: 0
  Linker Rand: 0
  Rechter Rand: 0

Druckereinstellungen
  Zeichensatz: Extended
  Druckertyp: Laserjet
  Druckerorientierung: Portrait
  Zeichengröße: Small
  Papiergröße: Standard
  Druckhintergrundsfarbe: White
```

Wenn der richtige Drucker mit **Transfer Print Options** eingestellt wurde (in diesem Beispiel ein Laserdruker), müßte diese Grundeinstellung für ein durchgängiges Arbeiten reichen. Gewünschte Veränderungen von Statusvariablen scheinen meist am Bildschirm auf, wodurch der Benützer sieht, daß er die Auswirkung dieser Einstellung berücksichtigen muß. Für fortgeschrittene Benutzer empfielt sich die Einstellung des Eingabemodus auf *Word*.

(2) Abspeichern und Drucken von Arbeitsfiles

Beim Umgang mit DERIVE gibt es mehrere Möglichkeiten, Arbeitsfiles zu speichern.

- MTH-File - **Transfer Save DERIVE**:

  Diese Files dienen zur Sicherung des aktuellen Arbeitsblatts und können später mit **Transfer Load DERIVE** wieder eingelesen werden. Sehr empfehlenswert ist in diesem Zusammenhang das Hinzuschalten der Annotations (m**it Transfer Print Expressions Options** *Annotate*), die ein Nachvollziehen durchgeführter Berechnungsschritte wesentlich erleichtern. Mit der Taste **F1** kann aus allen Dateien des Verzeichnisses und/oder der Diskette das gewünschte ausgewählt werden. Diese Dateien können auch direkt ausgedruckt werden (**Transfer Print**). Sollen die Klammern und Sonderzeichen (Integral, Summe ...) erhalten bleiben, muß *Extended* mit **Transfer Print Expressions Options** eingestellt werden.

- PRT-File - **Transfer Print Expressions File**

  Mit dieser Folge von Optionen können die DERIVE-Zeilen für das Einlesen in ein Textverarbeitungssystem vorbereitet werden. Es ist zu beachten, daß die Grundeinstellung von DERIVE auf *Extended* (**Transfer Print Expressions Options**) gestellt sein muß. Diese Option ermöglicht beim Einlesen von PRT-Files in ein Textverarbeitungsprogramm die gewünschte Darstellung von Sonderzeichen (z.B. Integral, Summe, Produkt, Klammern) und Bruchstrichen. Bei einigen Textverarbeitungsprogrammen muß auch noch eine geeignete Punktgröße für die geschlossene Darstellung eingestellt werden (in diesem Buch wurden alle DERIVE-Zeilen im Schrifttyp Courier, 9 Punkt, dargestellt.)

(3) Umgang mit Abbildungen - Graphen

In DERIVE können der ganze Bildschirm oder nur einzelne Fenster ausgedruckt und als TIF-Files gespeichert werden.

- *Ausdrucken* von Grafiken: Mit **Shift+F10** wird das ganze Fenster und mit **Shift+F9** das aktuelle Fenster ausgedruckt. Bei der Grafikmenüoption *aXes* können die Achsen geeignet beschriftet werden.
- *Abspeichern* von Grafiken: Mit der Befehlsfolge **Transfer Print Screen File** wird der ganze Bildschirm als Grafikfile abgespeichert. Der gewünschte Name der TIF-Datei und das Laufwerk und/oder das Verzeichnis können mit **Transfer Print Screen Options Name** festgelegt werden. Wird diese Einstellung nicht getroffen, erhalten die Dateien den Namen DERIVE, DERIVE1, DERIVE2 und der Benützer hat das Problem, daß er sich den Inhalt der Dateien merken muß. Das Speichern erfolgt auch mit der Tastenkombination S**trg+F10**, mit **Strg+F9** wird nur das aktuelle Fenster gespeichert.

  Die gespeicherten Dateien können anschließend mit jeder einigermaßen leistungsfähigen Textverarbeitung, bzw. Grafikprogramm geladen und nachbearbeitet werden.

Ein direkter Weg, Grafiken bzw. DERIVE-Fenster in Textverarbeitungsprogramme zu übernehmen, ist gegeben, wenn DERIVE in eine grafische Oberfläche eingebunden wird.

Unter Verwendung dieser verschiedenen Optionen sollte es ohne allzu große Schwierigkeiten möglich sein, Arbeitsunterlagen für den Unterricht zu erstellen.

b) Arbeitsblätter

Wie bereits im Kapitel 4 gezeigt, tendiert der computerunterstützte Unterricht dazu, das selbständige Arbeiten der Schüler zu fördern. Eine geeignete Hilfestellung stellen Arbeitsblätter dar. Dabei ist zu beachten, daß die Arbeitsblätter dem Schüler die Möglichkeit bieten können, Bearbeitungen der Arbeitsaufträge, Zeichnungen, Interpretationen etc. in das Arbeitsblatt einzutragen. Bei diesen Arbeitsblättern gibt es eine große Vielfalt an Möglichkeiten, zwei sollen hier exemplarisch angerissen werden.

(1) Arbeitsblatt zum Überprüfen von getroffenen Entscheidungen

Dabei wird zuerst mit Papier und Bleistift gearbeitet und erst danach wird das CAS als Überprüfung, eventuell als Hilfe verwendet. Während der handschriftlichen Arbeit muß der Schüler keinen Computer zur Verfügung haben. Der Schüler kann sich danach die Rückmeldungen über die Folgen seiner Entscheidung selbst holen. Diese Komponente ist aus didaktischer Sicht neu. Die bisherige Rückmeldung über richtig und falsch erfolgte meist durch den Lehrer oder durch Mitschüler, eventuell Eltern. Es gibt also eine weitere Anlaufstelle, die befragt werden kann.

Arbeitsblätter, die vom Lehrer erstellt werden, sind beim Arbeiten mit einem CAS hilfreich, da einerseits die Schüler zur Selbständigkeit angehalten werden und andererseits der Lehrer den nötigen Freiraum für die Beobachtung und Betreuung erhält.

Beispiel 5.14: Arbeitsblatt 1

Durch welche Äquivalenzumformung ist die zweite Gleichung entstanden?

[vgl. Laub, Hruby, S.135]

```
a)  x + 6 = 1 ,   b) 7 u = 21 ,   c) 4 m = 4 m ,   d) 3 t = 3 t ,

     x = -5            u = 3            0 = 0             t = t
```

e) $\frac{5}{r} = 2,$	f) $4 - t = 1,$	g) $3x - 7 = 2x + 1,$
$5 = 2r$	$t - 4 = -1$	$x - 7 = 1$
h) $\frac{x}{4} = \frac{1}{2},$	i) $\frac{3y}{4} + 1 = \frac{y}{2},$	j) $a - 3 = \frac{2a}{3},$
$x = 2$	$3y + 4 = 2y$	$3(a - 3) = 2a$
k) $5 - \frac{z}{3} = z,$		
$5 = \frac{4z}{3}$		

Überprüfe Deine Umformungen mit DERIVE!

Bei der Überprüfung mit dem CAS kann die gesamte Gleichung mit **F4** in die **Author**-Zeile geholt und die Umformung eingegeben werden. Die Beispiele können in kurzer Zeit getestet werden. Bei einzelnen Beispielen wird es in der Klasse mehrere Vorschläge geben, die schon beim Vergleichen zu Diskussionen führen können. Das CAS gibt die Möglichkeit, daß der Schüler ohne Fremdanleitung seine Meinung bestätigt sieht oder revidieren muß.

Gleichung	Umformung	Vereinfachte Gleichung
#9: $4m = 4m$	#10: $(4m = 4m) - 4$	#11: $4m-4 = 4m-4$
	#12: $(4m = 4m) - m$	#13: $3m = 3m$
	#14: $(4m = 4m) - 4m$	#15: $0 = 0$
	#16: $\frac{(4m = 4m)}{4m}$	#17: $1 = 1$
#18: $3t = 3t$	#19: $(3t = 3t) - t$	#20: $2t = 2t$
	#21: $\frac{3t = 3t}{t}$	#22: $3 = 3$
	#23: $\frac{3t = 3t}{3}$	#24: $t = t$

Erfahrungsgemäß hat jeder Lehrer seine eigene Zielvorstellung und eine eigene Planung, so daß Arbeitsblätter nur selten direkt übernommen werden. Dennoch kann es hilfreich sein, sie mit bereits existierenden Arbeitsunterlagen zu vergleichen.

(2) Arbeitsblätter zum Interpretieren und Begründen

Je nach Unterrichtsplanung ist das Arbeiten mit dem CAS erwünscht, oder der Computer wird bewußt nicht eingeschaltet. Beim Arbeiten im Computerraum mit 30 Schülern ist es organisatorisch günstiger, die Abbildungen (z.B. Graphen) nicht jeden Schüler selbst ausdrucken zu lassen, sondern eine Vorlage für das Einlegen oder -kleben in das Übungsheft oder zum Einheften in eine Mappe zu kopieren.

Häufig (etwa bei der Interpretation von Graphen) wird es auch günstig sein, Folien oder Kopien eines Computerausdrucks für die handschriftliche Bearbeitung zur Verfügung zu stellen. Das angeführte Beispie könnte auch eine Themenstellung bei einer Klassenarbeit sein.

Beispiel 5.15 Arbeitsblatt 2

Es ist die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt (Abb. 5.13).

Welche Graphen in den drei weiteren Abbildungen können eine zu f' gehörige Funktion f darstellen? Begründe genau, warum die jeweilige Funktion zu dieser Ableitungsfunktion paßt!

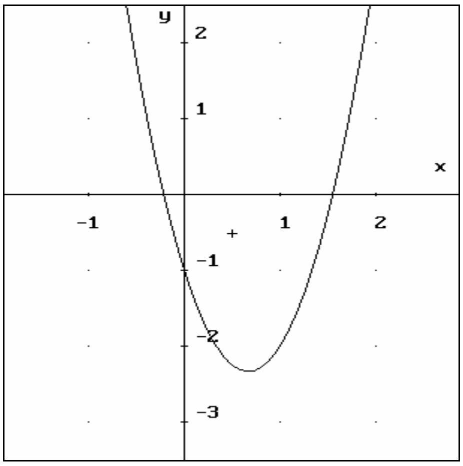


Abb. 5.13: Die Funktion f'

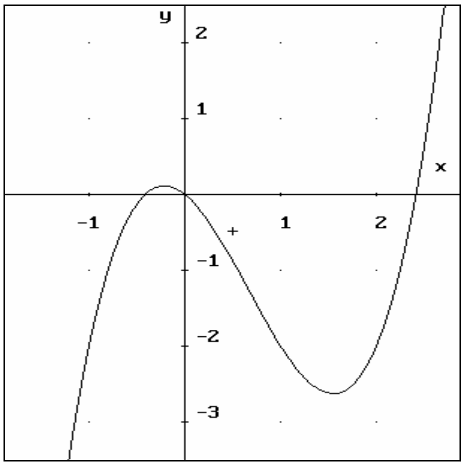


Abb. 5.14: Erste Funktion f

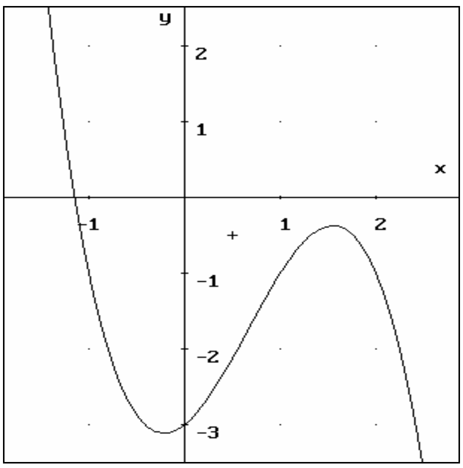


Abb. 5.15: Zweite Funktion f

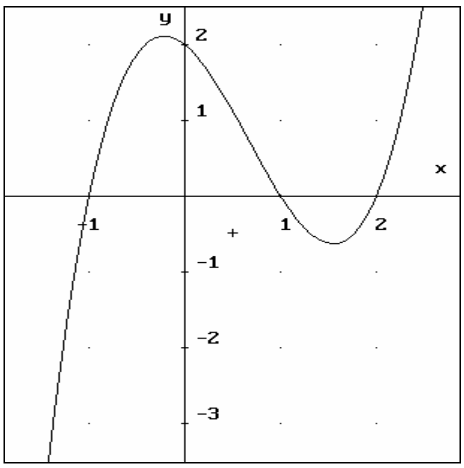


Abb. 5.16:Dritte Funktion f

c) Modulprinzip

Das in Abschnitt 4.3 vorgestellte Modulprinzip erfordert vom Lehrer einige Planungs- und Vorbereitungsarbeit, seien es nun Ideen als Anstoß für Schülermodule, Vorüberlegungen für gemeinsame Schüler-Lehrer-Module oder die Programmierung und Dokumentation von Lehrermodulen. In Ergänzung zu dem beim Modulprinzip gesagten seien hier noch zwei weitere Ideen angeführt.

(1) Module als Werkzeuge für mathematisches Erkennen und mathematische Entdeckungen

Das Modulprinzip eröffnet dem Lehrer die Chance, seinen Schülern Werkzeuge in die Hand zu geben, mit denen diese eigenständige Entdeckungen machen können. Meist werden solche Module dann nutzbringend eingesetzt werden, wenn ein neuer Begriff bereits eingeführt worden ist und es darum geht, möglichst viele Aspekte dieses Begriffs kennenzuleren und Erfahrungen im Umgang mit diesem neuen Begriff aufzubauen. So dient sicher das in Kap. 4.3 vorgestellte Modul zur Visualisierung von Binomialverteilungen dazu, das Wesentliche und Typische an Binomialverteilungen besser zu erkennen.

(2) Das modular aufgebaute Schulheft bzw. Schulbuch

Durch die Zunahme elektronisch erfaßter Unterrichtsunterlagen, durch die Möglichkeiten, die sich aus der Kombination von mathematischer Arbeitsumgebung und elektronischer Textgestaltung ergeben, scheint es nicht völlig unrealistisch, daß in Zukunft Schüler ihre Arbeit im Unterricht bzw. bei Hausübungen in der Form dokumentieren, daß 'Notebooks' angelegt werden. Fast alle unter grafischen Oberflächen betriebenen CAS gestatten es, die durchgeführten Berechnungen zu „kapseln" und erst auf Wunsch des Benutzers anzeigen zu lassen. Vorreiter in dieser Beziehung war das System MATHEMATICA, mittlerweile gehört diese Möglichkeit quasi zum Standard, auch die nächste DERIVE-Version wird damit ausgestattet sein. So können die zu einem Thema erarbeitete Theorie, die parallel entwickelten Module, die bearbeiteten Beispiele und die zugehörigen Lösungen in ein 'Notebook' zusammengefaßt werden. Eventuell könnten Beispiele noch verknüpft werden mit Anmerkungen, Daten- und Bildmaterial (z.B. aus der Geschichte der Mathematik). Solche 'Notebooks' ließen sich beständig ausbauen, „Längs- und Querschnitte" sind effektiv herstellbar. Voraussetzung dafür wären allerdings mathematisch-orientierte Textverarbeitungen, die wesentlich einfacher als alle bisher erhältlichen, zu benutzen sind. Die rasanten Entwicklungen im Bereich der Datenspeicherung (CD-ROMS), der Kommunikation mittels Internet und die Organisation solcher 'Notebooks' mit Hypertextverknüpfungen eröffnen hier für die Zukunft sicher interessante Möglichkeiten.

5.2.4. CAS als zweite Autorität und Folgen für das Lehrerverhalten

Eine in der Unterrichtspraxis nicht zu unterschätzende Folge des Einsatzes von CAS ist die Tatsache, daß der 'algorithmische Gehorsam' und (permanente) Gleichschritt im Unterricht verlorengeht. Unterschiedliche Bearbeitungswege einer Aufgabe bzw. eines Problems im Unterricht, aber vor allem auch in der Übungs- und Prüfungsituation, treten in Erscheinung. Hier ist der Lehrer in zweifacher Weise gefordert:

a) Fachliche Kompetenz und Flexibilität

Warum ist fachliche Kompetenz gefragt? Es wird im CA-unterstützten Unterricht häufiger auftreten, daß Schüler Aufklärung verlangen für Ergebnisse, die das System liefert, die aber mit dem momentanen Wissensstand des Schülers nicht erklärbar sind. Problemlösen und Verstehen sind zwei wesentliche Komponenten im Mathematikunterricht, die Hand in Hand gehen müssen. Mittels CA sind die Möglichkeiten des Problemlösens gewaltig gestiegen. Verstehen ist aber ein mit Paradoxien einhergehender Prozeß - wie H.-J.Vollrath dargestellt hat [Vollrath, 1993,S.35-38] - der nur durch intensives und persönliches Bemühen des einzelnen vollzogen werden kann. Der Lehrer und das CAS können dazu wertvolle Dienste leisten.

b) Kompetenz im Umgang mit CAS

Immer wieder wird der Lehrer auch konfrontiert sein mit Eingabe- bzw Übertragungsproblemen. Einige (häufig auftretende) Beispiele dazu:

Beispiel 5.16: Nicht erkannte 'Übertragungsfehler'

Speziell bei den selbstgewählten Einstellungen *Word* und/oder *Sensitive* (deshalb ist es günstig in der Grundeinstellung *Character* und *Insensitive* vorzugeben) treten immer wieder die Probleme auf, daß die Benützer die Einstellungen 'vergessen' und etwa *a*b* eingeben wollen, am Bildschirm erscheint jedoch die Wortvariable *ab*. Wird die Eingabe am Bildschirm nicht kontrolliert entstehen bei weiteren Berechnungn großere Probleme. Diese Situation läßt sich pädagogisch nutzen, indem durch mehrere Beispiele die Auswirkung von fehlenden Eingabekontrollen aufgezeigt werden.

Bei dem folgenden Beispiel wurde sin*x* eingegeben und die Zeile #4 gezeichnet. Es entsteht statt der Sinuskurve eine Gerade, die erste Mediane (Abb. 5.17). Spätestens hier sollte der Anwender nicht dem CAS die Schuld geben, sondern seine Eingabe hinterfragen!

```
#1:   InputMode := Word                                 User
#2:   CaseMode := Sensitive                             User
#4:   y = sinx                                          User
```

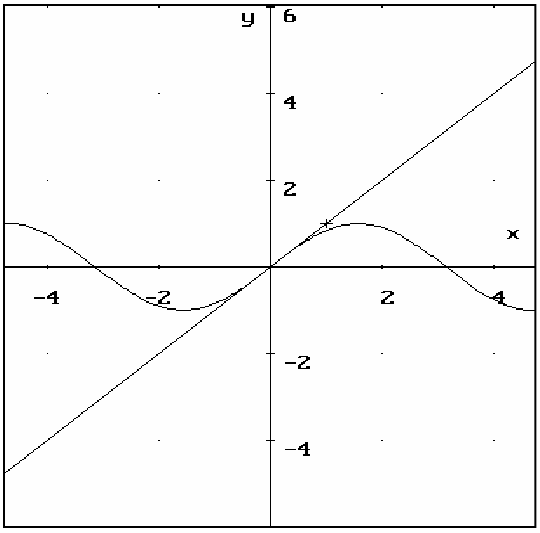


Abb. 5.17 : SIN(x) ?

Bei den von uns vorgeschlagenen Grundeinstellungen zeigt DERIVE einen hohen Anteil an Selbständigkeit im Umgang mit der Interpretation der Eingabe. Es wurde, wie vorher, sin*x* eingegeben und DERIVE filtert den vordefinierten Funktionsnamen SIN aus der Zeichenkette heraus und liefert das gewünschte Ergebnis (Abb. 5.17).

```
#5: InputMode := Charakter                             User
#6: CaseMode := Insensitive                            User
#7: y = SIN(x)                                         User
```

Der Benützer soll verwendete Funktionen und Befehle also immer mit Großbuchstaben eingeben und sich an die Syntax (hier Klammern) halten.

Beispiel 5.17: Vordefinierte Konstanten

Ein weiterer Dauerbrenner unter Schüleranfragen ist die Eingabe der Eulerschen Zahl e und der imaginären Einheit i. Werden diese nicht mit **Alt+e** oder **Alt+i**, sondern als Buchstaben (#8) eingegeben, behandelt das CAS diese Eingaben als Variablen.

```
             x
#8:   y = e                                           User
             x
#9:   y = ê                                           User
```

Versucht man die Zeile #8 zu zeichnen, so erhält man nur die Rückmeldung "CAnnot do implizit 3D plots". Wieder liegt das Problem beim Anwender und nicht beim Computer.

Beispiel 5.18: Geänderte Voreinstellung

Mit einem CAS sind immer wieder Einstellungen durchzuführen. Dabei müssen einige Optionen mit der **TAB**-Taste übersprungen werden, um die geeignete Option einstellen zu können. Im Grafikmenü kann mit **Option State** *Connected* das Verbinden von Punkten eingestellt werden. Dabei überspringt man das Eingabefeld für die Art der Darstellung im Koordinatensystem (Cartesische Koordinaten oder Polarkoordinaten). Die grafische Darstellung von $y = x$ (siehe Abb. 5.18) gefällt den Lernenden aus ästhetischen Gründen, ist jedoch meist nicht die gewünschte.

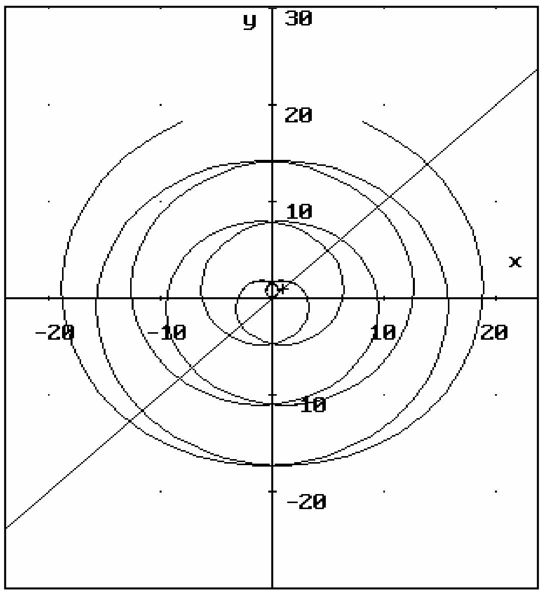


Abb. 5.18: Eine Gerade?

In der 8. und 9. Schulstufe wird das folgende Beispiel, zwecks mangelnder mathematischer Kenntnisse, meist nur durch Einsetzen, also Probieren gelöst. Mit dem CAS kann die Lösung jedoch mit Tastendruck erfolgen und die Ausgabe der Lösung verblüfft.

Beispiel 5.19: Verzinsungsproblem - geheimnisvoller Formelzauber

Ein Kapital von 5000 Schilling wird mit 5% verzinst. Nach wieviel Jahren wird das Kapital über 8000 Schilling ansteigen?

Die Übersetzung dieser Aufgabenstellung in eine Gleichung führt zum Aufsuchen einer fehlenden Hochzahl x.

$$\#1: \quad 5000 \cdot 1.05^{x} = 8000 \qquad \text{User}$$

$$\#2: \quad x = \frac{3 \cdot \mathrm{LN}(2) - \mathrm{LN}(5)}{\mathrm{LN}\left[\frac{21}{5}\right] - 2 \cdot \mathrm{LN}(2)} \qquad \text{Solve(\#1)}$$

Die Lösung läßt sich für einen Schüler dieser Schulstufe nicht interpretieren. Jedoch wird er mit der Anwendung einer ihm nicht bekannten Funktion vertraut und sieht, daß diese 'Geheimzeichen' vertraute Zahlen liefern.

```
#3:   x = 9.63316                                       Approx(#2)
```

Der Lehrer kann diese Situation zum Anlaß nehmen, um aus der Black Box - eventuell zeitversetzt und in den Aufbau seines Kurses eingebaut - im Unterricht eine White Box zu machen (vgl. Black Box/White Box-Prinzip).

Beispiel 5.20: Das Computeralgebra-System verweigert die Dienste

Löst ein Anwender die angegebene Ungleichung mit **soLve**

#1: $\frac{x}{a} - b < c$ User

erhält er als Lösung #2.

#2: $x \cdot \mathrm{SIGN}(a) < (b + c) \cdot |a|$ Solve(#1)

Es läßt sich für Schüler einer 8. oder 9. Schulstufe nur erkennen, daß die Ausgabe irgend etwas mit der positiven oder negativen Größe von *a* zu tun hat. Er kann weitere Untersuchungen durchführen, etwa die Äquivalenzumformung:

#3: $\left[\frac{x}{a} < b + c\right] \cdot a$ User

#4: $a \cdot \left[\frac{x}{a} < b + c\right]$ Simp(#3)

Die Vereinfachung von #3 wird jedoch vom CAS verweigert. Warum? Die Variable *a* darf einerseits nicht Null sein, andererseits hat eine Multiplikation mit einem positiven oder negativen *a* Auswirkungen auf das Ungleichheitszeichen. Deshalb:

```
#5:   "Fallunterscheidungen:"                User
#6:   a :ε Real (0, ∞)                       User
#7:   x < a·(b + c)                          Simp(#6)
#8:   a :ε Real (-∞, 0)                      User
#9:   x > a·(b + c)                          Simp(#6)
```

Die Vereinfachung von #7 liefert interpretierbare Ungleichungen. Diese Vorgangsweise ist vielleicht für einen Schüler einsichtiger als eine vorweggenommene Verpflichtung zum Durchführen von Fallunterscheidungen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß forciertes experimentelles Arbeiten vom Lehrer neue Kompetenzen, insbesondere eine erhöhte Flexibilität erfordert und zu einer Veränderung seiner Rolle im Unterricht führt. Aus der rein wissensvermittelnden dozierenden Autorität wird auch eine (natürlich weiter wissensvermittelnde) Person, die dem Schüler helfen kann, mit der zweiten Autorität im Unterricht kritisch, konstruktiv und sachgerecht umzugehen.

5.3. Die Veränderungen in der Übungsphase

Das Thema 'Üben' fristet in der mathematisch-didaktischen Diskussion ein eigenartiges Schattendasein. Einerseits wird Üben für sehr wichtig und wesentlich für den Lernfortschritt angesehen, wobei dies oft in der Meinung gipfelt: Alles Mathematiklernen sei bloß eine Frage des 'richtigen' Übens. Andererseits erscheint das Thema 'Üben' als wenig attraktiv und wird in der didaktischen Diskussion oft vernachlässigt. Erarbeiten neuer Inhalte, Modellbilden, kreatives Problemlösen werden oft geradezu im Gegensatz zum Üben gesehen. Auf diesen Zwiespalt hat bereits H.Winter in einem höchst lesenswerten Grundsatzartikel zum Thema Üben [Winter, 1984, S.4-16] hingewiesen.

Üben ist leider da und dort in der Schulmathematik zum Selbstzweck geworden, seien es nun in ihrer Komplexität überzogene Termumformungen, aufwendige Exponential- und logarithmische Gleichungen, die ohne jeglichen Anwendungsbezug gedrillt werden, oder mechanisch ablaufende Kurvendiskussionen. „Etwas, was offenbar auf keine vernünftige Weise angewandt werden kann, entwickelt sich, weil es ja geübt werden muß, zu einem selbständigen Kapitel der Schulmathematik. Es ist eine traurige Geschichte, daß solch ein Thema, wenn es einmal eingeführt ist, eine Tradition erzeugt, die kaum noch auszurotten ist“. [Freudenthal, 1977, zitiert nach Kronfellner, 1987, S.164]

In seinen Überlegungen zu dieser Thematik fordert H.Winter eine Theorie des Übens, die „ihren Stellenwert im Gesamtvollzug der Mathematiklernens erkennen läßt“. Seine Forderung nach Einbettung des Übens in den Kontext des Mathematiklernens - etwa wie es in Kapitel 4 in Form der drei Phasen (heuristische, exakte und Anwendungsphase) dargestellt wurde -, ist heute aktueller denn je.

Was soll im Mathematikunterricht sinnvollerweise geübt werden? Sind oder werden diese 'Übungsbereiche' durch CAS beeinflußt? Wenn ja, auf welche Weise? Gibt es Techniken, die durch CAS bedeutsamer werden und dadurch einen Übungsbedarf hervorrufen? Es ist hier kaum möglich, das weite Feld des Übens im MU auszuleuchten, wir wollen lediglich zwei Schlaglichter werfen: Die stärkere *Einbettung des Übens* in den Kontext des Mathematisierens und Problemlösens und die *Notwendigkeit des Testens*.

5.3.1. Die stärkere Einbettung des Übens in den Kontext des Mathematisierens und Problemlösens

Ganz grob läßt sich das, was geübt werden soll, gliedern in den Bereich der *Fertigkeiten* (Kalküle, Techniken), des *begrifflichen Wissens* und der *mathematischen Fähigkeiten*.

Auf den ersten Blick ist natürlich der Bereich der Rechenfertigkeiten am stärksten durch die Existenz von CAS betroffen. Worin bestehen diese Rechenfertigkeiten bzw. die schulrelevanten Kalküle?

Hier ist zuerst das Rechnen in den verschiedenen Zahlenbereichen (vom Rechnen mit Brüchen bis zum Rechnen mit komplexen Zahlen) anzuführen, also die elementaren Kalküle der Arithmetik der Zahlbereiche, in schriftlicher und mündlicher Form. Des weiteren „das Rechnen mit Buchstaben“, also Termumformungen und Lösungsverfahren für elementare Gleichungssysteme. Auch die verschiedenen Verfahren zum Auflösen von (linearen und nichtlinearen) Gleichungssystemen, von quadratischen Gleichungen und Gleichungen höherer Ordnung zählen dazu. Genauso können die Polynomdivision bzw. Partialbruchzerlegung, Bestimmung von Grenzwerten, Bestimmung von Ableitungs- und Stammfunktionstermen, die Entwicklung von Taylorreihen, die Verfahren zur numerischen Bestimmung von Nullstellen (stetiger) Funktionen sowie das Rechnen mit weiteren mathematischen Gegenständen (Vektoren, Matrizen, Folgen, Funktionen u.a.) hier angeführt werden.

Zu den Fertigkeiten sollten auch die zeichnerischen Grundfertigkeiten und die graphische Darstellung funktionaler Zusammenhänge gezählt werden.

Alle die angeführten - auch in Zukunft natürlich wichtigen - Fertigkeiten sind durch CAS gleichsam entwertet. Diese Entwertung kann eine Demotivation zur Folge haben (Schülerfrage „Warum muß ich noch die Nullstelle einer Funktion "per Hand" ermitteln, wenn ich a) diese im Graphikfenster "sehe" und b) jederzeit mir beliebig genau errechnen lassen kann?“), wenn nicht auch vom Übungsangebot und vor allem von den dahinter stehenden Intentionen entsprechend reagiert wird.

Man kann hier auf die verschiedenen positiven und wichtigen Aspekte hinweisen, die mit dem Üben von Kalkülen verbunden sind, wie sie etwa von R.Köhler [BzM 1995, S. 297] zusammengefaßt wurden.

- Kalküle vermitteln kalkulierbare Erfolgserlebnisse.
- Besonders bei schwachen Schülern wird das Verständnis gefördert.

- Um in der Lage zu sein, die von Computern gelieferten Ergebnisse vernünftig zu interpretieren, sollten Schüler Möglichkeiten kennengelernt haben, diese Ergebnisse (zumindest im Prinzip) selbst ermitteln zu können, und sie müssen dabei genügend eigene Erfahrung gesammelt haben. [Blum, 1995, S.12]
- Kalküle haben eine entlastende Funktion für Schüler und Lehrer: Der rein forschende, experimentelle Unterricht überfordert alle Beteiligten. [Bender in: Walsch, 1989,S. 224]
- Zur Einschätzung der Leistungsfähigkeit von Rechnern muß die Mühsal des selbst ausgeführten Kalküls verspürt worden sein [Schönwald in DdM, 1991, S. 252-265]
- Kalküle haben eine unterrichtsordnende Funktion, weil sie Unterrichtsabläufe strukturieren helfen und durchschaubar machen.
- Kalkülhaftes Arbeiten ist bei vielen Schülern beliebt, weil Mathematik damit greifbar und verstehbar wird (Stichwort: operatives Prinzip!). Für schwache Schüler werden Kalküle mitunter sogar zum 'Rettungsanker'.
- Der Umgang mit Kalkülen verschafft Erfahrung und Sicherheit im Umgang mit mathematischen Objekten wie Termen, Gleichungen, Funktionen usw.
- Kalküle können als Black-Boxes fungieren, indem man schwierige Details ausblendet und sich auf das Kalkülprodukt anstatt auf den Kalkülprozeß konzentriert.

Wir meinen, daß es vor allem darauf ankommen wird, sich auf ein *'vernünftiges' Ausmaß* an handschriftlichen Fertigkeiten einzupendeln. Überzogene Kalkülfertigkeiten werden angesichts eines permanent zu Verfügung stehenden CAS (etwa in Taschenrechnerform) in Zukunft wahrscheinlich den Charakter einer sportlichen Betätigung annehmen. An die Stelle einer überladenen Komplexität muß eine *verstärkte Reflexion* auf mathematische Inhalte und Begriffsbildungen treten, so daß der Werkzeugcharakter der Kalküle deutlicher hervortreten kann und diese stärker in einen anwendungs- und problemorientierten Unterricht eingebettet werden können.

Beispiele:

- Statt endlosen und damit das Interesse tötenden Termumformungen Übungen im Struktur- und Mustererkennen.
- Statt isoliertem Lösen von Exponential- und logarithmischen Gleichungen die Behandlung von Wachstumsmodellen.
- Statt mechanisch ablaufenden Kurvendiskussionen verstärktes Modellieren von Anwendungssituationen mit Funktionen und Kurven.

Ansätze für solche Veränderungen in der „Übungslandschaft“ finden sich etwa in der von W.Herget in "Mathematik lehren" eingerichteten Rubrik "Die etwas andere Aufgabe" oder in G.Schmidts Artikel [MU,1993/1, S.10-27], um nur zwei Beispiele herauszugreifen.

Zusammenfasend kann also festgestellt werden: handschriftliche Verfahren behalten natürlich auch im CAS-unterstützten Unterricht ihre Bedeutung. Wichtig ist es dabei aber, sich auf die typischen und wesentlichen Fälle zu beschränken. Bei aufwendigeren Kalkülen bieten CAS hingegen neue Chancen, die es zu nutzen gilt:

- CAS befreien von der Irrtumsanfälligkeit (eine Hausübung kann zur „Kontrolle“ etwa noch einmal mit dem CAS nachgerechnet werden).
- Durch die raschere Ausführung eines Kalküls (z.B. „Nullsetzen der ersten Ableitung“, Erstellen des Graphen der Funktion oder seiner Ableitungen, Faktorisieren komplizierterer Terme) ist eine Konzentration auf den Gesamtzusammenhang eines Problems leichter möglich. Eine klarere Strukturierung eines Problemlöseprozesses in *Mathematisierung - Kalkülanwendung - Interpretation* läßt sich eher erreichen. Der Schüler kann dadurch auch leichter verstehen, daß Mathematik eine Sprache ist, die uns hilft Probleme zu lösen, wenn wir es schaffen, sie mit dieser Sprache zu beschreiben.
- Bei der Verwendung von CAS bzw. der Möglichkeit ein CAS „zu Hilfe zu rufen“, rechnen Schüler auch dann weiter, wenn sie handschriftlich bereits kapituliert hätten. Oft werden dann durch das CAS neue Ideen „induziert“, die den „Totpunkt“ überwinden helfen.

Wie schon an anderer Stelle in diesem Buch betont, müssen die Schüler nun aber andererseits auch eine neue Art von Fertigkeit erwerben, etwa jene, einen mathematischen Zusammenhang im CAS „abzubilden", Transformationen mit Hilfe des CAS vorzunehmen u.a. (vgl. Kap.5.2.1).

Begriffliches Wissen

Während Fertigkeiten „linear" organisiert sind und dann als eingeübte Handlungen wie ein Programm ablaufen können (und sich daher auch gut für einer Implementation im Rahmen eines Informatiksystems eignen) liegt begriffliches Wissen im Idealfall als „vernetztes System" vor. Steht bei den *Fertigkeiten* die Automatisierung und die „virtuos beherrrschte Technik" im Vordergrund, so soll beim *Wissen* dieses als umfassendes System leicht abrufbar zur Verfügung stehen. „Wissenselemente (Begriffe, Bestandteile von Begriffen, Eigenschaften von Begriffen, Beziehungen zwischen Begriffen ...) müssen (...) in möglichst vielfältig verbundener, aber sozusagen ruhender Vernetzung bereit liegen, um im Bedarfsfall (Erinnerungsfall) in einer bestimmten, dem jeweiligen Anliegen dienlichen Hierarchisierung rekonstruiert werden zu können (und das möglichst flüssig)" [H.Winter, a.a.O., S.8]. Unseres Erachtens kann das White Box/Black Box-Prinzip Beiträge zu einer derartigen Hierarchisierung des Wissens leisten (vgl. White Box/Black Box-Prinzip in der Algebra). Auch durch die Möglichkeit der Projektion mathematische Objekte in verschiedene Ebenen - wie sie in 2.5 dargestellt wurde - , eröffnen sich neue Zugänge zu Eigenschaften eines Begriffes eröffnen (Mehrfachrepräsentation von Begriffen).

Das Einübens von Fertigkeiten und die Schaffung einer mathematischen „Wissensbasis" können aber nie Selbstzweck sein. Sie haben eine dienende Funktion, die „eigentlichen und entscheidenden Zielsetzungen des Mathematikunterrichts sind auf die Schulung von übergeordneten, womöglich sogar fächerübergreifenden Fähigkeiten gerichtet" [Winter, 1984, S.9].

Mathematische Fähigkeiten

Ziel alles Übens muß der Aufbau mathematischer Fähigkeiten sein. Was kann man darunter verstehen? Wir wollen uns hier wieder der „Definition" H.Winters anschließen:

„Fähigkeit im Bereich X = Tüchtigkeit, Probleme im Bereich X zu lösen"

„Fähigkeiten stellen komplexe Könnensschemata dar, die Fertigkeiten und Wissensstücke als wichtige Bestandteile enthalten, aber nicht auf diese reduzierbar sind." [Winter, a.a.0., S.9]

Wird Üben integrativ als Aufbau von mathematischen Fähigkeiten gesehen, so ist es wesentlich, daß bei diesem Üben stets der Bezug

- zum *Organismus der Mathematik*,
- zu den *Anwendungen der Mathematik* und
- die Orientierung an Problem- bzw. Themenkreisen deutlich sichtbar bleibt.

Wir brauchen dazu nicht unbedingt völlig neu zu beginnen. Durch die neuen Werkzeuge werden oft auch herkömmliche Aufgabenstellungen ganz neu bearbeitbar. Und vielfach können dadurch diese drei genannten Aspekte stärker hervortreten. Dies soll anhand einer Optimierungsaufgabe dargestellt werden. Dabei soll überdies gezeigt werden, daß auch in der Kalkülphase neue Möglichkeiten bestehen, z.B. dadurch, daß eine allgemeine Problemstellung schnell mit konkreten Zahlenwerten betrachtet wird, um eine Einschätzung für einen Zusammenhang zu erhalten. Oder es tauchen in der Interpretationsphase neue Fragen auf, denen nun leicht nachgegangen werden kann, und deren Lösung einen wertvollen Beitrag zum Verständnis der Aufgabe leistet. Erst durch die größere Palette an Möglichkeiten eröffnet sich auch die Chance, verschiedene Wege bei der Mathematisierung der Problemstellung zu gehen. Andererseits zeigen sich in diesem Beispiel auch prinzipielle Grenzen im Einsatz von CAS, an die man im Mathematikunterricht aber durchaus stoßen kann.

Beispiel 5.21: Optimierungsaufgabe

[Reichel, S.142, Beisp.516]

Zwei Städte A und B wollen an der geradlinigen Meeresküste eine gemeinsame Trinkwassergewinnungsanlage C bauen (Skizze). Die Kosten für 1km Wasserleitung von C nach A beträgt a Schilling, von C nach B b Schilling. Wo soll die Anlage gebaut werden, wenn die Gesamtkosten minimiert werden sollen?

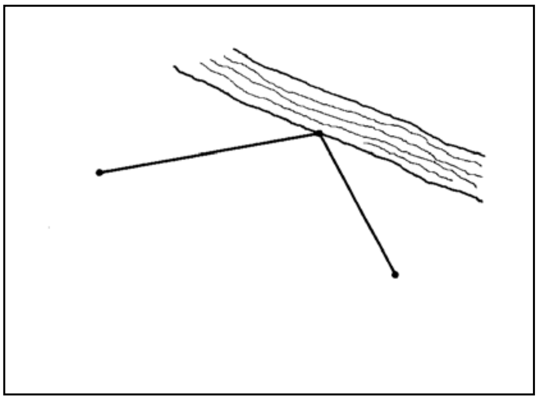


Abb. 5.19: Skizze1

Zur Mathematisierung: Die Problemstellung ist hier sehr offen (in welcher Weise soll der Ort der Trinkwasseranlage angegeben werden?) und gleichzeitig völlig eindeutig (die Gesamtkosten sollen minimal sein!) formuliert. Wir müssen uns also überlegen, wie wir den gesuchten Ort angeben wollen (was würden wir z.B. den beiden Bürgermeistern von A und B sagen?) Denkbar sind etwa folgende Varianten: Man gehe z.B. von A auf kürzestem Weg (= Normalabstand) zur Küste und von dort x km an der Küste entlang in Richtung B, nach diesen x km ist der gesuchte Ort C erreicht! Oder: Wir verraten den beiden Stadtoberhäuptern den jeweiligen Winkel zwischen der Normalen zur Küste und der Richtung zu C. Auch andere Varianten wären denkbar.

Fassen wir die genannten Varianten in eine Skizze (Abb. 5.20) zusammen und vergeben wir dabei geeignete Symbole!

Die Kostenfunktion ergibt sich damit als:

$$K(x) = a.l_a + b.l_b = a.\sqrt{n_a^2 + x^2} + b.\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}$$

Sinnvoll ist $x \ \varepsilon \ [0, d]$.

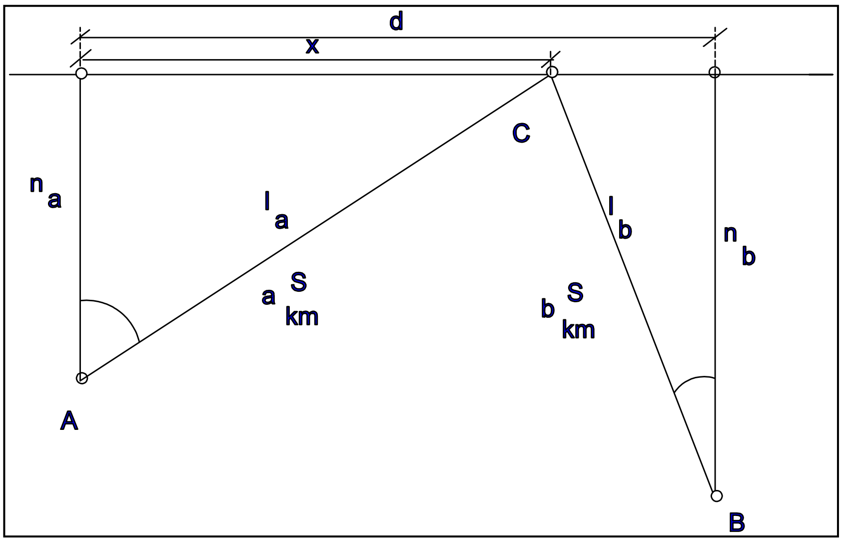


Abb. 5.19: Skizze 2

Zum Kalkül: Begeben wir uns auf die Suche nach dem Minimum.

$$K'(x) = a\cdot\frac{1}{2}\cdot(n_a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} + b\cdot\frac{1}{2}\cdot(n_b^2+(d-x)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot(d-x)\cdot(-1) =$$
$$\frac{a\cdot x}{\sqrt{n_a^2+x^2}} - \frac{b\cdot(d-x)}{\sqrt{n_b^2+(d-x)^2}}$$

Die Bedingung $K'(x) = 0$ liefert die Wurzelgleichung:

(1) $$\frac{a\cdot x}{\sqrt{n_a^2+x^2}} = \frac{b\cdot(d-x)}{\sqrt{n_b^2+(d-x)^2}}$$

Wenn wir versuchen, sie nach x aufzulösen, landen wir bei einer Gleichung 4.Grads:

$$\frac{a^2\cdot x^2}{n_a^2+x^2} = \frac{b^2\cdot(d-x)^2}{n_b^2+(d-x)^2}$$

$$a^2\cdot x^2\cdot n_b^2 + a^2\cdot x^2\cdot(d-x)^2 = n_a^2\cdot b^2\cdot(d-x)^2 + b^2\cdot x^2\cdot(d-x)^2$$

(2) $$(a^2-b^2)\cdot x^4 + 2d(b^2-a^2)\cdot x^3 + (a^2d^2 + a^2\,n_b^2 - b^2d^2 - b^2n_a^2)\cdot x^2 +$$
$$+ 2b^2d\ \ n_a^2\cdot x + (-b^2d^2\ \ n_a^2) = 0$$

Dieses Polynom 4. Grads erweist sich nun leider als eine fast unüberwindliche Hürde, wenn wir versuchen, in dieser allgemeinen symbolischen Form zu einer Lösung bzw. zu einer Nullstelle zu kommen.

Für Gleichungen 3. Grads gibt es bekanntlich die CArdanosche Formel und Gleichungen 4. Grads kann man mit Tricks auf Gleichungen 3. Grades zurückführen (einen hat etwa Descartes 1637 angegeben [Cigler, 1995, S.36].

Wenn wir versuchen, Gleichung (2) mit DERIVE (Version 3.06) zu lösen, kommt das System zwar zu einem Ergebnis, beim Versuch es am Bildschirm darzustellen, scheitert es aber mit der Meldung "Memory full". Bei der XM-Version wurde der Lösungsversuch nach 1.5 Stunden aufgegeben. MATHEMATICA gibt zwar in kurzer Zeit (≈20s, 486er, 120 MHz) tatsächlich bei (1) bzw. (2) vier Lösungen aus - wie dies durch den Fundamentalsatz der Algebra vorhergesagt wird - allerdings benötigt jeder der 4 Lösungsterme etwa 6 Seiten (Courier, 10pt) beim Ausdruck. Der Fairneß halber muß natürlich angemerkt werden, daß MATHEMATICA wesentlich höhere Systemressourcen benötigt.

So aufwendig unsere Aufgabe im allgemeinen Fall erscheint, so lächerlich einfach wird sie, wenn wir konkrete Zahlen einsetzen und uns damit also in die rein numerische Ebene begeben. Der mathematisch interessante Teil besteht in der Notwendigkeit, eine Gleichung näherungsweise (oder auch grafisch) zu lösen. Nehmen wir also z.B. an:

$a:b = 1:2$, n_a =10km, n_b =15km, d=25km.

Dazu definieren wir zuerst eine Funktion, in die wir alle relevanten Größen packen; in #4 wird dann näherungsweise im sinnvollen Intervall für x ([0,25]) das Minimum ermittelt. Die Situation stellt sich in DERIVE folgendermaßen dar:

```
                                  2    2          2       2
#1:  K(x,a,b,na,nb,d):= a·√(na  + x )+ b·√(nb +(d-x) )     User

#2:  K(x, 1, 2, 10, 15, 25)                                 User
                                 d
#3:  K1(x, a, b, na, nb, d)  :=  ── K(x, a, b, na, nb, d)   User
                                 dx

#4:  SOLVE(K1(x, 1, 2, 10, 15, 25) = 0, x, 0, 25)           User
```

$$\#5:\quad [x = 17.7416] \qquad \text{Simp(\#4)}$$

$$\#6:\quad \mathrm{K2}(x,a,b,na,nb,d) := \left[\frac{d}{dx}\right]^2 \mathrm{K}(x, a, b, na, nb, d) \qquad \text{User}$$

$$\#7:\quad \mathrm{K2}(x, a, b, na, nb, d) := \qquad \text{Simp(\#6')}$$

$$\frac{a\cdot\sqrt{x^2+na^2}\cdot(2\cdot x^2-3\cdot d\cdot x+d^2+nb^2)+b\cdot\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2}\cdot(2\cdot x^2-d\cdot x+na^2)}{(x^2+na^2)\cdot(x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2)} - \frac{(2\cdot x^3-3\cdot d\cdot x^2+x\cdot(d^2+na^2+nb^2)-d\cdot na^2)\cdot(a\cdot x\cdot\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2}+b\cdot(x-d)\cdot\sqrt{x^2+na^2})}{(x^2+na^2)^{1.5}\cdot(x^2-2\cdot d\cdot x+d^2+nb^2)^{1.5}}$$

Führen wir noch den Nachweis, daß ein Minimum vorliegt:

$$\#8:\quad \mathrm{K2}(17.7416, 1, 2, 10, 15, 25) \qquad \text{User}$$
$$\#9:\quad 0.109087 \qquad \text{Approx(\#8)}$$

Tatsächlich! Wenn wir #2 plotten, ergibt sich folgendes Bild:

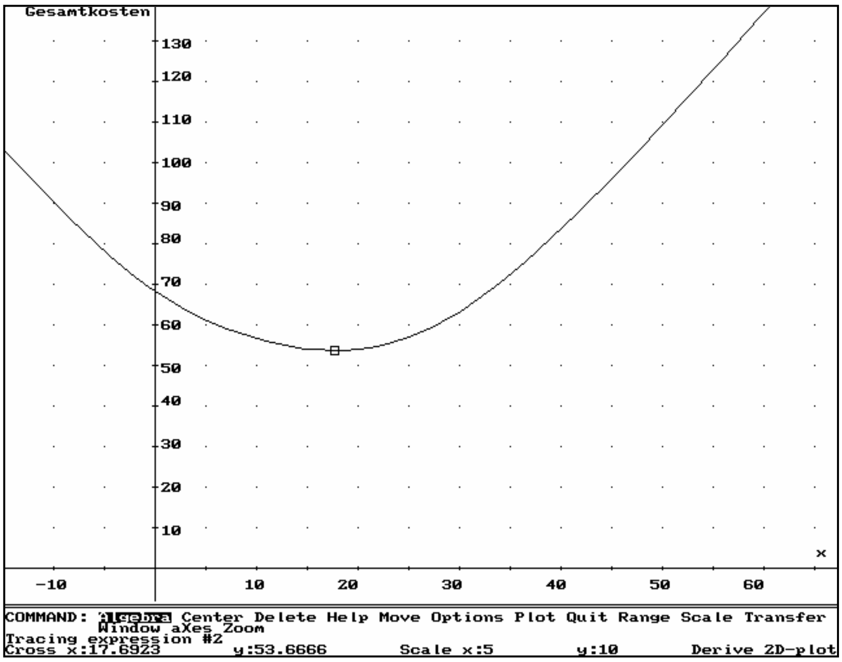


Abb. 5.20: Verlauf der Kostenfunktion K(x,1,2,10,15,25)

Schauen wir uns an, was passiert, wenn wir dieselben konkreten Werte in die von MATHEMATICA produzierten vier allgemeinen Lösungen einsetzen. Im folgenden Befehl wird zuerst Gleichung (1) allgemein aufgelöst, und dann werden die konkreten Werte eingesetzt:

```
N[(x/.
    Solve[(a^2*x^2)/(na^2+x^2)==(b^2*(d-x)^2)/(nb^2+(d-x)^2),x])
                              /.{a->1,b->2,na->10,nb->15,d->25}]
```

$$\{-0.460373 - 11.8893\, I,\ 17.7417 - 6.21725\ 10^{-15}\, I,$$
$$-0.460373 + 11.8893\, I,\ 33.1791 + 4.44089\ 10^{-15}\, I\}$$

Wir erhalten vier komplexe Zahlen, wobei die erste und dritte komplex konjugiert sind und die zweite und vierte verschwindende Imaginärteile aufweisen (Überbleibsel von Rundungen?). Der Realteil der zweiten Lösung liegt in dem für das Problem sinnvollen Intervall. Tatsächlich haben wir damit eine korrekte Lösung bekommen (vgl. #5, oben).

Es gibt noch einen weiteren Weg, um in dieser Sache voranzukommen. Betrachten wir dazu die relevante Gleichung (1) etwas genauer:

$$\frac{a \cdot x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}} = \frac{b \cdot (d - x)}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$$

Da nun $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}}$ [35] und $\sin\beta = \frac{d - x}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$ [36] können wir kürzer schreiben:

(3) $a \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\beta$ bzw. $\sin\alpha : \sin\beta = b : a$

Interpretation: Um unser Ergebnis (3) besser zu verstehen, nehmen wir wieder an, daß

z.B.: $a : b = 1 : 2 \Rightarrow \sin\alpha : \sin\beta = 2 : 1$

Heißt das nun, daß wir einen der beiden Winkel frei wählen können, und der andere ergibt sich dann daraus, da ja $\sin\alpha = 2. \sin\beta \Rightarrow \alpha = \arcsin(2. \sin\beta)$, wobei $|2.\sin\beta| < 1$

sein müßte? Dies würde weiter bedeuten, daß es bloße Vereinbarung wäre, wo die Trinkwasseranlage zu bauen ist; jeder Ort wäre gleich günstig (wenn nur $|2.\sin\beta| < 1$ erfüllt ist)? Das ist kaum zu glauben. Gleichung (3) drückt etwas anderes aus, aber was nur?

Wir wissen ja bereits aus der obigen Betrachtung einer konkreten - numerischen - Aufgabenstellung, daß es genau eine Lösung gibt! Aber halt, dort haben wir mehr Information angegeben, nämlich auch die Lage der Orte, nicht nur das Kostenverhältnis $a : b$!

Betrachten wir dazu jetzt zwei konkrete Situationen - bloß um ein besseres Gefühl für unsere Problemstellung zu bekommen:

Annahme 1: $a:b = 1:2$, $n_a = 10$km, $n_b = 15$km, $d = 25$km

Annahme 2: $a:b = 1:2$, $n_a = 10$km, $n_b = 15$km, $d = 50$km

#1: Precision := Approximate — User

#2: $$\frac{1 \cdot x}{\sqrt{10^2 + x^2}} = \frac{2 \cdot (25 - x)}{\sqrt{15^2 + (25 - x)^2}}$$ — Sub(#19)

#3: $x = 17.7416$ — Solve(#2)

#4: $$\frac{1 \cdot x}{\sqrt{10^2 + x^2}} = \frac{2 \cdot (50 - x)}{\sqrt{15^2 + (50 - x)^2}}$$ — User

#5: $x = 41.6544$ — Solve(#4)

Aus der grafischen Lösung von #2 (Abb. 5.22, oben) und #4 (Abb. 5.22, unten) sehen wir, daß im gesamten Definitionsbereich (und offenbar auf ganz $\mathbb{R}$) die auftretenden Terme sinnvolle Argumente für die Arcussinusfunktion liefern.

Für die gefundenen Streken x können wir uns nun die zugehörigen Winkel berechnen lassen und anschließend damit Gleichung (3) überprüfen. Dazu definieren wir zuerst geeignete Funktionen $W\alpha(x)$ und $W\beta(x)$.

#6: Angle := Degree User

$$\#7:\quad W\alpha(x) := \text{ASIN}\left[\frac{x}{\sqrt{(10^2 + x^2)}}\right] \qquad \text{User}$$

#8: Wα(17.7416) = 60.5924 User=Simp(User)

$$\#9:\quad W\text{ß}(x) := \text{ASIN}\left[\frac{25 - x}{\sqrt{(15^2 + (25 - x)^2)}}\right] \qquad \text{User}$$

#10: Wß(17.7416) = 25.822 User=Simp(User)

#11: SIN(Wα(17.7416)) = 2·SIN(Wß(17.7416)) User

#12: SIN(60.5924) = 2·SIN(25.822) Approx(User')

#13: 0.871148 = 0.871153 Simp(#11)

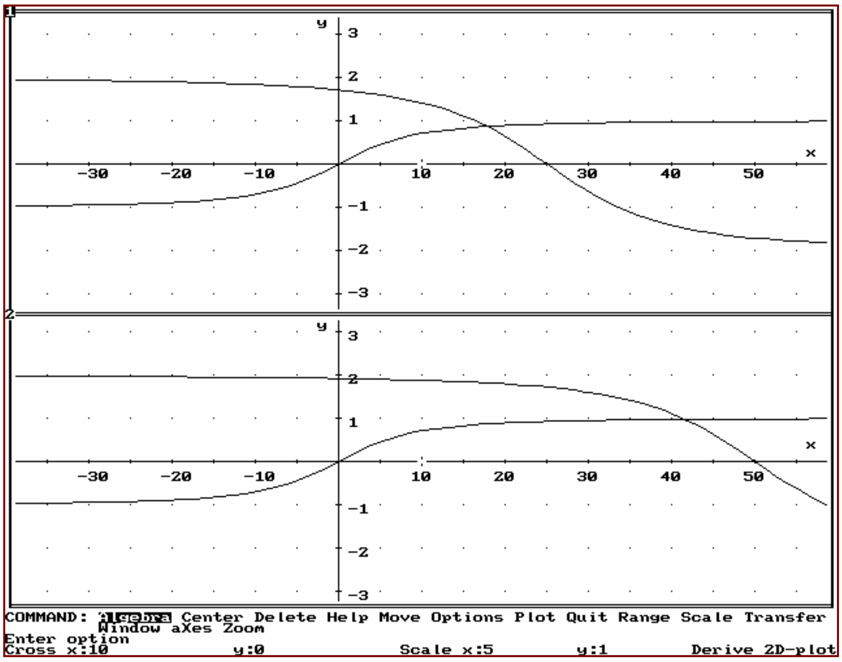


Abb. 5.21:Graphische Lösungen

Um die zweite Lösung (#5) zu überprüfen, muß W(β) neu definiert werden:

$$\#14:\quad W\text{ß}(x) := \text{ASIN}\left[\frac{50 - x}{\sqrt{(15^2 + (50 - x)^2)}}\right] \qquad \text{User}$$

#15: SIN(Wα(41.6544)) = 2·SIN(Wß(41.6544)) User

#16: SIN(76.5004) = 2·SIN(29.0903) Approx(User')

#17: 0.972371 = 0.972377 Simp(#15)

Jetzt sehen wir bereits etwas besser, wie (3) zu lesen ist: Wenn es eine Lösung von (1) gibt, dann ist sie gerade so beschaffen, daß (3) erfüllt ist. Dies ist wiederum trivial, da wir ja (3) aus (1) gefolgert haben. Aber (3) ist eine wesentlich elegantere Darstellung unseres Problems, außerdem sehen wir dadurch, daß es sich offenbar nur um eine andere Einkleidung des aus der Physik bekannten Brechungsgesetzes handelt.

Gleichungen (1) und (3) zeigen aber - wie oben bereits erwähnt - einen wesentlichen Unterschied. (1) beinhaltet alle konkreten Informationen über die Lage der Orte A und B. Diese Informationen gehen beim Übergang von (1) auf (3) offenbar verloren, es bleiben nur mehr Richtungen übrig. Nun vollzieht sich dieser Übergang aber in den Gleichungen:

(4a) $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{n_a^2 + x^2}}$ 37 (4b) $\sin\beta = \frac{d - x}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$ 38

Mit Hilfe von (3) können wir (4b) auch anschreiben als:

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{b} = \frac{d - x}{\sqrt{n_b^2 + (d - x)^2}}$$

Dies versetzt uns in die Lage, Gleichung (1) in eine Gleichung in der Unbekannten α zu transformieren, die aber im Unterschied zu (3) auch die Informationen über die Lage der beiden Orte beinhaltet. Gehen wird dazu wieder von (1) aus und lösen wir (4a) und (4b) nach x auf. Da das CAS #20 nicht nach *x* auflösen kann, formen wir zuerst um:

#18: Precision := Exact User

#19: $\frac{a \cdot x}{\sqrt{(na^2 + x^2)}} = \frac{b \cdot (d - x)}{\sqrt{(nb^2 + (d - x)^2)}}$ User

#20: $\text{SIN}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{(na^2 + x^2)}}$ User

#21: $\left[\text{SIN}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{(na^2 + x^2)}}\right]^2$ User

#22: $\text{SIN}(\alpha)^2 = \frac{x^2}{x^2 + na^2}$ Simp(#21)

Damit erhalten wir die folgenden vier Lösungen:

#23: $x = \frac{na \cdot \text{SIN}(\alpha)}{|\text{COS}(\alpha)|}$ Solve(#22)

#24: $x = - \frac{na \cdot \text{SIN}(\alpha)}{|\text{COS}(\alpha)|}$ Solve(#22)

#25: $x = \infty$ Solve(#22)

#26: $x = -\infty$ Solve(#22)

Bei Gleichung (4b) wollen wir in analoger Weise vorgehen, wobei wir aber (3) verwenden:

$$\#27: \quad \mathrm{SIN}(ß) = \frac{d - x}{\sqrt{(nb^2 + (d - x)^2)}} \qquad \text{User}$$

$$\#28: \quad \frac{a \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{b} = \frac{d - x}{\sqrt{(nb^2 + (d - x)^2)}} \qquad \text{User}$$

$$\#29: \quad \left[\frac{a \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{b} = \frac{d - x}{\sqrt{(nb^2 + (d - x)^2)}}\right]^2 \qquad \text{User}$$

$$\#30: \quad \frac{a^2}{2 \cdot b^2} - \frac{a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot b^2} = \frac{(x - d)^2}{x^2 - 2 \cdot d \cdot x + d^2 + nb^2} \qquad \text{Simp(\#29)}$$

Wieder erhalten wir vier Lösungen:

Solve(#30)

$$\#31: \quad x = \frac{a \cdot nb \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha))} + d \cdot \sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}{\sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}$$

Solve(#30)

$$\#32: \quad x = \frac{d \cdot \sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)} - a \cdot nb \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha))}}{\sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}$$

$$\#33: \quad x = \infty \qquad \text{Solve(\#30)}$$

$$\#34: \quad x = -\infty \qquad \text{Solve(\#30)}$$

Die sinnvollen Lösungen (#23,#24 und #31,#32) liefern vier Gleichungen:

User

$$\#35: \quad \frac{na \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{|\mathrm{COS}(\alpha)|} = \frac{a \cdot nb \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha))} + d \cdot \sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}{\sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}$$

User

$$\#36: \quad \frac{na \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{|\mathrm{COS}(\alpha)|} = \frac{d \cdot \sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)} - a \cdot nb \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha))}}{\sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}$$

User

$$\#37: \quad - \frac{na \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)}{|\mathrm{COS}(\alpha)|} = \frac{a \cdot nb \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha))} + d \cdot \sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}{\sqrt{(a^2 \cdot \mathrm{COS}(2 \cdot \alpha) - a^2 + 2 \cdot b^2)}}$$

User

$$\#38: -\frac{na\cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{d\cdot\sqrt{(a^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - a^2 + 2\cdot b^2)} - a\cdot nb\cdot\sqrt{(1 - COS(2\cdot\alpha))}}{\sqrt{(a^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - a^2 + 2\cdot b^2)}}$$

Eine Kontrollrechnung zeigt schnell, daß offenbar nur #36 die für die Problemstellung zutreffende Gleichung ist:

Sub(#36)

$$\#39: \frac{10\cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{25\cdot\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)} - 1\cdot 15\cdot\sqrt{(1 - COS(2\cdot\alpha))}}{\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)}}$$

$\#40: \alpha = 60.5924$ Solve(#39)

Sub(#36)

$$\#41: \frac{10\cdot SIN(\alpha)}{|COS(\alpha)|} = \frac{50\cdot\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)} - 1\cdot 15\cdot\sqrt{(1 - COS(2\cdot\alpha))}}{\sqrt{(1^2\cdot COS(2\cdot\alpha) - 1^2 + 2\cdot 2^2)}}$$

$\#42: \alpha = 76.5004$ Solve(#41)

Von einer weiteren Interpretation der übrigen Gleichungen bzw. von deren Lösungen soll hier abgesehen werden.

Damit haben wir unsere (teilweise selbst gestellte) Aufgabe vollständig gelöst:

- Wollen wir die Lage von C über die Normalabstände zur Küste und mittels anschließender Abmessung entlang der Küste angeben, so bedienen wir uns Gleichung (1).
- Wollen wir die Lage von C über Winkel angeben, so können wir mit (1) diese ausrechnen oder Gleichung #36 lösen (lassen).

Egal was wir machen, Gleichung (3) wird immer erfüllt sein.

Wir wollen noch ein wenig auf die 'Verwandtschaft' mit dem Brechungsgesetz eingehen. Diese zeigt sich darin, daß wir den linken Teil unserer Skizze „nach oben klappen“ - unser Problem also etwas anders ansehen.

Bekanntlich bewegt sich ein Lichtstrahl gerade so, daß er in der kürzestmöglichen Zeit von A nach B kommt. Mathematisch formuliert muß daher

$$t(x) = \frac{1}{v_a}\cdot l_a + \frac{1}{v_b}\cdot l_b$$

minimal werden.

v_a ... Geschwindigkeit im Medium, in dem A liegt.

v_b ... Geschwindigkeit im Medium, in dem B liegt.

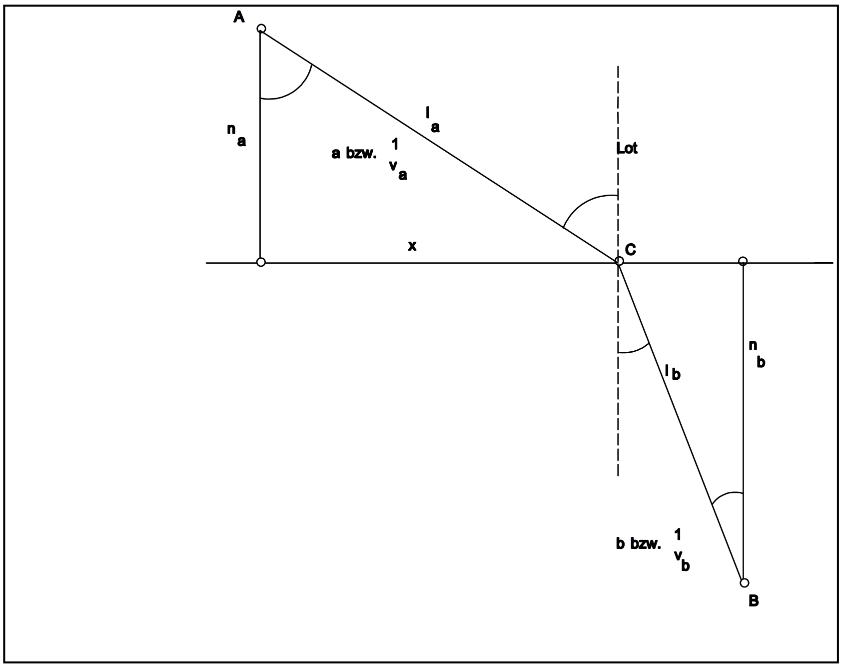


Abb. 5.22: Brechungsgesetz

Wenn wir mit $K(x) = a.l_a + b.l_b$ vergleichen, sehen wir, daß die Leitungskosten *a*, *b* den Kehrwerten der Ausbreitungsgeschwindigkeiten v_a, v_b entsprechen ($a \triangleq 1/v_a$, $b \triangleq 1/v_b$). Gleichung (3) wird damit wirklich zum Brechungsgesetz:

$$\sin\alpha : \sin\beta = b : a = \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_a} = v_a : v_b$$

(Die Sinuswerte des Einfalls- und Brechungswinkels verhalten sich wie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den betreffenden Medien.)

Physikalisch formuliert lautet unser ursprüngliches Problem damit so: „In welche Richtung, auf welchen Punkt der Grenzfläche (z.B. der Wasseroberfläche) muß ich von A aus mit einem Lichtstrahl zielen (wenn *a, b* bzw. v_a, v_b vorgegeben sind), damit ich genau den Punkt B treffe?“

Gleichung #36 beantwortet diese Frage vollständig.

Dieses Beispiel soll zeigen, was wir unter Übungen zur Ausbildung mathematischer Fähigkeiten verstehen: Insbesondere den Versuch Aufgaben, Beispiele und Problemstellungen „breiter“ anzugehen, so daß

- alle drei Phasen (Phase der Mathematisierung, Kalkülphase und Interpretationsphase) durchlaufen werden und
- die Einbettung in einen größeren Problem- und Themenkontext sichtbar wird.

5.3.2. Zur Notwendigkeit des Testens

Da der CAS-unterstützte Unterricht die Möglichkeit bietet, bearbeitete Strukturen jederzeit zur Verfügung zu haben, Parameter, definierte Funktionen und Konstanten zu variieren, erscheint es als natürlich, eine Vielzahl von Untersuchungen, Überprüfungen von Sonderfällen und Fallunterscheidungen durchzuführen. Dies ermöglicht es, die Auswirkungen der Veränderung von Größen mit wenig Zeitaufwand zu beobachten und Vermutungen rasch zu testen. Speziell ist das Testen von 'fertigen' Funktionen, die für spätere Anwendungen erzeugt wurden, notwendig. Dabei sind verschiedene Formen möglich:

- *Selbsttests:* Die Schüler entwickeln ein Modul und überprüfen es anhand von Testbeispielen, die vom Lehrer vorgegeben werden. Der Schüler führt diese Tests durch und erhält Rückmeldungen, ob seine Planung und seine Implementation des Moduls im CAS diesem Testmaterial standhält. Liefern diese Rückmeldungen nicht das gewünschte Ergebnis, muß die Fehlersuche beginnen. Ein neuer Versuch wird gestartet, bis die Tests befriedigend verlaufen.
- *Fremdtests:* Ein Modul, eine Funktion, ein Ablauf wird nicht vom Erzeuger, sondern von einem oder mehreren 'Außenstehenden' überprüft und getestet. Diese Tests können wieder vorgegeben oder vom Tester weiterentwickelt und verfeinert werden. Dieses Arbeiten mit einem fremden Produkt stellt eine Möglichkeit dar, selbst Erzeugtes anderen zu übergeben und Rückmeldungen über die Anwendbarkeit zu erhalten. Solche Fremdtests haben die Aufgabe, Ausgaben zu analysieren und auf Brauchbarkeit zu überprüfen. Bei auftretenden Problemen und Fehlern werden diese genau beschrieben (z.B. Ausdruck und Erklärung) und dem Erzeuger für den eigenen Umgang rückvermittelt. Im Unterricht führt diese Vorgangsweise zum verstärkten Sprechen über Mathematik und zum sozialen Lernen, also eigene Produkte werden fremder Kritik ausgesetzt, um Veränderungen und Modifikationen durchführen zu können. Es handelt sich dabei um ein allgemeines Lernziel, welches mit dem CAS eher unterstützt werden kann als im 'herkömmlichen Unterricht'.
- *Offene Tests:* Diese Art des Testens wird aus unserer Erfahrung seltener sinnvoll eingesetzt werden können, da es für den Schüler sehr schwer ist, eine Serie von Tests so durchzuführen, daß eine systematische Abklärung erfolgt. Meist werden diese Tests 'halb offen' sein müssen. Der Lehrer gibt einen Testrahmen vor, der/die Schüler bewegen sich innerhalb dieses Bereichs möglichst frei. Trotzdem sollten auch Versuche an einzelnen Stellen des Unterrichts zugelassen werden, um diese Qualifikation zu heben oder die Probleme und Zugänge einer gemeinsamen Diskussion zu stellen.
- *Finde bewußt erzeugte Fehler:* Bei dieser Vorgangsweise können bei einer Funktion (bei einem Modul) Ungenauigkeiten, falsche Fallunterscheidungen oder fehlende Auflösungsfälle entweder vom Lehrer eingebaut werden oder konkrete Schülerbeispiele Verwendung finden. Wird der Fehler vom Lehrer angekündigt, zeigt sich aus unserer Erfahrung bei Schülern eine hohe Motivation, diese Unzulänglichkeit aufzufinden. Wieder ist die Darstellung und Beschreibung von Bedeutung.

Der Schüler hat also die Möglichkeit, seine mathematischen Produkte zu überprüfen, muß nicht Fertiges und Vorgegebenes nachträglich reflektieren. Dieser Grad der Unmittelbarkeit erscheint aus lernpsychologischer Sicht von Vorteil. Wieder ist es eine Illusion zu glauben, diese Vorgangsweise könnte immer im Unterricht durchgehalten werden, jedoch sollten spezielle Testphasen in das Unterrichtsgeschehen eingebaut sein.

Beispiel 5.22 Berechnung von Fehlerschranken

Wenn das Definieren von Funktionen den Schülern allgemein bekannt ist, werden, häufig auf Schülerwunsch, bestimmte Tätigkeiten, die oftmals durchgeführt werden, als fertige Funktionen definiert und für die Anwendung bei konkreten Aufgabenstellungen ausgewertet (Modulprinzip). Es kann schon sehr früh begonnen werden auf diese Art einfache Formelsammlungen zu erstellen. Der Lehrer muß jedoch darauf achten, daß jeder Schüler seine Funktionen *selbst erstellt*. Bei der Entwicklung der Fähigkeit, selbst geeignete Funktionen zu definieren, bedarf es jedoch einer geeigneten Planung des Lehrers. Bei den vorgestellten Funktionen handelt es sich um Berechnungsvorgänge beim Ermitteln von Schranken bei Meßfehlern oder Ungenauigkeiten. Es werden die **IF**-Funktion und ein geeignetes Wissen über mehrparametrige Funktionen benötigt. Darüber hinaus müssen die Grundgesetze über Ungleichungen bekannt sein und die untersuchten Schrankenberechnungen allgemein hergeleitet (eventuell auch bewiesen) werden. Bei diesem Funktionen mußten die Schüler zuerst Struktogramme erstellen, mit denen sie die Planung durchführten. Erst danach wird mit dem CAS vom Schüler das Modul erzeugt. Es könnte etwa so aussehen:

```
#1:   "MODUL: UUNGL"                                        User
#2:   "5.C BG/BRG Stockerau (C) 1995"                       User
#3:   InputMode := Word                                     User
#4:   CaseMode := Sensitive                                 User
#5:   "Berechnung von Fehlerschranken! Voraussetzung: Alle
       eingegebenen Schranken müssen positiv sein !!!!!"    User
```

```
#6:  "-----------------KEHRWERT---------------------------"   User
#7:  "Bildet den Kehrwert der Ungleichung a <= x <= b"        User

User
#8: KEHRWERT(a,x,b):=IF⎡a>b,"Fehler:untere Schranke>obere
                       ⎣                                Schranke!",

          IF⎡a ≤ 0 OR b ≤ 0, "Fehler: Schranke(n) nicht positiv",
            ⎣
             1     1     1 ┐                                   ┐
            ─── ≤ ─── ≤ ───│, "Fehler: Variable(n) eingegeben" │
             b     x     a ┘                                   ┘


#9:  "-----------------SUBTRAKTION-----------------------"    User
User
#10: "Subtrahiert 2 Ungleichungen der Form a<=x<=b und c<=y<=d"  User
#11: SUB2UNGL(a, x, b, c, y, d) := IF(a > b OR c > d,
      "Fehler: untere Schranke(n) > obere Schranke(n)",
       IF(a ≤ 0 OR b ≤ 0 OR c ≤ 0 OR d ≤ 0,
       "Fehler: Schranke(n) nicht positiv",
       a - d ≤ x - y ≤ b - c),
       "Fehler: Variable(n) eingegeben!")
```

Auch vom Lehrer wird die Funktion SUB2UNGL und KEHRWERT programmiert. Getestet werden dabei z.B. folgende Situationen:

- Die Tauglichkeit bei richtiger Eingabe von Schranken.
- Es wurde auch zugelassen, daß jede Schranke genau gegeben ist.
- Negative Werte können ausgegeben werden.
- Jede untere Schranke muß kleiner oder gleich der oberen Schranke sein.
- Die Schranken sollen keine Variablen sein.
- Die einzugrenzenden Werte dürfen beliebige Terme sein.
- Die Funktionen müssen nacheinander ausgeführt werden können.
- Ausgaben einer Funktion sollen von der nächsten Funktion bearbeitet werden können.

Das vom Lehrer vorgegebene Testblatt:

```
#1:  "-----------------Testbeispiele-------------------" User

#2:  "-------------SUBTRAKTION----!!!!!!!-------------" User

#3:  SUB2UNGL(4, x, 8, 2, y, 3)                          User
#4:  1 ≤ x - y ≤ 6                                   Simp(#3)

#5:  SUB2UNGL(7.5, x, 7.5, 4, y, 6)                      User
      3             7
#6:  ─── ≤ x - y ≤ ───                               Simp(#5)
      2             2

#7:  SUB2UNGL(2, x, 5, 4, y, 8)                          User
#8:  -6 < x - y < 1                                  Simp(#7)

#9:  SUB2UNGL(7, x, 5, 4, y, 8)                          User
#10: "Fehler: untere Schranke(n)>obere Schranke(n)"  Simp(#9)

#11: SUB2UNGL(-2, x, 5, 4, y, 8)                         User
#12: "Fehler: Schranke(n) nicht positiv"            Simp(#11)

#13: SUB2UNGL(2, x, 5, 4, y, c)                          User
#14: "Fehler: Variable(n) eingeben!"                Simp(#13)
```

#15: SUB2UNGL$\left[8.4,\ \frac{1}{x},\ 8.5,\ 2.9,\ \frac{1}{y},\ 3\right]$ User

#16: $\frac{27}{5} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < \frac{28}{5}$ Simp(#15)

#17: SUB2UNGL(8.4, a + c, 8.5, 2.9, a - c, 3) User

#18: $\frac{27}{5} < 2\cdot c < \frac{28}{5}$ Simp(#17)

#19: "________Vermischung von zwei Modulen!__________" User

#20: KEHRWERT(2, c, 5) User

#21: $\frac{1}{5} \le \frac{1}{c} \le \frac{1}{2}$ Simp(#20)

#22: KEHRWERT(3, d, 3.4) User

#23: $\frac{5}{17} \le \frac{1}{d} \le \frac{1}{3}$ Simp(#22)

#24: SUB2UNGL$\left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{17},\ \frac{1}{d},\ \frac{1}{3}\right]$ User

#25: $-\frac{2}{15} < \frac{1}{c} - \frac{1}{d} < \frac{7}{34}$ Simp(#24)

Der Schüler muß nun die von ihm erstellte Funktion SUB2UNG anhand des Lehrertestblatts überprüfen. Bei auftretenden Abweichungen muß der Schüler die Funktion hinterfragen und neu bearbeiten. Nach diesem Selbsttest muß die Funktion von zwei weiteren (neutralen) Schülern überprüft werden. Erst dann wird die neue Funktion in das File UUNGL übernommen.

Der Lehrer hat nach der Erstellung oder Erweiterung dieser Funktionen das Recht (auch die Pflicht?) diese fertigen Module zu hinterfragen. D.h., der Schüler muß in der Anwendungssituation nicht nur über die Funktionalität des Moduls, sondern auch über seinen Aufbau Auskunft geben können.

Dazu ein Beispiel aus einer Schularbeit der neunten Schulstufe. Das Ziel ist die Erklärung des Zustandekommen der Funktion SUB2UNGL aus UUNGL:

Erstelle eine Struktogramm für die definierte Funktion SUB2UNGL(a,x,b,c,y,d), wenn folgende Voraussetzungen gelten sollen: a,b,c,d $\varepsilon\ \mathbb{R}^+$ *. Diese Funktion soll die Schranken für das Subtrahieren der Ungleichungen* $a \le x \le b$ *und* $c \le y \le d$ *ausgeben und dem Benützer Rückmeldungen bei Eingabefehlern ausgeben. Erkläre die richtige Ausgabe bei korrekter Eingabe.*

Derart entwickelte und getestete Module können nun zur Verwendung bei künftigen Aufgaben zur Verfügung stehen. Hier ein Beispiel für die Anwendung der in UUNGL definierten Funktionen. Bei der Bearbeitung wurde das MTH-File UUNGL mit **Transfer Load Utility** versteckt geladen:

Der Preis einer Ware beträgt zu Beginn eines Jahres: $K_1 = 6700,-$ *S*

Der Preis am Ende des Jahres ist festgelegt durch: $K_2 = 7060,-$ *S*

Die Preissteigerungsrate ist gegeben durch:

$$r = \frac{K2 - K1}{K}1$$

a) *Gib die Fehlerschranken für r an, wenn bei* K_1 *und* K_2 *mit einem Fehler von 2 % gerechnet wird. Welche Aussagekraft haben diese Schranken für Dich?*

b) *Um wieviel % weicht die untere Schranke für r vom Wert ohne Fehler ab?*

5.4. Auswirkungen auf die Prüfungssituation

Auf vielerlei Art und Weise beeinflussen CAS den Mathematikunterricht. Nimmt man CAS als Hilfsmittel und als Bereicherung des Unterrichts ernst, so muß sich dies auch auf die Prüfungssituation auswirken.

Wir gehen hier davon aus, daß durch CAS nicht die bisher als sinnvoll und erstrebenswert angesehenen Ziele des Mathematikunterrichts in Frage gestellt werden. CAS

- ermöglicht aber eine andere Schwerpunktsetzung und
- bietet verbesserte Voraussetzungen zur Erreichung der „alten“ Ziele.

Was sind aber diese „alten“ Ziele? Für Weigand [MNU 46/7,S.428], der sich selbst z.B. auf Bigalke und Fischer beruft, steht folgender Kanon allgemeiner Lernziele außer Frage:

- Probleme lösen lernen
- heuristische Strategien kennenlernen
- Mathematisieren lernen
- Begriffe bilden lernen
- Beweise lernen
- algorithmisches und kalkülhaftes Arbeiten kennenlernen

Spiegeln sich diese Ziele wirklich im Rahmen der Leistungsbeurteilung wider? Aus vielerlei Gründen (etwa aus falsch verstandenem Objektivitätsdenken, der leichteren „Abprüfbarkeit“ halber, leicht zugänglichen - aber oft einseitig an Techniken orientierten - Übungsmaterials wegen) steht hauptsächlich kalkülhaftes Arbeiten im Vordergrund. Völlig unabhängig von der Existenz von CAS erscheint der Prüfungsalltag häufig verzerrt, wenn man das, was verlangt wird, im Spiegel oben aufgezählter allgemeiner Lernziele betrachtet.

Wie bereits im Zusammenhang mit der Thematik des Üben erläutert, wird dieser Zustand aber nun dadurch verschärft, daß eben vieles, was bisher - insbesondere bei schriftlichen Arbeiten - abgefragt wurde, durch den Einsatz (bzw. vielfach bereits durch das bloße Vorhandensein) von CAS an Wert verliert. Und gerade Fertigkeiten im Zusammenhang mit Kalkülen sind davon betroffen. Ob man damit glücklich sein mag oder nicht: Zurecht werden hier in der Diskussion Termumformungen, das Lösen von Gleichungen, Ableitungs- und Integrationsregeln, das Erstellen von Funktionsgraphen erwähnt. Heißt dies aber, daß Kalküle nun wertlos werden, daß wir in Zukunft „Mathematik ohne Rechnen“ betreiben? Oder wie W.Blum es ausdrückte: Computer (insbesondere natürlich CAS) sind "wie Scheinwerfer, sie richten ihr Licht auf die Kalküle und fragen unerbittlich nach ihrem Bildungswert".

Am Beispiel von Schularbeiten soll gezeigt werden, daß Veränderungen hin zu den lange geforderten Zielen möglich sind. Wir plädieren hier für eine evolutionäre Entwicklung, bei der von den bisherigen Formen der Leistungsbeurteilung ausgegangen wird und aus den sich mit CA-Einsatz ergebenden Erfahrungen Vorschläge für künftige Leistungsmessung erarbeitet werden.

5.4.1. Die veränderte Arbeitsweise bei Klassenarbeiten

Bei den ersten CAS-unterstützen Schularbeiten gab es bei verschiedenen Lehrern sehr unterschiedliche Vorgangsweisen:

(1 Jeder Schritt muß mit dem verwendeten Befehl im Heft dokumentiert werden.

(2) Die wichtigen Zwischenschritte und Formeln müssen auch im Arbeitsheft dokumentiert werden, Antworten kommen ausnahmslos in das Heft.

(3) Der Schüler hat das Recht, die Antworten im MTH-File anzugeben. Ein Heft ist unnötig.

(4) Der Schüler benötigt keine Arbeitsdiskette, da bei vorhandenem Netzwerk ein eigenes Userverzeichnis zur Verfügung steht, in welches die Files gespeichert werden. Der Schüler muß sein File selbst ausdrucken.

(5) Der Schüler bestätigt mit dem Abgeben seiner Diskette, daß alle seine Files auf der Diskette vorhanden sind.

(6) Der Lehrer sammelt die Arbeitsdisketten ein und druckt selbst aus.

(7) Der Lehrer benötigt keinen Ausdruck, bei offenen Fragen wird das File geladen.

Jeder Lehrer wird hier sein eigenes Modell finden müssen, das seinen und den Bedürfnissen der Schüler entspricht. Jedoch hat sich gezeigt:

(1) führt zu einer Verdopplung der Arbeit und wird von den Schülern abgelehnt, da sie das Gefühl haben, daß es ein Nachteil ist.

(2) wird von vielen Lehrern verwendet.

(3) Dieses Modell läßt dem Schüler keine freie Wahl der verwendeten Mittel (Taschenrechner, Kopfrechnen, händisches Zeichnen etc.)

(4) führt zu organisatorischen Problemen. Die Netzwerke werden an fast jeder Schule in jeder Stunde benötigt, der Lehrer hat keine Zeit, die Files zu sichern. Andererseits muß ein Original der Arbeit eines Schülers jederzeit vorhanden sein. Die Leistung des Schülers muß dokumentiert sein.

(5) Selbstkontrolle ist ein geeigneter Weg.

(6) Wird von vielen Lehrern - unter Inkaufnahme eines beträchtlichen Mehraufwands bei der Korrektur- durchgeführt. Wenn Graphen beschriftet und erklärt werden sollen, dann ist ein Ausdruck günstig. Dies tritt jedoch meist erst in höheren Schulstufen auf.

(7) Solange DERIVE als Rechenhilfe verwendet wird, ist das ein gangbarer Weg. Jedoch wird bei vielen Beispielen der Zugang, das Modellbilden, die Vorgangsweise zur Problemlösung von Bedeutung sein, so daß ein Ausdruck erforderlich ist. Daneben haben die Erziehungsberechtigten das Recht, die Arbeit ihres Kindes einzusehen.

Dies sind einige Ansätze, die sich im Rahmen des DERIVE-Projekts im Zusammenhang mit schriftlichen Prüfungsarbeiten ergeben haben. Ein Problem, das Damoklesschwert des Stromausfalls, wenn in einem EDV-Saal gearbeitet wird, wird aller Voraussicht beim Arbeiten mit dem CA-Taschenrechner nicht mehr auftreten. Um technischen Problemen mit Geräten handhaben zu können, ist es aber auch in Zukunft unerläßlich, ein oder mehrere Ersatzgeräte zur Verfügung zu haben.

5.4.2. Prüfungssituation in der 7. und 8. Schulstufe - Vergleichstechniken

Abhängig von der Anzahl der Unterrichtsstunden pro Woche im Informatiksaal und der Ausrüstung der Schule mit Computergeräten sind verschiedenste Modelle für Klassenarbeiten durchführbar. Werden in der 7. und 8. Schulstufe nur ein Teil der Mathematikstunden im Computerraum gehalten, so können bei den Schularbeiten auch nur Teile der Lernziele mit Unterstützung durch das CAS überprüft werden. Es ist auch zu beachten, ob die Schüler in der Übungssituation zu Hause das CAS verwenden können.

Unter der Voraussetzung, daß die Schüler eine eigene Lizenz des CAS besitzen und eine Stunde pro Woche im Informatiksaal arbeiten, kann ein Beispiel auch mit Hilfe des CAS bearbeitet werden. Die Auswahl und Gestaltung der Beispiele hängt auch von der Anzahl der vorhandenen Geräte und der räumlichen Beschaffenheit des Computerraumes ab. Üblicherweise wird es bei einer Klassenarbeit bei großer Schülerzahl (25 - 30 Schüler) zwei Gruppen gegeben. Es ist zu beachten, daß die Beispiele unterschiedlich gestaltet werden, so daß die Gefahr eines 'Abschauens' vom Bildschirm nicht möglich ist.

Im Folgenden soll eine Aufgabenstellung für eine Klasse der 7. Schulstufe mit Schwerpunkt Informatik vorgestellt werden. Die Schüler hatten von vier Unterrichtsstunden eine Stunde im Informatiksaal. Als Voraussetzung sei erwähnt, daß ähnliche Beispiele (siehe Kap. 3.5.2) in der Übungssituation durchgeführt wurden. Die Schüler kannten die Flächenformel eines gleichschenkeligen Trapezes noch nicht. Im Computerraum standen 15 Geräte zur Verfügung und die Schüler waren es gewohnt, zu zweit an einem Gerät zu arbeiten und zur Bearbeitung des Beispiels während der Klassenarbeit das Gerät zu wechseln. Jeder Schüler hatte dadurch das Gerät ca. 25 Minuten zur freien Verfügung. Es durfte bzw. mußte jedoch nur dieses Beispiel mit DERIVE bearbeitet werden.

Bespiel 5.23: Prüfungsaufgabe aus einer 7. Schulatufe

Die Angabe des ersten Beispiels der Gruppe A, die Schularbeit hatte vier Aufgabenstellungen, hatte folgenden Wortlaut (die zweite Gruppe hatte eine ähnliche Aufgabe mit anderen Bezeichnungen für die Seiten und die Höhe):

Gegeben ist ein gleichschenkeliges Trapez. Die Parallelseiten heißen f und g, die Schenkel c und die Höhe m.

Gib vier verschiedene Möglichkeiten für die Berechnung des Flächeninhalts A an. Eine Formel für A muß durch Zerlegung des Trapezes in zwei Dreiecke hergeleitet werden!

Zeichne die Vorgangsweise in das Beiblatt ein! Vereinfache Deine gefundene Formel mit DERIVE und überprüfe, ob Deine vereinfachten Formeln übereinstimmen.

Speichere unter dem Namen SA6BSP1 ab !

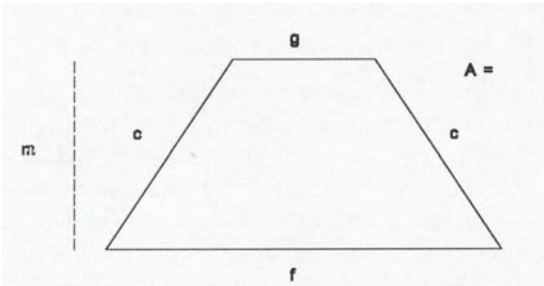


Abb. 5.23: Gleichschenkeliges Trapez

Die Beilage zeigte vier gleichschenkelige Trapeze, bei denen nur die Seiten, jedoch nicht die Höhe beschriftet waren.

Die Lernziele, die bei dieser Aufgabenstellung überprüft wurden, waren mehrschichtig:

(1) Anwendung bereits gelernter und gefestigter Fertigkeiten zur Berechnung von Flächeninhalten einzelner geometrischer Figuren (Dreieck, Rechteck, Parallelogramm, Rhombus, Deltoid).

(2) Zerlegen einer Fläche in Teilflächen oder Vervollständigen von Flächen zu bereits bekannten. Das Arbeiten mit Bleistift und Lineal wird also überprüft.

(3) Zusammensetzen von Teilflächen oder Erkennen der Größe des gesuchten Flächeninhalts, bezogen auf eine über den Flächeninhalt hinausgehende andere geometrische Figur.

(4) Eingabe der gefundenen Formel in ein CAS.

(5) Entwickeln oder Durchführen von Vergleichstechniken, mit denen nachgewiesen werden kann, daß die vier Formeln denselben Flächeninhalt beschreiben.

Für den Einsatz des CAS sind nur die Punkte (4) und (5) von Interesse.

An dieser Schularbeit nahmen 27 Schüler teil. Das Wechseln des Geräts verlief problemlos, nach Beendigung der Bearbeitung des Beispiels hatte der Schüler das File abzuspeichern und aus DERIVE auszusteigen, wodurch das Gerät für den zweiten Schüler frei wurde. Das Aussteigen ist auch deshalb von Bedeutung, weil jeder Schüler eigene Einstellungen verwendet, die mit **Transfer Clear** (also Bildschirm löschen) erhalten bleiben. Dadurch wird die gewohnte Arbeitsumgebung für den zweiten Schüler verändert. Von 108 möglichen Versuchen, den Flächeninhalt durch eine Formel zu bestimmen, waren 97 vorhanden, jedoch 12 falsch. Der häufigste Fehler bei den falschen Ansätzen (im Beiblatt war die Höhe nicht eingezeichnet) war die Verwendung der Schenkelbezeichnung *c* als Höhe. Bei den 11 fehlenden Versuchen war meist das Zerlegen in zwei Dreiecke das Problem.

Die Schüler entwickelten 17 verschiedene Wege zur Erstellung der Formel, die jeweils einen neuen Aspekt betrachteten. Diese Vielfalt ist überraschend, da im Unterricht nie eine solche Anzahl von Zugängen aufgezeigt wurde.

Hervorzuheben ist, daß einige Schüler, erstaunlich für diese Altersstufe, das Trapez in flächengleiche Figuren umwandelten, die nicht mehr durch Abschneiden und Umlegen, sondern durch Erzeugen von flächengleichen Dreiecken, die jedoch nicht mehr dieselbe Gestalt haben, den Flächeninhalt berechneten. Des weiteren gab es

Ansätze, bei denen neue Variablen eingeführt wurden, etwa das Einzeichnen zweier Deltoide mit neuer halber Diagonale oder die Vervollständigung zu einem Dreieck mit neuer Höhe. Die letzen Versuche konnten zwar noch in DERIVE eingegeben, jedoch durch die auftretenden Variablen nicht mehr mit den anderen verglichen werden.

Zu (4): Die lineare Eingabe bei DERIVE (wie auch beim Taschenrechner) zwingt die Schüler, ihre zweidimensional geschriebene Formel in eine korrekte eindimensionale Eingabe zu übersetzen. Sie müssen also die Rechenvorrangregeln genau beachten. Der Vorteil des CAS liegt darin, daß der eingegebene Term zweidimensional im Algebrafenster dargestellt wird (z.B. #2). Es läßt sich nicht nachweisen, wie viele Formeln falsch eingegeben wurden, jedoch traten bei der Auswertung der Schularbeit drei Eingabefehler mit falschen Klammern auf!

Die meisten Schüler verwendeten eine zweidimensionale Darstellung der Formeln und verschiedene Arten von Klammern (runde, eckige, geschwungene), um den Rechenvorrang festzulegen.

Kein Schüler hatte ein Problem mit der Tatsache, daß DERIVE nur runde Klammern für die Eingabe von Termen zuläßt, obwohl die Formeln oft mehrere Typen von Klammern aufwiesen.

Einige Schüler jedoch hatten sich schon auf die lineare Eingabe von DERIVE eingestellt und die Formel bereits auf dem Beiblatt entsprechend dargestellt. Scheinbar beeinflußt das Mittel, mit dem die Bearbeitung durchgeführt wird, die Planung.

Es läßt sich jedoch feststellen, daß die Möglichkeit einer großen Anzahl von unterschiedlichen Darstellungsformen von Termen und die Möglichkeit, diese Darstellungen schnell umzuformen, Schüler flexibel im Umgang mit Termen macht.

Nun einige Beispiele:

Weg 1: Durch ein kongruentes Trapez wird ein Parallelogramm erzeugt - die gesuchte Fläche hat den halben Flächeninhalt dieses Parallelogramms.

#1: $\frac{(f + g)\cdot m}{2}$ User

Wird dieselbe Formel ohne Klammern eingegeben, erscheint der folgende falsche Ausdruck:

#2: $f + \frac{g\cdot m}{2}$ User

Weg 2: Durch Zerteilung des Trapezes in zwei Dreiecke mit gleicher Höhe - die gesuchte Fläche ist die Summe der Dreiecksflächen.

#3: $\frac{f\cdot m}{2} + \frac{g\cdot m}{2}$ User

Weg 3: Ein Dreieck wird auf einer Seite abgeschnitten und durch Umlegen und 'Ankleben' auf der anderen Seite des Trapezes ein Rechteck erzeugt - der gesuchte Flächeninhalt wird durch Länge und Breite festgelegt.

#4: $\frac{f + g}{2}\cdot m$ User

Weg 4: Das Trapez wird in ein Rechteck und zwei (flächengleiche) Dreiecke zerlegt - die Gesamtfläche ist die Summe der drei Flächeninhalte.

#5: $g\cdot m + 2\cdot\dfrac{\dfrac{f - g}{2}\cdot m}{2}$ User

Zu (5): Im Kap.3.5 wurden verschiedene Techniken vorgestellt, die wir als Vergleichstechniken bezeichnen. Die meisten Schüler wählten die Technik des Überführens in gleich aussehende Ausdrücke mit **Factor**, **Expand**, **approX** oder vermischtes Anwenden dieser drei Optionen (12 Schüler).

#6: $\dfrac{m\cdot(f + g)}{2}$ Fctr(#1)

#7: $\dfrac{m\cdot(f + g)}{2}$ Fctr(#3)

#8: $\dfrac{m\cdot(f + g)}{2}$ Fctr(#4)

#9: $\dfrac{m\cdot(f + g)}{2}$ Fctr(#5)

Fünf Schüler verglichen jeweils 2 Formeln durch Gleichsetzen. Mit den DERIVE-Optionen wurde die Gleichheit nachgewiesen.

#10: $\dfrac{(f + g)\cdot m}{2} = \dfrac{f\cdot m}{2} + \dfrac{g\cdot m}{2}$ User

#11: $\dfrac{f\cdot m}{2} + \dfrac{g\cdot m}{2} = \dfrac{f\cdot m}{2} + \dfrac{g\cdot m}{2}$ Expd(#10)

#12: $\dfrac{f + g}{2}\cdot m = g\cdot m + 2\cdot\dfrac{\dfrac{f - g}{2}\cdot m}{2}$ User

#13: $\dfrac{f\cdot m}{2} + \dfrac{g\cdot m}{2} = \dfrac{f\cdot m}{2} + \dfrac{g\cdot m}{2}$ Expd(#12)

Eine Schülerin erzeugte eine Gleichungskette. Eine Formel war beim ersten und zweiten Versuch falsch. Die Schülerin schaffte es jedoch, durch Überlegungen am Beiblatt eine geeignete vierte Formel zu finden und die Kette in eine Form a=a=a=a, zu überführen (siehe Kap. 3.1, Beisp. 3.6).

Ein Schüler erzeugte ebenfalls eine Gleichungskette, bearbeitete diese jedoch mit Äquivalenzumformungen soweit, bis 0=0=0=0 entstand.

Drei Schüler definierten die Flächen und verwendeten danach eine Vergleichstechnik.

```
#22: InputMode := Word                                  User
#23: CaseMode := Sensitive                              User
```

#24: $A1 := \dfrac{(f + g)\cdot m}{2}$ User

```
             f·m     g·m
#25: A2 := ───── + ─────                                  User
              2       2

#26: A1 = A2                                              User

      m·(f + g)     m·(f + g)
#27: ─────────── = ───────────                   Fctr(#26)
          2             2
```

Ein Schüler testete seine Formeln mit konkreten Zahlen für *f*, *g* und *m*. Diese Technik ist zwar eine Überprüfung, jedoch kein Nachweis.

```
#28: f := 8                                               User
#29: g := 5.4                                             User
#30: m := 2.3                                             User
#31: 15.41                                          Approx(#1)
#32: 15.41                                          Approx(#3)
#33: 15.41                                          Approx(#4)
#34: 15.41                                          Approx(#5)
```

Die verbleibenden sieben Schüler hatten entweder Zeitprobleme, so daß nicht alle Formeln eingegeben werden konnten, oder falsche Variablenbezeichnungen, so daß der Vergleich scheiterte. Dabei wurden verschiedene der schon angeführten Techniken verwendet.

Kein Schüler verwendete die Technik: Differenz zweier Formeln ist 0.

Zusammenfassung:

Im CAS kann ein Sachverhalt sehr schnell auf die unterschiedlichsten Arten dargestellt werden. Dabei können die Strukturen verschiedener Terme leicht interpretiert werden. Es ist möglich, in mathematischer Sprache über die Umformungsschritte zu sprechen und die Vorgangsweise händisch nachzuvollziehen. Motivationspsychologisch scheint das Hinterfragen von selbst erzeugten Strukturen größeres Interesse hervorzurufen als vorgegebene Sachverhalte. Das CAS ermöglicht eine große Anzahl von Strategien für das Vergleichen von Termen. Unterschiedlich aussehende Terme lassen sich in gleiche überführen, und dadurch läßt sich die Richtigkeit von Lösungsansätzen überprüfen. Das CAS unterstützt die Fähigkeit, Fehler zu erkennen und neue Lösungsversuche zu starten.

5.4.3. Prüfungssituation in der 9. und 10 Schulstufe - Wofür wird das CAS verwendet?

Es gibt noch wenige Forschungen, die das Schülerverhalten untersuchen, wenn diese frei über CAS verfügen können. Verwenden die Schüler immer das CAS? Welche Entscheidungskompetenzen haben sie entwickelt, wenn sie frei wählen können, welche Hilfsmittel werden verwendet? Ist die Zeit des numerischen Taschenechners vorbei? Werden Probleme, die leicht im Kopf zu rechnen sind, immer dem CAS übertragen?

Ein Versuch, eine Antwort auf diese oder ähnlich geartete Fragen zu bekommen, wurde von Zeiler [Zeiler, April 1995] durchgeführt. Es wurde eine sechste Klasse des BG/BRG Stockerau während einer einstündigen Schularbeit beobachtet. Diese Klasse verwendet DERIVE seit der achten Schulstufe durchgehend im Unterricht, in allen Übungssituationen und bei Klassenarbeiten. Jeder Schüler arbeitete also ca. zweieinhalb Jahre mit einem CAS. Im Unterricht wurde der Einsatz des CAS, des Taschenrechners und der "Fußweg" ohne Rechengeräte abwechselnd durchgeführt. Ziel war es, den Schülern bewußt zu machen, daß das verwendete Hilfsmittel von der Aufgabenstellung abhängig ist. Es wird also nicht Mathematik betrieben, um ein CAS verwenden zu können, sondern ein CAS wird verwendet, wenn es bei der Lösung mathematischer Probleme hilft. Im Unterricht sollte das CAS immer mehr in den Hintergrund treten, also selbst nicht Thema sein, und der mathematische Inhalt im Zentrum der Betrachtungen stehen. Der Schwerpunkt der bei dieser einstündigen Arbeit zur Überprüfung gelangten Lernziele stammt aus dem Themenbereich Trigonometrie, und es wurde ein Zugang zum Anlegen von Kapitalien befragt. Die Schüler waren zu diesem Zeitpunkt damit beschäftigt, ein eigenes UTILITY-File für häufig durchgeführte Berechnungen anzulegen. Zum Zeitpunkt der Schularbeit waren die Funktionen zum Umwandeln von Polarkoordinaten in cartesische Koordinaten und umgekehrt bereits ferstiggestellt und getestet, jedoch Auflösungsfunktionen im allgemeinen Dreieck waren nur von einigen Schülern fertig definiert. Den Schülern war freigestellt, ob sie das UTILITY-File UTRIGO (Auszug siehe Bearbeitung Beispiel 4) verwenden wollten oder nicht. Fehler die durch ungenügend definierte Funktionen auftreten konnten, wurden bei der Schularbeit als Fehler gewertet. Kurzum, 8 Schüler hatten dieses UTILITY-File vor der Schularbeit abgegeben und hätten es bei der Schularbeit verwenden können.

Beispiel 5.24: Prüfungsarbeit einer 10.Schulstufe

Die untersuchte Schularbeit war einstündig und fand am 18.1.1995 im Computerraum des Gymnasiums statt.

(Aufgabenstellung der Gruppe Gruppe B)

---

3. Schularbeit 6.C/GRubBdI 18.1.1995 Gruppe B Name: ....

1) a) Leite eine Formel zur Berechnung des Winkelmaßes α zwischen zwei Vektoren bei gegebenen Vektoren allgemein her (Skizze und Herleitung)!

1) b) Wie hängt das Vorzeichen des skalaren Produkts zweier Vektoren mit dem Winkelmaß dieser beiden Vektoren zusammen?

1) c) Gegeben sind zwei einander schneidende Geraden a und b.

   Berechne den Winkel, den diese beiden Geraden einschließen!

2) a) In einem Dreieck sind 2 Seiten (a,b) und ein Winkel α, der der Seite a gegenüber liegt, gegeben:

   Beschreibe genau alle Anwendungsfälle des Sinussatzes, die bei der Berechnung des Winkels β auftreten können und begründe die Anzahl der Lösungen durch genaue mathematische Beziehungen!

2) b) Untersuche und begründe möglichst schnell, ob bei den gegebenen Dreiecken eine, keine oder zwei Lösungen auftreten können (α liegt a und γ der Seite c gegenüber)!

   α) $a = 7, b = 10, \alpha = 40^0$

   β) $b = 4, c = 510, \gamma = 154^0$

   γ) $b = 9, c = 8, \gamma = 100^0$

3) Zwillingen wird durch deren Patenonkel jeweils bis zum 12. Lebensjahr nach einem Plan Geld angelegt!

   1. Patenonkel: Legt ab dem Anfang des vierten Lebensjahres sieben Jahre hindurch 45000 Schilling an.

   2. Patenonkel: Legt ab der Geburt jedes Jahr 25000 Schilling an. Dieser Betrag wird zwölf mal eingezahlt!

   Wieviel Geld hat jeder Patenonkel bis zur Beendigung des zwölften Lebensjahres der Zwillinge angelegt, wenn man einen gleichbleibenden Zinssatz von 8% annimmt?

4) In einem Raum eines Hauses muß nachträglich eine Abflußleitung verlegt werden. Die Auslaufstelle P am Boden des Raums hat von einer Ecke des Raums aus folgende Lage: Entlang der Mauerwand 4 m und in den Raum 5 m (siehe Skizze).

   Aus baulichen Gegebenheiten kann die Leitung von der Ecke des Raums nicht direkt gelegt werden, sondern es müssen zwei Leitungsrohre mit den Längen a = 4 m und b = 3 m verwendet werden. Das längere Leitungsrohr wird von der Ecke aus verlegt, das kürzere an dieses angefügt und bis zur Abflußstelle verlegt.

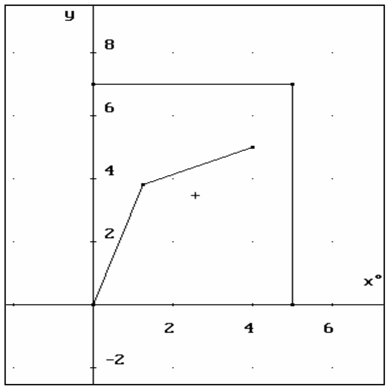
   a) Berechne den Winkel α, den die beiden Leitungsrohre miteinander einschließen.

   b) Berechne die Stelle K (in cartesischen Koordinaten) an der sich der Knick befindet.

   (Bei der Berechnung wird die Tiefe und der Neigungswinkel der verlegten Abflußrohre nicht berücksichtigt.)

5 Zusatzpunkte: Definiere eine Funktion KNICKSTELLE, die für eine beliebige Abflußstelle P und beliebige Leitungslängen a und b die cartesischen Koordinaten der Knickstelle der Leitung ausgibt. Teste diese Funktion am Beispiel 4).

SKIZZE ZU BEISPIEL 4) GRUPPE B: Raum mit verlegten Abflußleitungen



Beschriftung:

P = (4,5) ... Auslaufstelle
K .... Knickstelle
α .... Winkel, den die Leitungen einschließen
0 .... Ecke des Raumes, von dem die Leitung weggeht

Jeder der 18 teilnehmenden Schüler hatte einen eigenen Computer zur Verfügung.
Bei der Untersuchung wurden drei Schwerpunkte gesetzt:
(1) Wann und wofür wird DERIVE eingesetzt?
(2) Welche Rechenhilfe wird bevorzugt: Taschenrechner oder DERIVE?
(3) Wurde das mitgebrachte Modul verwendet? Wenn ja wofür?

Zu (1):
Hier wurden drei Kategorien bei der Verwendung von DERIVE untersucht:
- Verwendung von DERIVE beim Modellbilden
- Verwendung von DERIVE als Testinstrument
- Verwendung von DERIVE als Rechenhilfe

Die Auswertung ergab folgendes Bild:

Schularbeits-beispiele Gruppe B	DERIVE zum Modellbilden verwendet	DERIVE als Testinstrument eingesetzt	DERIVE als Rechenhilfe eingesetzt
1a			
1b			
1c		1	8
2a			
2b	1	6	1
3	1		7
4a	3		5
4b	4		5
Summe Gruppe A	9	7	26
Summe beider Gruppen	14	15	50

Natürlich ist diese Verteilung abhängig von den Lernzielen, die bei den Aufgabenstellungen überprüft werden sollen. Acht Schüler haben mehr oder weniger erfolgreich das CAS als Testinstrument und für Modellbildungsvorgänge verwendet. Eine Schülerin, die sonst das CAS fast nicht verwendet hat, hat den gefragten Beweis mit DERIVE vollständig gelöst. Ihr Argument war, daß sie keine Zeit mehr hatte, das Beispiel händisch zu lösen. Ein Drittel der Schüler verwendete DERIVE für das Modellbilden, d.h., sie haben die Beantwortung der Aufgabenstellung mit dem CAS strukturiert und gelöst.

Wie schon erwähnt ist der Einsatz eines Hilfsmittels von der Problemstellung abhängig. Bei Beweisen, Herleitungen, Beschreibungen, Analysen und Erklärungen ist die Verwendung eines CAS eher unüblich (z.B. Beispiele der Gruppe A: 1a, Beispiele der Gruppe B: 1a, 1b, 2a). Fast alle Schüler haben die oben angegebenen Aufgaben 'händisch' bearbeitet.

Zu (2): Der Taschenrechner (nicht programmierbar) wurde in dieser Klasse in der 7. Schulstufe eingeführt, DERIVE in der 8.. Diese Untersuchung ist natürlich wegen der geringen Stichprobe nicht repräsentativ, doch gibt sie einen interessanten Einblick.

Schularbeits-beipiele Gruppe B	DERIVE als Rechenhilfe eingesetzt	Taschenrechner als Rechenhilfe eingesetzt
1a		
1b		
1c	8	1
2a		
2b	1	2
3	7	2
4a	5	
4b	5	
Summe	26	5
Summe beider Gruppen	50	24

Es wurden also als Hilfsmittel zu 68 % DERIVE und der Taschenrechner zu 32 % verwendet. 10 Schüler (55%) haben ausschließlich DERIVE für Nebenrechnungen verwendet, drei nur den Taschenrechner und fünf (27,5%) haben den Gebrauch beider Rechenhilfen bevorzugt.

Zu (3): Nur fünf Schüler verwendeten das UTILITY-File. Nicht nur "Sehr gute" Schüler verwendeten die vordefinierten Funktionen, sondern ein Schüler bekam die Note "Befriedigend", eine weiterer die Note "Genügend". Drei Schüler verwendeten ihre Module um ein neues zu erstellen, und einer verwendete es als Testinstrument beim Beipiel 2b der Gruppe B.

Die Zusatzpunkte galten für Schüler, die die 'normalen' Aufgabenstellungen bereits gelöst hatten. Von 5 Schülern, die die Zusatzaufgabe zu lösen versuchten, haben drei das alte mitgebrachte Modul zur Erstellung der gefragten Funktion 'Knickstelle' verwendet. Bei einem Schüler vebesserte sich die Note von "Gut" auf "Sehr gut". Sonst nahmen die erarbeiteten Punkte auf die Note keinen Einfluß.

Eine Bearbeitung des Beispieles 4: (Ein MTH-File ohne verwendetes Modul mit Zusatzpunkten)

#1:	Angle := Degree	User
#2:	"Ingo Nader"	User
#3:	"4"	User
#4:	$p := [5, 3]$	User
#5:	$c := \lvert p\rvert$	User
#6:	$a := 4$	User
#7:	$b := 3$	User
#8:	$\alpha := \mathrm{ACOS}\left[\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cdot b\cdot c}\right]$	User
#9:	$\alpha := 39.4892$	Approx(#8')
#10:	$ß := \mathrm{ATAN}\left[\dfrac{p_2}{p_1}\right]$	User
#11:	$ß := 30.9637$	Approx(#10')
#12:	$\varepsilon := \mathrm{ACOS}\left[\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2\cdot a\cdot c}\right]$	User
#13:	$\varepsilon := 28.4863$	Approx(#12')
#14:	$k := a\cdot[\mathrm{COS}(\varepsilon + ß), \mathrm{SIN}(\varepsilon + ß)]$	User
#15:	$k := [2.03315, 3.44474]$	Approx(#14')
#16:	InputMode := Word	User

User

#17: $$\mathrm{KNICKSTELLE}(p, a, b) := a\cdot\left[\mathrm{COS}\left[\mathrm{ATAN}\left[\frac{p_2}{p_1}\right] + \mathrm{ACOS}\left[\frac{a^2 + \lvert p\rvert^2 - b^2}{2\cdot a\cdot \lvert p\rvert}\right]\right], \mathrm{SIN}\left[\mathrm{ATAN}\left[\frac{p_2}{p_1}\right] + \mathrm{ACOS}\left[\frac{a^2 + \lvert p\rvert^2 - b^2}{2\cdot a\cdot \lvert p\rvert}\right]\right]\right]$$

#18:	KNICKSTELLE([5, 3], 4, 3)	User
#19:	[2.03315, 3.44474]	Approx(#18)
#20:	"Nur für 1. Quadranten getestet."	User
#21:	"Schritte:"	User
#22:	"1.) Winkel von a ausrechnen (= ß + ε)"	User

User

#23: "2.) Mithilfe des Winkels und a die Cart.Koordinaten ausrechnen (nach altbewährter Formel)"

Schülermeinungen zu dieser Schularbeit [Zeiler.D, 1995, S.113]:

"Bei einem Gruppengespräch nach der Schularbeit meinten die Schüler/innen, daß die Schularbeit nicht zu lang und nicht zu schwer war. Als Begründung für schlechte Noten wurde angegeben, daß zu wenig gelernt worden war. Der Einsatz von DERIVE war abhängig von der Vorbereitung für die Schularbeit zu Hause. Manche Schüler/innen haben bereits daheim gewisse Beispiele gar nicht mit DERIVE zu lösen versucht. Die Schüler/innen sagen, daß sie je nach Thenma abwägen, welches Hilfsmittel eingesetzt wird. Einige Schüler meinen, daß beim Kapitel Trigonometrie DERIVE nicht so gerne verwendet wird. Die These, daß der Computer von 'schlechteren' Schüler/innen nicht so häufig eingesetzt wird, konnte das Gespräch nicht bestätigen. Zwei widersprüchliche Aussagen standen gegenüber. Eine Schülerin erklärte, daß ihr der Umgang mit dem PC wirklich zu kompliziert ist und sie sich deshalb meist ohne wohler fühle. Ein 'schlechter' Schüler beschrieb das computerunterstützte Arbeiten als Vereinfachung, die er nützt."

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Korrektur der Arbeiten mehr Zeit benötigt als bei herkömmlichen Schularbeiten. Die Anzahl der Lösungswege ist größer geworden. Die Kreativität, auch in der Prüfungssituation, nimmt durch die technische Unterstützung auch andere Ausmaße zu.

5.4.4. Prüfungssituation in der 11. und 12. Schulstufe - Veränderung der Aufgabenstellung?

Die im Folgenden dargestellte schriftliche Reifeprüfung wurde am BG Amstetten unter Verwendung von CAS in einer Klasse geschrieben, die seit etwa der Mitte der 11.Schulstufe bis zur Matura (Ende der 12.Schulstufe) DERIVE in jeder Unterrichtssituation zur Verfügung hatte. Bis zu dieser Abschlußprüfung hatte die Klasse bereits 5 Schularbeiten mit DERIVE-Einsatz absolviert und dabei entsprechende Erfahrungen gesammelt. Durch die Verwendung von DERIVE wurde es möglich, die Prüfungsarbeit - die ansonsten den Rahmenbedingungen einer „herkömmlichen" Matura entsprach -, stärker anwendungsorientiert zu gestalten und Aufgabenstellungen aus der Systemdynamik zu integrieren (Aufgabe 4).

Den Schülern wurde es - so wie bei den vorangegangenen Schularbeiten -, wenn nicht extra in einem Beispiel vermerkt, freigestellt, eine Aufgabe mit oder ohne DERIVE-Unterstützung zu behandeln. Des weiteren wurde die Arbeitsweise freigestellt: Einsatz des CAS als 'Taschenrechner' mit entsprechenden Hinweisen in der handschriftlichen Bearbeitung, Bearbeitung mit dem System, Ausdruck und anschließender Kommentierung und schließlich vollständige Bearbeitung mit DERIVE inklusive Kommentierung im File mit anschließendem Ausdruck.

Organisatorische Voraussetzungen: Jedem der 16 Schüler (1 Schülerin und 15 Schüler) und dem Lehrer wurde im Rahmen des österreichischen DERIVE-Projekts ein Mini-Notebook (Olivetti Quaderno) zur Verfügung gestellt. Die Abschlußarbeit wurde aber unter Verwendung von 14 wesentlich leistungsfähigeren Laptops (486, 25MHz) geschrieben, mit deren Umgang die Schülern aus dem Informatikunterricht vertraut waren. Zwei Schüler arbeiteten auf einen Desktop-Gerät mit vergleichbarer Leistung. Vor der Arbeit wurden alle Geräte getestet und neu formatiert und nur mit den entsprechenden Programmen und vereinbarten Utiltiy-Files zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Systemdynamik (vgl. Kap. 4.1.3, Bsp. 4.12) versehen. Die Berabeitungszeit umfaßte vier Unterrichtsstunden (= 4 x 50 Minuten). Dabei befanden sich je acht Schüler in zwei aneinandergrenzenden Räumen. In jedem Raum stand je ein Drucker und ein Reservegerät zur Verfügung. Lediglich beim 4. Beispiel war ein Ausdruck gefordert. Von der Schülern wurden aber auch bei anderen Beispielen Ausdrucke angefertigt. Dennoch kam es zu keinen Engpässen beim Drucken.

Beispiel 5.25: Aufgabenstellung einer schriftlichen Reifeprüfung

Beispieltext der schriftlichen Reifeprüfung (schriftlicher Teil des Abiturs)

1) a) Als Folge der Transitproblematik ist ein rascher Ausbau der bestehenden Bahnverbindungen erforderlich. Dazu soll durch einen Bergrücken ein Tunnel gebohrt werden. Tunneleingang A und -ausgang B befinden sich in gleicher Seehöhe. Von einem Punkt P am Bergrücken ist A unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 25{,}5°$, B unter einem Tiefenwinkel ß = $31{,}3°$ sichtbar, für $\measuredangle APB$ wird $\gamma = 118{,}4°$ gemessen. Die Seehöhe des Vermessungspunkts P ist um h = 460m größer als die von A und B.

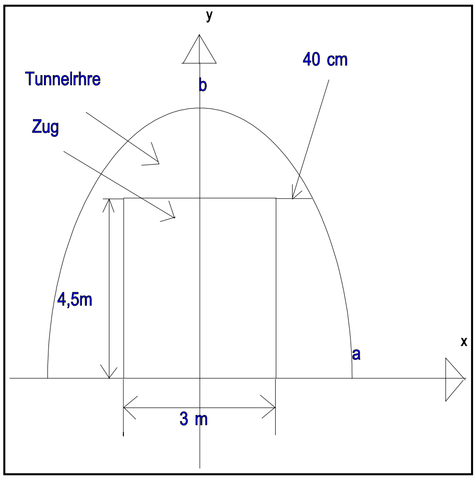
   Gib eine Formel zur Berechnung der Tunnellänge $\overline{AB}$ 39 in Abhängigkeit von h,α,ß und γ an und berechne sie!

   b) Genau senkrecht über dem geplanten Tunnel soll eine Probebohrung bis zum Tunnelniveau durchgeführt werden, um Aufschluß über das vorhandene Gestein zu erlangen. Die Bohrstelle ist vom Vermessungspunkt P aus unter einem Tiefenwinkel $\mu = 27.1°$ zu sehen. Nähert man sich bei gleichbleibender Höhe um d = 100m, so erscheint diese Stelle unter einem Tiefenwinkel von v = $30{,}6°$. Wie tief muß man bohren, um bis zum Tunnelniveau vorzustoßen?

c) Der Querschnitt der Tunnelröhre läßt sich durch eine Ellipse beschreiben, die entlang einer Hauptachse abgeschnitten ist. Die Röhre soll so geplant werden, daß bei kleinster Querschnittsfläche Züge bis 3m Breite und bis 4.5m Höhe passieren können und in Höhe der Zugoberkante zur Wand mindestens 40cm Abstand bleiben. Gib die Breite des Tunnels, seine größte Höhe und die minimale Querschnittsfläche an!

2) Die Gleichung (v in m/s)

$$v(t)=\begin{cases} \dfrac{3t^2}{80}-\dfrac{t^3}{1600}\ , & für 0 \le t \le 40 \\ 10 - 10.\cos(\dfrac{t\pi}{40})\ , & für 40 < t \le t_{\max} \end{cases}$$



beschreibt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf bei einer Fahrt mit der Wiener U-Bahnlinie 2 zwischen den Stationen Schottenring und Universität. (Zur Zeit tmax ist die U-Bahngarnitur in der Station Universität wieder zum Stillstand gekommen).

a) Gib eine Funktion s(t) an, die den zwischen den beiden Stationen zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Welcher Weg wird zwischen den beiden Stationen zurückgelegt?

b) Wann erreicht die die U-Bahngarnitur ihre größte Geschwindigkeit? Wie groß ist sie? Mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) fährt der U-Bahnzug in den 92m langen Haltestellenbereich bei der Universität ein?

c) Wie lange dauert die Beschleunigungsphase? Welche Kraftfunktion während der Beschleunigungsphase muß dabei aufgewendet werden, wenn angenommen wird, daß die U-Bahngarnitur aus 3 Doppeltriebwägen mit einer Masse von je 52600kg besteht? Kann man während der Fahrt ungestört Zeitung lesen oder tritt ein Ruck auf? Was ist ein Ruck? Interpretiere im mathematischen Modell.

d) Zwischen den Stationen Schottentor und Schottenring ist die erreichte Höchstgeschwindigkeit um 25% geringer (als bei b). Gib mit Hilfe eines Polynoms 4. Grads die Geschwindigkeitsfunktion derart an, daß bei gleicher Fahrzeit wie oben wieder zur gleichen Zeit die Höchstgeschwindigkeit erreicht wird.

Bonusaufgabe

(e) Die beiden ursprünglichen Funktionen, die den Geschwindigkeitsverlauf beschreiben, weisen im Intervall [0s;40s] eine merkwürdige Übereinstimmung auf. Ist das Polynom 3. Grads das Taylorsche Näherungspolynom 3. Grads? Was versteht man unter einem Taylorschen Näherungspolynom n.Grades?

Wie weit unterscheiden sich in diesem Intervall die Funktionswerte (der beiden Teile der angegebenen Geschwindigkeitsfunktion) höchstens? An welchen Stellen ist der Fehler am größten? (Verwende bei Derive die Einstellung Mode: Approximate.)

---

3) Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der Autolenker, die während der Fahrt keinen Sicherheitsgurt tragen, 15% (Diese Fahrer werden im Folgenden als "Gurtmuffel" bezeichnet). Man darf annehmen, daß die Autofahrer unabhängig voneinander den Gurt anlegen oder nicht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 12 vorbeifahrenden Autos a1) genau vier, a2) mindestens zwei von einem Gurtmuffel gelenkt werden?

b) Wie viele Autos muß man überprüfen, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gurtmuffel zu finden?

c) Unter 3000 überprüften Autolenkern hat man 375 Gurtmuffel entdeckt. Schätze daraus den relativen Anteil der Gurtmuffel mit 95%iger Sicherheit.

d) Um den Anteil der Gurtmuffel zu senken, wird eine groß angelegte Aufklärungskampagne des Kuratoriums für Verkehrssicherheit durchgeführt. Ein pessimistischer Gendarm ist der Meinung, daß selbst solche Anstrengungen nicht zu einer Verbesserung der Situation führen.

Er überprüft nach Ablauf der Kampagne 100 Autolenker und stellt fest, daß 93 angeschnallt sind. Kann er daraufhin seine Nullhypothese H0: "Nur 85% der Autolenker sind angegurtet" mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% verwerfen? Ab wie vielen unter 100 angeschnallten Lenkern läßt sich überhaupt die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% verwerfen?

4) Ein Biotop wird von Katzen und Mäusen bevölkert.

a) Grundmodell:

Die Zahl der Mäuse ist bestimmt durch ihren natürlichen Zuwachs von jährlich 18% und ihre Abnahme durch ihre Feinde, die Katzen. Diese Abnahme ist proportional zur Anzahl der Katzen und zur Anzahl der Mäuse (Proportionalitätsfaktor b=0.005). Der Zuwachs der Katzen ist proportional zur Zahl der Mäuse und zur Zahl der Katzen (Proportionalitätsfaktor d=0.0001). Die natürliche jährliche Abnahme betrage 15%. Anfangs gibt es 1500 Mäuse und 25 Katzen im betrachteten Biotop.

Stelle die entstrechenden Differenzengleichungen auf und untersuche die Langzeitentwicklung der Mäuse- und Katzenpopulation. Führe mittels Derive eine Simulation durch (mind. 50 Schritte). Beschreibe die Entwicklung beider Populationenen.

b) Verbessertes Modell:

Da jede Katze ein bestimmtes Revier beansprucht, können im Biotop maximal 120 Katzen leben. Daher ist der Zuwachs der Katzen proportional zur Zahl der Mäuse und zum vorhandenen Wachstumspotential.

Schreibe wieder die entsprechenden Differenzengleichungen an und führe wie oben eine Simulation aus. Beschreibe wieder die Langzeitentwicklungen beider Populationen.

Stellt sich ein Gleichgewicht ein? Wenn ja, berechne es und erkläre, warum es sich einstellt.

c) Gib eine Darstellung der Populationsentwicklungen des Grund- und des verbesserten Modells in einem Phasendiagramm. (Ordinate: Mäusepopulation, Abszisse: Katzenpopulation)

Was bedeuten im Phasendiagramm geschlossene Kurven, wie sind spiralförmige nach innen laufende Gebilde, wie nach außen laufende Spiralen zu interpretieren?

[Erstelle eine Grafik mit beiden Phasendiagrammen und drucke.]

[Speichere deine Arbeiten in Derive zu diesem Beispiel unter KATZMAUS.MTH]

Hinweis: Zur Bearbeitung dieser Beispiele steht Derive als Hilfsmittel zur Verfügung. Dabei sind alle Ergebnisse und nichttrivialen Zwischenergebnisse niederzuschreiben oder auszudrucken. Alle mit Derive ausgeführten Umformungen sind so ausführlich zu beschreiben, daß diese einwandfrei nachvollzogen werden können.

---

(1) Wie kamen die Schüler mit dem - im Vergleich zu traditionellen Klausuraufgabenstellungen - doch deutlich größeren Umfang der Arbeit zurecht?

Die veränderte Rolle der Kalküle (vgl. 5.3. bzw. Einleitung zu diesem Kapitel) läßt den Umfang der Arbeiten ansteigen. Dies darf natürlich nicht dazu führen, daß die Schüler überfordert werden. Vielmehr hat dies im Einklang mit ihren mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit dem CAS zu erfolgen. Es ist aber sicher eine Verlagerung von handschriftlichen Ferigkeiten zu Strategiefertigkeiten zu beobachten. (Wobei dies natürlich aufgrund der wenigen zur Verfügung stehenden Klausur- und Klassenarbeiten, die bisher mit CA-Einsatz geschrieben werden, nur mit Vorsicht gesagt werden kann).

Ein typisches Beispiel für diese Verschiebung vom Operativen hin zum Mathematisieren in dieser Arbeit ist Aufgabe 2d), die von den Schülern etwa so gelöst wurde:

```
                    4         3         2
#1:  V(t) := a4·t  + a3·t  + a2·t  + a1·t + a0            User
              d
#2:  A(t) := ── V(t)                                      User
             dt
                                    2          3
#3:  A(t) := a1 + 2·a2·t + 3·a3·t  + 4·a4·t        Simp(#33')

User
#4:  [V(0) = 0, V(40) = 15, V(80) = 0, A(0) = 0, A(40) = 0]

Solve(#35)
                              3              3             3
#5: [a0 = 0, a1 = 0, a2 = ───, a3 = - ─────, a4 = ──────]
                             80           3200        512000
```

Hier zeigt sich auch, daß im Vergleich zu einer handschriftlichen Ausführung die „Delegation der Berechnung" ans CAS keineswegs mit einem Verlust mathematischer Fähigkeiten einhergehen muß. Im Gegenteil, ein kompetenter Einsatz von CA ist erst bei entsprechenden mathematischen Fähigkeiten möglich.

Zur Beantwortung der in (1) gestellten Frage kann hier nur angefügt werden, daß in der vorliegenden Arbeit nur zwei Schüler echte Zeitprobleme hatten, die aber ohne CA sicher noch größer gewesen wären.

(2) Zeigen die Schüler eine anderes Problemlöseverhalten bei herkömmlichen Beispielstellungen?

Ja, wenn es darum geht mit Funktionen oder Gleichungen zu arbeiten, wird fast immer zuerst ein grafischer Zugang gewählt, um sich einen besseren Überblick zur Aufgabenstellung zu verschaffen. Zur Möglichkeit, nichtlineare Gleichungen grafisch zu lösen, wird wesentlich häufiger gegriffen. Bei Aufgaben, bei denen dem Schüler keine entsprechenden Techniken im CAS bekannt sind (wie dies z.B. bei Aufgabe 1a, b der Fall war), wird allerdings eher die vertraute handschrifltiche Berechnung durchgeführt. Das CAS wird dann höchstens als Rechenhilfe eingesetzt.

(3) Wie gestaltet sich die Nutzung der im Lauf der Bearbeitung der entsprechenden Themengebiete erstellten Module?

Die Nutzung von Modulen gestaltet sich in der Prüfungssituation dann erfolgreich und problemlos, wenn sie von den Schülern, am besten selbst entwickelt, im Unterricht bereits intensiv verwendet und getestet wurden. Probleme hatte ein Schüler, der die Entwicklungsphase des (in Kap. 4.3 vorgestellten Moduls zur Systemdynamik) nicht miterlebt und nachträglich zu wenig Erfahrung damit aufgebaut hatte.

Beispiel 4) gestaltete sich unter Einsatz dieses Moduls etwa folgendermaßen:

ad α) Grundmodell:

geg.: $x_0 = 1500$ / $y_0=25$ / a=0,18 / b=0,005 / c = 0,15 / d = 0,0001

Iterationsgleichungen:

Zahl der Beutetiere $x_{n+1} = x_n + r_1 (x_n, y_n) = x_n + a\cdot x_n - b\cdot x_n\cdot y_n$

Zahl der Räuber $y_{n+1} = y_n + r_2 (x_n , y_n) = x_n - c\cdot y_n + d\cdot x_n\cdot y_n$

Simulation:

```
 #1: "Integraphen für Systeme von Differenzengleichungen"
 #2: SYSTEM_2(r1, r2, y1, y2, y10, y20, t0, δt, sz ):=
     ITERATES([t + δt, y1 + r1·δt, y2 + r2·δt],
                            [t, y1, y2],[t0, y10, y02], n)

 #3: "Räuberpopulation mit einer Beutepopulation -
                                                Grundmodell"
 #4: r1 := 0.18·x - 0.005·x·y

 #5: r2 := - 0.15·y + 0.0001·x·y

 #6: SYSTEM2(r1,r2,x,y, 1500, 25, 0, 1, 80)

     ZWEISPALTEN(m, s1, s2) := ┌m`   , m`   ┐`
 #7:                           └  s1     s2┘
```

- Mäuse- und Katzenpopulation schwanken mit steigender Amplitude (vgl. dazu Abschnitt 4.3, Beisp. 4.15).

  Bemerkung: Als numerisches Verfahren wurde lediglich das EULER-CAUCHY-Verfahren verwendet, was insbesondere bei α) als problematisch anzusehen ist. Es muß aber angemerkt werden, daß der Sinn dieses Beispiels hauptsächlich im Modellbilden lag.
- Die Maxima der Katzenpopulation sind gegenüber den Maxima der Mäusepopulation verschoben, sie „hinken nach“.
- Die „Wellenlänge“ liegt bei ca. 40 Zeitschritten.

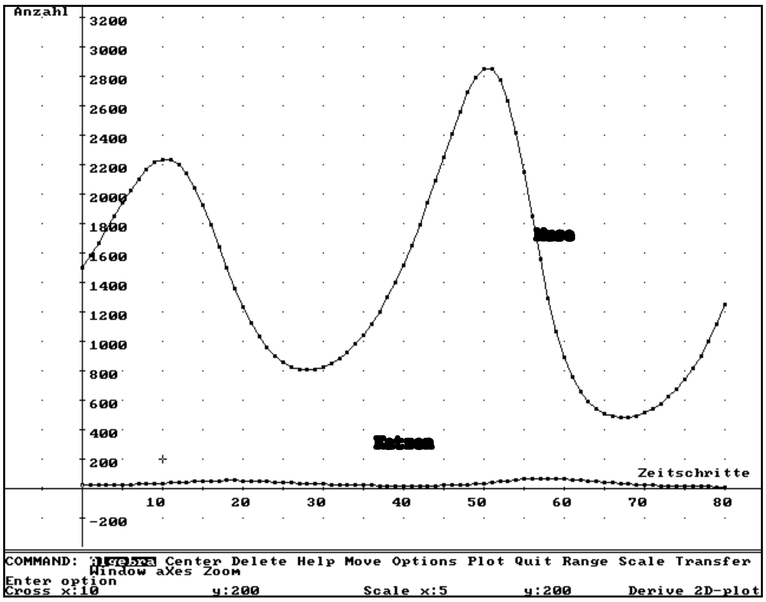


Abb. 5.24: Zeitliche Entwicklung, Grundmodell

ad β) Verbessertes Modell:

Iterationsgleichungen:

Zahl der Beutetiere $x_{n+1} = x_n + r_1 (x_n,y_n) = x_n + a\cdot x_n - b\cdot x_n\cdot y_n$

Zahl der Räuber $y_{n+1} = y_n + r_2 (x_n,y_n) = x_n - c\cdot y_n + d\cdot x_n\cdot (g - y_n)$

Simulation:

```
#8:  "Räuberpopulation mit einer Beutepopulation -
                                               verbessertes Modell"

#9:  r1 := 0.18·x - 0.005·x·y

#10: r2:= - 0.15·y + 0.0001·x·(120 - y)

#11: SYSTEM2(r1, r2, x, y, 0, 1500, 25, 1, 80)
```

- Es stellt sich nach ca. 40 Schritten ein Gleichgewichtszustand ein.
- Die Mäusepopulation sinkt anfangs stark, die Katzenpopulation nimmt leicht zu.

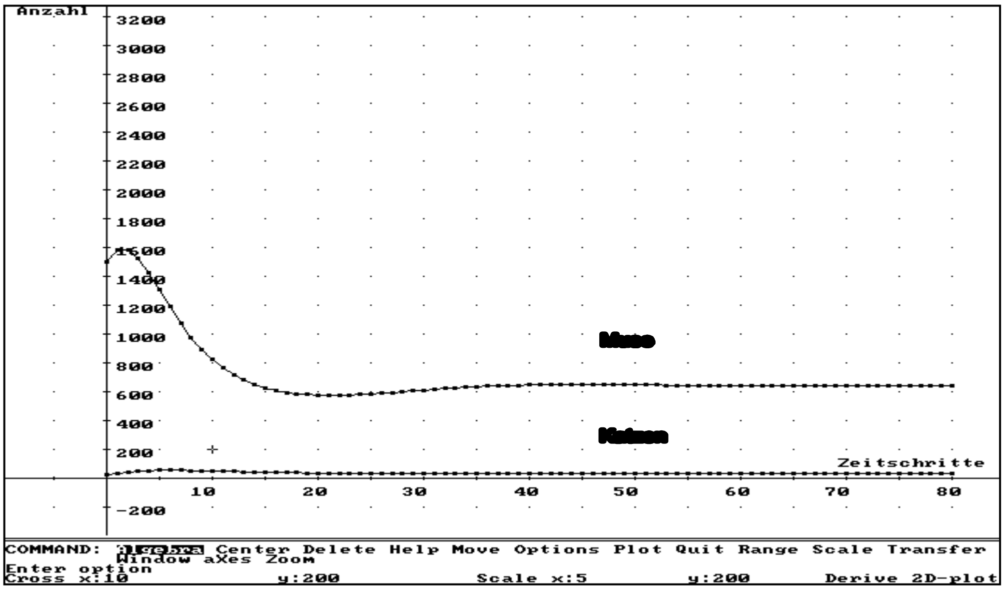


Abb. 5.25: Verbessertes Modell, zeitliche Entwicklung

Berechnung des Gleichgewichtszustands (Fixpunkts):

Das Gleichgewicht ist dann erreicht, wenn

$$x_{n+1} - x_n = 0 \_ \; a \; \_ x_n - b \; \_ x_n \_ y_n = 0 \_ \; \overline{y} = \frac{a}{b} = 36$$
$$y_{n+1} - y_n = 0 \_ - c \; \_ y_n + d \; \_ x_n \_ (g - y_n) = 0 \_ \; \overline{x} \approx 643$$

Im Biotop herrscht dann ein Katzen-Mäuse-Gleichgewicht, wenn es von ca. 36 Katzen und 643 Mäusen bevölkert wird.

ad γ) Phasendiagramm:

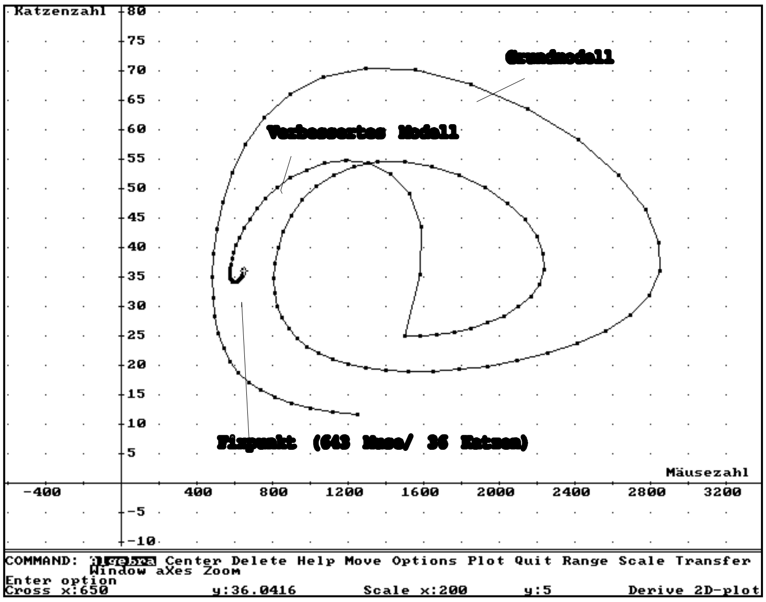


Abb. 5.26: Beisp.4 mit Euler-Cauchy-Verfahren

Im Phasendiagramm bedeuten:

- geschlossene Kurven: periodische Schwankungen
- spiralförmig nach innen laufende Kurven: Entwicklung zum Gleichgewicht
- spiralförmig nach außen laufende Kurven: Entwicklung zur Instabilität

Die Beobachtung, „daß erworbenes Wissen reflektiert und damit längerfristig verfügbar ist" [Steinberg, 1994 S.62], wird bei der Erarbeitung von CA-Modulen auf sehr praktische Art und Weise Wirklichkeit. Die vorangegangenen Anstrengungen stehen - in die Form von Modulen gegossen - dem Schüler nun als Werkzeuge für neue Problemlösungen zur Verfügung. Auf diese Weise werden - zumindest rechentechnisch aufwendigere - Aufgabenstellungen auch in der Prüfungssituation bewältigbar.

(4) Welche Anforderungen sind an die bei der Prüfung verwendeten Rechner zu stellen?

Die Rechenzeiten der verwendeten Geräte sollten sehr kurz sein, da nicht verlangt werden kann, daß ein Schüler in der Prüfungssituation länger als 1-2 Minuten auf ein Ergebnis beim Lösen einer Gleichung oder auf eine Langzeitentwicklung („Szenario") wartet und dann eventuell erkennen muß, daß seine Eingabe mit einem Fehler behaftet war, der sich erst zur Laufzeit (bei der Interpretation seiner Eingabe) bemerkbar macht. Überhaupt ist die Ungewißheit bei langen Wartezeiten („Ist die Eingabe falsch oder die Rechenzeit nur lang, wurde eine Funktion nur unschickt definiert?") für viele Schüler eine ernstzunehmende psychische Belastung. Außerdem sinkt natürlich bei langen Rechenzeiten die Bereitschaft, etwas auszuprobieren.

Die Bildschirmqualität spielt - im Gegensatz zum experimentellen Arbeiten, bei dem eine gute Auflösung und Farbe wünschenswert sind - kaum eine Rolle. Meist genügt auch eine schwache Auflösung, um eine Idee zu bekommen.

(5) Dokumentation der Rechenergebnisse

Klare Vereinbarungen zur Dokumentation der mit CAS bearbeiteten Aufgabenstellungen sind von großer Bedeutung. Hier ist es sehr erfreulich, anmerken zu können, daß DERIVE (auch auf Anregung unserer Projektgruppe hin) ab der Version 3.0 über Annotationen verfügt, die es gestatten, nachzuvollziehen, welche Schritte vom Benutzer an einer bestimmten Stelle seiner Arbeitssitzung mit dem CAS ausgeführt wurden.

Insbesondere muß dem Schüler klar sein, was unter „nichttrivialen Umformungsschritten" vom Lehrer verstanden wird.

(6) Die Bedeutung von Arbeitsstrategien

Es ist wohl nicht möglich, sich an eine CAS-unterstützte Klassenarbeit heranzuwagen, ohne mit den Schülern vorher ausführlich Arbeitsstrategien das CAS betreffend erarbeitet zu haben, um unnötige Probleme zu vermeiden. In DERIVE ist es etwa sehr ratsam, nach Bearbeitung eines Beispiel mittels **Transfer Clear** eventuelle Variablenbelegungen zu beseitigen. Gerade in der Schularbeitssituation wäre eine - zur TI-92 Funktion VAR-Link analoge Funktion -, die es gestattet, auf einem Blick alle Variablenbelegungen einzusehen, sehr günstig.

Zu solchen Arbeitsstrategien gehören auch die folgenden Fragen: Wie kann man platzsparend und übersichtlich arbeiten, um nicht zuviel scrollen zu müssen und so den Überblick zu verlieren? Wie können zwei verschiedene Lösungen rasch verifiziert werden? Sind ausreichend Grundtechniken im Erstellen von Grafiken wie Zoomen, Bereichsvergrößerung, Skalieren vorhanden? Oder beim Lösen von Gleichungen: Wie läßt sich rasch zwischen exaktem und numerischem Lösen von Gleichungen hin- und herschalten? Wie sind im numerischen Fall die Grenzen vernünftigerweise zu wählen? Wie können unsinnige Lösungen ausgeschlossen werden?

Wie kann man grafische Darstellungen nutzen, um einen ersten Überblick bei einer Aufgabe zu erhalten?

Zusammenfassend kann festgestellt werden: Die Möglichkeiten des CAS können die Lehrer dazu verführen, zuviel in eine Klassenarbeit hineinzustopfen. Hier muß aber klargestellt werden: *Experimentiermöglichkeit ist wichtiger als Länge*! Schüler zeigen insbesondere im Zugang zu einer Problemstellung eine anderes Verhalten, wenn in der Aufgabe Funktionen oder Gleichungen auftreten. Module in der Prüfungssituation sind nur dann sinnvoll, wenn sie vom Schüler selbst erstellt wurden bzw. er aufgrund intensiver Beschäftigung genügend Erfahrungen gesammelt hat. Die Vertrautheit mit geeigneten Arbeitsstrategien und Übereinkünfte der Art, wie die Arbeit dokumentiert werden muß, sind unerläßlich.

Insgesamt muß festgestellt werden, daß die unter CA-Einsatz eher mögliche offene Aufgabenstellung die Diskussion braucht und daß Kreativität keinen Zeitdruck verträgt. Deshalb muß sicher auch über neue Prüfungsformen nachgedacht werden. Ansätze dazu sind auch verschiedenenorts bereits zu beobachten, z.B. themenbezogene Aufgabenstellungen, die individuell oder zu zweit gelöst werden [Baumann, 1995, H.70/S. 63ff], oder die Ausarbeitung und Präsentation mathematischer Projekte, wie sie W.Rohm beschrieben hat [AMMU, 1995, Beitrag8].

6. Das österreichische Computeralgebraprojekt

Wie schon in der Einleitung angedeutet, sind die wesentlichsten didaktischen Konzepte und Unterrichtsbeispiele Ergebnisse eines Forschungsprojektes, das wir im Auftrag des Bundesministeriums für Unterricht von 1993 bis 1995 durchgeführt haben. Im folgenden Kapitel soll über die Organisation und die Arbeitsweise des Projektes und über methodische Erfahrungen berichtet werden.

6.1. Die Situation in Österreich

Die Zeit bis 1985 war durch große Eigeninitiative der Lehrer gekennzeichnet. Dementsprechend waren auch die Geräteausstattungen und die verwendeten Programmiersprachen äußerst unterschiedlich. Neben der 'unverbindlichen Übung EDV' wurde ab 1977 auch der Freigegenstand Informatik angeboten, wobei ein Freigegenstand ein benotetes Fach bedeutet, in dem man auch das Abitur machen kann.

Im Schuljahr 1985/86 wurden die Schulen erstmals mit 6 bis 7 PC's ausgestattet, die in einem EDV-Raum installiert waren. Es wurde das zweistündige Pflichtfach Informatik in der 9. Schulstufe eingeführt. Der Bildungsauftrag der 'informationstechnischen Grundbildung' sollte in vier sogenannten 'Trägerfächern' ab der 7. Schulstufe erfüllt werden. Als Trägerfächer wurden Deutsch, Englisch, Mathematik und Geometrisches Zeichnen ausgewählt. Im Rahmen der großen Reform der Oberstufe der Gymnasien wurde im Schuljahr 1989/90 auch das System der Wahlpflichtfächer eingeführt. Eines der von den Schülern am meisten gewählten Fächer ist das Fach Informatik, das von der 10. bis zur 12. Schulstufe je zweistündig besucht werden muß und in dem der Schüler auch maturieren kann (Matura ist gleichbedeutend mit Abitur). Inzwischen wurde auch ein zweiter EDV-Raum eingerichtet und zwar mit 14 meist vernetzten PC's. Momentan wird an der Neuadaptierung des ersten EDV-Raumes gearbeitet. Für diesen Raum sind zwischen 7 und 14 PC's oder Notebooks vorgesehen.

Das bedeutet, daß der Mathematiklehrer, der den Computer nutzen will, einen EDV-Raum mit 14 PC's zur Verfügung hat. Eine regelmäßige Nutzung ist jedoch wegen der starken Auslastung der EDV-Räume schwierig.

Erste Schülerexperimente mit Computeralgebra-Systemen (von nun an CAS genannt) machte ab 1984 Klaus Aspetsberger in Zusammenarbeit mit dem RISC-Institut der Universität Linz unter der Leitung von Professor Buchberger. Im Schuljahr 1987/88 leitete Helmut Heugl einen Unterrichtsversuch mit einem algebratauglichen Taschenrechner (HP-28C) am Gymnasium in Stockerau. Dabei hatten erstmals alle Schüler einen algebrat-auglichen Rechner in jeder Arbeitssituation zur Verfügung, nämlich in der Schule, zu Hause und in der Prüfungssituation.

Zu Beginn der Neunzigerjahre war Österreich wohl das erste Land der Welt, das ein Computeralgebra-System - nämlich DERIVE - in Generallizenz für alle Gymnasien anschaffte. Nun galt es aber, den Lehrern so rasch wie möglich nicht nur Disketten und Handbücher, sondern vor allem didaktische Hilfen anzubieten. Mit diesem Auftrag wurde vom Bundesministerium für Unterricht 1993 ein Forschungsprojekt gestartet. Die Planung und Ausführung wurde der Arbeitsgruppe ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computeralgebra) übergeben.

Der momentane Schwerpunkt liegt bei der Berücksichtigung der Ergebnisse dieses Projekts in der Lehrerfortbildung. In Niederösterreich etwa gibt es Kurse bestehen aus vier halbtägigen Veranstaltungen, die meist am Schulort für die Mathematiklehrer dieser Schule angeboten werden. Am ersten Tag erhalten Anfänger eine Einschulung in die Handhabung von DERIVE. Danach wird das im Rahmen des Projekts entstandene Skriptum zur Lehrerfortbildung [Aspetsberger u. a., 1994] gemeinsam mit Tutoren bearbeitet. Jeweils nach einer Selbststudiumsphase von zwei bis drei Wochen wird wieder ein halber Tag zur Aufarbeitung entstandener Probleme und für didaktische Diskussionen angeboten.

6.2. Das Forschungsprojekt: Symbolic-computation-unterstützter Unterricht

Die Idee zu diesem Projekt entstand bei einer Diskussion mit Bruno Buchberger, dem Vorstand des RISC-Instituts der Universität Linz (Research Institute for Sym-bolic Computation). Seither ist Professor Buchberger unser wichtigster wissenschaftlichen Berater, und zwar nicht nur in Fragen betreffend Computeralgebra, sondern auch im Bereich der Didaktik. Eine wesentliche Voraussetzung und Bedingung für das Zustandekommen des Projekts ist die Zusammenarbeit mit David R. Stoutemyer, dem Entwickler des Softwarepaketes Derive. Im Rahmen dieser Kooperation hatten wir auch die Möglichkeit, mittels unserer

Untersuchungsergebnisse einen Beitrag zur Weiterentwicklung der Software zu leisten, und zwar in Richtung einer besseren Anpassung an didaktische Erfordernisse des Unterrichts.

Die *Ziele des Projekts* spiegeln sich im Konzept dieses Buches wieder: Es galt zu erforschen, in welcher Weise CAS zur Veränderung und wenn möglich zur Verbesserung des Mathematikunterrichts in den Schulen beitragen können, und zwar sowohl in methodisch-didaktischer Hinsicht, als auch im Bereich der Lernziele und Lerninhalte, und nicht zuletzt im affektiven Bereich. Auch die Hardwareausstattung sollte hinterfragt werden. Ein weiteres Ziel, an dem noch immer laufend gearbeitet wird, ist die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien.

Zuerst mußten Lehrer und Schüler gefunden werden, die bereit waren, beim Projekt mitzuarbeiten. Für drei Bundesländer wurden Projektlehrer bestellt, und zwar K. Fuchs für Salzburg, K. Aspetsberger für Oberösterreich und W. Klinger für Niederösterreich. Ihre Aufgabe war, die Versuchsklassen zu betreuen, selbst eine Versuchsklasse zu führen, sowie Unterrichts- und Evaluationsmaterialien zu entwickeln.

6.2.1. Die Durchführung der Experimente

Die Hardwareausstattung bedingt natürlich die Art des Einsatzes. Dementsprechend kann man drei Typen von Versuchsklassen unterscheiden:

Typ I:

Die Schüler konnten Derive in jeder Arbeitssituation nutzen und zwar im Unterricht, zu Hause und während der Prüfung. Dies ist auch deshalb von Bedeutung, da die Prüfungssituation - mag man darüber auch nicht glücklich sein - die Unterrichtskonzeption und die Motivation doch sehr stark beeinflußt. Nur in solchen Versuchsklassen können die Möglichkeiten eines CAS wirklich voll genutzt werden, und zwar sowohl als Rechenhilfsmittel als auch als didaktisches Werkzeug. Einen nicht unwesentlichen Einfluß hatte auch die Hardwareausstattung. Bevorzugt ausgewählt wurden Versuchsklassen, in denen die Mehrheit der Schüler schon zu Hause einen Computer hatte. Für einen Teil der Schüler wurden auch vom Ministerium Mittel zum Ankauf von Geräten zur Verfügung gestellt.

Es gab folgende Ausstattungsvarianten:

- Alle Schüler hatten zu Hause einen PC, in der Schule wurde im EDV-Raum gearbeitet. Das bedeutet, daß im Unterricht oft 2 Schüler an einem Gerät arbeiteten. Aus dieser Not wurde eine didaktische Tugend, da die Partnerarbeit auch viele Vorteile bietet. Es gibt wohl selten einen Mathematikunterricht, wo Schüler so intensiv über Mathematik diskutieren, wie bei Partnerarbeit vor dem Computer.

  Bei den Schularbeiten gab es zwei Methoden: Entweder wurde die Prüfungsarbeit in zwei Gruppen hintereinander abgehalten, oder es stand jedem Schüler der Computer nur für die Hälfte der Prüfungszeit zur Vergügung. Diese Methode zeigt, daß es kaum Prüfungsarbeiten gab, bei denen mehr als die Hälfte der Aufgaben mit dem CAS zu lösen war. Die übliche Arbeitsform war eine Kombination Bildschirm - Papier.

  Die Hausaufgaben wurden teilweise auf Disketten geschrieben.

- Die Schüler besaßen Notebooks oder Palmtops (HP-95), die sie in die Schule mitnahmen. Im Unterricht wurde entweder mit diesen Geräten in der Klasse gearbeitet oder, wenn die Visualisierung auf einem Farbschirm didaktisch wichtig war, im EDV-Raum. Die Vorteile des Notebooks wegen der Verfügbarkeit im Unterricht wurden allerdings durch die Nachteile beim Transport mehr als aufgewogen. Es gab auch einige Schulen mit Notebookausstattung. Der Vorteil war die Unabhängigkeit vom EDV-Raum, die Lehrer klagten allerdings über das Virus-Problem.

Typ II:

Im Unterricht wurde das CAS so oft wie möglich und unter Berücksichtigung der inhaltlichen und didaktischen Erfordernisse im EDV-Raum genutzt. Bei diesen Versuchsgruppen spielte Derive als Rechenhilfsmittel nur eine geringe Rolle. Wenn das CAS nicht zum Üben zur Verfügung steht und bei der Prüfung nicht eingesetzt werden kann, wird man auf Handkalkülfertigkeiten nicht verzichten können. Im Vordergrund bei der Nutzung des CAS stand der Einsatz als didaktisches Werkzeug.

Typ III:

Vergleichsgruppen, die gleiche oder ähnliche Inhalte wie die obigen Gruppen »klassisch«, das heißt ohne Verwendung von CAS bearbeiteten. Sie waren vor allem wichtig für vergleichenden Tests betreffend die Erreichung der Lernziele oder die Veränderungen bei den Handkalkülfertigkeiten.

Man könnte sagen: Mit den Versuchsklassen des Typs I wurde der Mathematikunterricht der Zukunft untersucht, mit den Typ II-Klassen der Unterricht der Gegenwart. Natürlich konnten in dieser kurzen Zeit nicht alle Inhalte von der 7. bis zur 12. Schulstufe hinterfragt werden. Daher wurden bei regelmäßigen Besprechungen sogenannte »Beobachtungsfenster« entwickelt, bestimmte Teilkapitel, für die dann Unterrichtsmaterialien und auch Prüfungsaufgaben entworfen wurden. Die Versuchslehrer der entsprechenden Schulstufe mußten dann diese Kapitel etwa zur selben Zeit durchnehmen.

Insgesamt waren an der ersten Projektphase 39 Versuchsklassen mit etwa 700 Schülern beteiligt.

Verteilung auf die Typen:

Typ 1:18 Klassen

Typ II: 16 Klassen

Typ III: 5 Klassen

Verteilung auf die Schulstufen:

7. Schulstufe: 5 Klassen

8. Schulstufe: 4 Klassen

9. Schulstufe: 6 Klassen

10. Schulstufe: 10 Klassen

11. Schulstufe: 5 Klassen

12. Schulstufe: 9 Klassen

Ein Auswahlkriterium war, wie schon erwähnt, die Hardwareausstattung. Ein zumindest genauso wichtiges Kriterium war, engagierte Lehrer zu finden, die ohne besondere Abgeltung bereit waren, die umfangreiche Versuchsarbeit auf sich zunehmen. Dies ist für die Projektion der Untersuchungsergebnisse auf »Normallehrer« in »Normalklassen« von Bedeutung. Wir sind realistisch genug, um aus sehr positiven Ergebnissen des Projekts nicht automatisch abzuleiten, wir hätten mit der Computeralgebra-Lernumgebung das »gelobte Mathematikland« gefunden, wie es etwa S.Papert von seiner LOGO-Lernumgebung erhofft hat [Papert, 1982, S.66]. Wir sehen unsere Aufgabe im Entwickeln didaktischer Konzepte und Unterrichtsmaterialien auf der Basis der Ergebnisse aus den Versuchsklassen. Ob daraus eine gute, befruchtende Lernumgebung wird, hängt vom einzelnen Lehrer, seinen Schülern und nicht zuletzt von den verwendeten Hilfsmitteln ab.

Dieses Projekt war eher ein evolutionäres als ein revolutionäres. Damit ist gemeint, daß Ausgangspunkt bei der Planung der momentan in Österreich gültige Lehrplan war und daß am Anfang fast ausschließlich die traditionellen Schulbücher zur Verfügung standen, in denen diese Art des Computereinsatzes kaum berücksichtigt wird. Die neuen Materialien wurden ja erst von den Versuchslehrern parallel zu Untersuchung entwickelt. Der große Arbeitsaufwand für die Entwicklung solcher Unterrichtsmaterialien zeigt, daß eine breite Akzeptanz seitens der Lehrer für ein computerunterstütztes Unterrichtskonzept nur dann zu erwarten ist, wenn solche Materialien zur Verfügung gestellt werden. Damit sind nicht nur Aufgabensequenzen gemeint. Eines unserer Untersuchungsergebnisse lautet: Die Tätigkeiten der Lehrenden und Lernenden werden sich zumindest genauso stark verändern wie die Inhalte. Es müssen also auch didaktische Konzepte, Lernstrategien und Arbeitsanleitungen, bis hin zu Modellen für Arbeitsblätter und Arbeitsfiles angeboten werden.

6.3. Die Evaluation durch das Zentrum für Schulentwicklung

Das Zentrum für Schulentwicklung in Graz hat im Auftrag des Bundesministeriums für Unterricht die »Außenevaluation« des österreichischen Computeralgebraprojekts übernommen. Es gibt zwei Berichte: Der erste beinhaltet die Ergebnisse der Schülerbefragung [Grogger,1995], im zweiten wird die Lehrerbefragung analysiert und es wird eine vergleichende Darstellung mit Ergebnissen der Schülerbefragung versucht [Svecnik, 1995].

6.3.1. Ergebnisse der Schülerbefragung

Die Befragung wurde an 549 Schülerinnen und Schülern aus 33 Versuchsklassen in 17 Schulen durchgeführt. 17 Klassen mit 264 Schülern waren vom Versuchstyp I, das heißt, diese Schüler konnten das CAS (DERIVE) in jeder Arbeitssituation nutzen, also auch zu Hause und bei Prüfungen.

Ausmaß der Veränderung der Freude am Mathematikunterricht seit dem Einsatz von Derive:

Ab der 8. Schulstufe nimmt die Freude am Mathematikunterricht zu, am deutlichsten in der 9. und 12. Schulstufe. Die geringfügige Abnahme in der 7. Schulstufe ist statistisch nicht signifikant und könnte aus der noch zu kurzen Beschäftigung mit dem CAS erklärt werden.

Von Interesse sind zwei weitere Befunde:

- Eine deutlich stärkere Zunahme der Freude am Mathematikunterricht bei den männlichen Schülern gegenüber den Schülerinnen.
- Eine bedeutsamere Zunahme der Freude am Mathematikunterricht bei jenen Schülern, die auch zu Hause jederzeit mit dem CAS arbeiten können gegenüber denen, die diese Möglichkeit nicht nutzen oder nicht haben.

Das quantitative Ausmaß des Einsatzes von Derive im Mathematikunterricht

84% aller befragten Schülerinnen und Schüler wünschen den Einsatz von DERIVE. 81% der Schüler des Versuchstyps I sind mit dem derzeitigen Ausmaß des Einsatzes von DERIVE zufrieden. Der Wunsch, das CAS nicht nur im Unterricht, sondern darüber hinaus zu Hause und bei Schularbeiten einzusetzen, tritt bei Schülern höherer Klassen häufiger auf als bei denen niedriger Klassen. Dies ist wahrscheinlich mit dem Ansteigen der Komplexität der mathematischen Aufgabenstellungen zu erklären. In höheren Klassen kommt es zu einer Polarisierung: Einem hohen Anteil von Schülern der 12. Schulstufe (71%), die das CAS umfassend einsetzen wollen, steht ein Anteil von 20% gegenüber, die mit dem CAS überhaupt nicht arbeiten wollen.

Abhängigkeit von der Schulstufe

Die Schüler der Sekundarstufe I (in Österreich Unterstufe genannt) stimmen stärker als die Oberstufenschüler (Sekundarstufe II) zu, daß der Einsatz von Derive

- den Mathematikunterricht verständlicher und interessanter macht,
- die Beschäftigung mit mathematischen Problemen fördert,
- das Interesse weckt, wie Derive arbeitet.

Die Schüler der Sekundarstufe II zeigen eine weniger »euphorische« Einstellung gegenüber dem Einsatz des CAS, andererseits hat die Freude am Mathematikunterricht zugenommen. Es ist zu vermuten, daß Oberstufenschüler das CAS nüchterner als Hilfsmittel zur Bewältigung mathematischer Probleme ansehen und vor allem auch als Rechenhilfsmittel, während das CAS in der Sekuntarstufe I eher als didaktisches Werkzeug eingesetzt wird.

Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit der Schüler

Gute Noten wirken sich fördernd auf die Einstellung zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht aus. Schlechtere Schüler fühlen sich durch das CAS zusätzlich belastet und zeigen ein deutlich geringeres Interesse an der Funktionsweise von Derive. Gute Schüler geben häufiger an, daß sie auch bei Hausübungen und bei Prüfungsarbeiten mit dem CAS arbeiten wollen.

Die geschlechtsspezifische Auswirkung des CAS

Die männlichen Schüler zeigen gegenüber ihren Mitschülerinnen

- ein deutlicheres Ansteigen der Freude an Mathematik,
- häufiger den Wunsch, das CAS auch zu Hause und bei Prüfungen einzusetzen,
- daß sie sich durch Derive stärker gefördert fühlen und daß Mathematik durch das CAS verständlicher und interessanter wird,
- daß sie den Umgang mit Derive weniger belastend wahrnehmen.

Dies ergibt einen deutlich unterschiedlichen Zugang der beiden Geschlechter zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht.

Hilfe und Nutzen durch den Einsatz von DERIVE

In diesem Teil der Befragung wurden die Fragen offen gestellt, die Schüler konnten also in freier Form ihre Meinung niederschreiben. Es wurden aus den Schüleräußerungen Kategorien gebildet (Kategorien mit einer Schülerzahl kleiner 50 blieben außer Betracht).

40% der Schüler betonten den Nutzen im Einsatz von Derive hinsichtlich Arbeitserleichterung und Zeitersparnis (46% vom Typ I und 33% vom Typ II). Des weiteren wurden angeführt (nach Häufigkeit geordnet):

- die Möglichkeit der grafischen Darstellung,
- das Ausrechnen und Umformen von Termen,
- die Infinitesimalrechnung,
- die Hilfe beim Erkennen und Vermeiden von Fehlern.

6.3.2. Ergebnisse der Lehrerbefragung und Vergleich zu den Schülermeinungen

Es wurden 27 Lehrer befragt, davon waren 8 Frauen. 14 unterrichteten in Klassen des Typs 1,13 in Klassen des Typs II. Die Einschätzung des computerunterstützten Mathematikunterrichts durch die Befragten läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Zur Nutzung von DERIVE als Rechenwerkzeug

Den Schülern wird aufwendigere Rechenarbeit abgenommen, und es wird nun auch möglich, aufwendigere Rechenoperationen durchzuführen. Es wird nicht erwartet, daß weniger interessierte oder weniger begabte Schüler mehr profitieren. Es wird verneint, daß die Schüler nun nicht mehr über die mathematischen Hintergründe nachdenken müssen.

Neue Schwerpunkte im Mathematikunterricht

Man erwartet eine verstärkte Behandlung anwendungsorientierter Aufgaben. Bei der Inhaltsanalyse der Untersuchung von Robert Nocker [Nocker, 1994] ist davon in der Praxis noch nichts zu bemerken. Dazu müßten erst die nötigen Unterrichtsmaterialien entwickelt werden.

Der Zeitaufwand für aufwendiges mechanisches Rechnen wird deutlich abnehmen, daraus ergibt sich die Chance, das erworbene Wissen zu vertiefen, also auch mehr mathematisches Grundwissen zu vermitteln.

Didaktisch-methodische Möglichkeiten

Als Leitlinien werden die in der Projektbeschreibung formulierten didaktischen Prinzipien, wie etwa das White Box/Black Box-Prinzip (siehe Kapitel 4.1), angesehen. Als Chancen werden die Möglichkeiten der grafischen Darstellung im Sinne der Window-Shuttle-Technik (siehe Kapitel 4.4) angeführt. Darüber hinaus wird die Hilfe des CAS zu einem motivierenden Einstieg in ein neues Kapitel genannt, sowie die Möglichkeit, in kurzer Zeit viele Beispiele bearbeiten zu können und dadurch formale Gesetzmäßigkeiten besser zu erkennen. Erwähnt werden auch die Möglichkeiten in der Phase des Übens.

Nicht wahrgenommen wird bisher die Möglichkeit, in Form einer inneren Differenzierung die Aufgaben vom Schwierigkeitsgrad her der Leistungsfähigkeit einzelner Schüler anzupassen. Die Lehrer begrüßen einen mehr individualisierten Unterricht, tragen aber vorläufig noch zuwenig in Form methodischer Konzeption und Art der Aufgabenstellung bei. Lehrer registrieren den in der Schülerbefragung signifikant sichtbar gewordenen geschlechtsspezifischen Unterschied zwischen Schülerinnen und Schülern nicht so deutlich.

Die befragten Lehrer sind der Meinung, daß der Unterricht durch den Einsatz von Derive motivierender und interessanter gestaltet werden kann.

6.3.3. Vergleichende Darstellung von Ergebnissen der Lehrer- und Schülerbefragung

Der Vorteil von Derive gegenüber herkömmlichen Methoden (dazu zählt auch der numerische Taschenrechner) wird von beiden Gruppen anerkannt, von Lehrern allerdings in wesentlich höherem Ausmaß als von Schülern. Die Lehrer halten deutlich mehr Übung für notwendig, um die Handhabung des CAS nicht zu vergessen. Bei den Schülern gibt es einen relativ hohen Anteil, die meinen, man vergißt die Handhabung kaum mehr.

Bei der Bedeutung des CAS als Rechenhilfe besteht in der Meinung zwischen Schülern und Lehrern kein signifikanter Unterschied.

Die Meinung der Lehrer, mit Hilfe des CAS könnte das Wissen stärker vertieft werden, teilen die Schüler nicht im selben Maß. Sie würden sich umgekehrt öfter Erklärungen der Lehrer wünschen, was wiederum von den Lehrern nicht als vordringlich angesehen wird.

Im didaktisch-methodischen Bereich nehmen die Schüler die von den Lehrern diagnostizierten Verbesserungen nicht so deutlich wahr. Auch die Ansicht, das CAS würde das strukturierte und exakte Denken fördern, wird von den Lehrern optimistischer eingeschätzt.

Diese Unterschiede in der Einschätzung sind einerseits insofern zu relativieren, als die Schüler ja keine Vergleiche zu einer Behandlung desselben Themas ohne Computereinsatz anstellen können und so manchen Lern- oder Verständniszuwachs nicht explizit wahrnehmen. Außerdem ist es nicht überraschend, daß eine Verschiebung zu mehr selbsttätigen, schülerzentrierten Arbeitsformen nicht von allen Schülern positiv gesehen wird. Ein aktiver Lehrer, der alles erklärt und die wichtigsten Tätigkeiten vorführt, wird nicht ungern gesehen. Trotzdem sind diese Unterschiede in der Einschätzung des Ertrags sehr ernst zu nehmen und sollten bei weiterführenden Untersuchungen beachtet werden. Daher ist so eine »Außenevaluation« unbedingt notwendig, weil ja die beteiligten Lehrer, die sich aus Interesse und freiwillig zur Verfügung gestellt haben, Gefahr laufen, die Ergebnisse subjektiv zu positiv zu beurteilen. Die auch aus der Schülerbefragung signifikant positive Grundeinschätzung rechtfertigt aber, das Projekt positiv zu beurteilen und aufbauend auf diesen ersten Ergebnissen und den aufgetretenen offenen Fragen die Untersuchung weiterzuführen.

6.4. Ausblick

Wir, das heißt unsere Arbeitsgruppe ACDCA, haben schon mit der Planung neuer Untersuchungen begonnen. Auf der Basis unserer Erfahrungen aus dem ersten Projekt könnten wir uns folgende Forschungsgebiete vorstellen:

- Die Möglichkeiten, die sich aus der *Verfügbarkeit einer neuen Generntion algebratauglicher Taschenrechner*, wie etwa dem TI-92, ergeben. Unser Resümee aus dem ersten Projekt bezüglich der Hardwareausstattung lautet: Ideal wäre ein handlicher Algebrarechner in der Schultasche der Schüler, der mit dem CAS im EDV-Raum verknüpfbar ist. Dies scheint nun verwirklichbar zu sein. Seit Mai 1995 gibt es bereits eine Versuchsklasse in Österreich, in der jeder Schüler einen TI-92 besitzt.
- *Der Einfluß von CAS auf das Curriculum:* In Österreich wird momentan an einer vollkommenen Neuorientierung des Lehrplanes gearbeitet. Kennzeichen sind: Stärkere Betonung von Schlüsselqualifikationen wie Problemlösefähigkeit, Kooperationsfähigkeit usw. Förderung des vernetzten Denkens durch Forcieren des fächerübergreifenden Unterrichts. Das Lehrerteam soll eine zentralere Rolle erhalten. Mehr pädagogische Autonomie für die einzelne Schule auch bei der Lehrplangestaltung, den Stundentafeln und den schulspezifischen Schwerpunktsetzungen. Der neue Lehrplan soll dafür nur den Rahmen abstecken. Aus dieser Rücknahme der Gleichschaltung ergeben sich aber auch Chancen, schulstandortspezifisch Schwerpunkte im Bereich Computernutzung zu setzen.
- *Die Lernmedien der Schüler:* Momentan ist das zentrale Lernmedium der Schüler das Heft. Das Buch wird eher nur als Beispielreservoir verwendet. Wir erwarten uns für die Zukunft eine neue Art von Lernmedium, das aus einer Verbindung von beschriebenem und bedrucktem Papier sowie Computersoftware besteht. Ausgehend von einem Kern, der dem Schüler zur Verfügung gestellt wird, sollte dieses Lernmedium durch eigenständige Arbeit des Schülers wachsen und dank der Möglichkeiten moderner Softwaresysteme jederzeit veränderbar sein und dadurch den individuellen Lerngewohnheiten und Problemen des einzelnen Schülers angepaßt werden können.

Im Vorwort haben wir die Idee, dieses Buch zu schreiben, als Abenteuer bezeichnet. Wie diese Pläne zeigen, haben wir auch für die Zukunft eine Menge Abenteuer vor. Der Mathematikunterricht der Zukunft wird durch die Weiterentwicklung des Computers sicher nicht überflüssig, sonden-eher viel interessanter und sinnvoller. Die ehrbare Zunft der Rechenmeister ist im Mittelalter deshalb ausgestorben, weil die Menschen gelernt haben selbst zu rechnen. Die Zunft der Mathematiklehrer wird nicht aussterben, wenn sie sich nicht ausschließlich als Zunft von Rechenmeistern sieht und sich der Herausforderung des Computerzeitalters stellt und die Möglichkeiten zur Verbesserung des Mathematikunterrichtes nutzt.

Verzeichnis der Beispiele

Literaturverzeichnis

BÖHM G.: Teaching Mathematics with DERIVE, Chartwell-Bratt Ltd, 1992, ISBN 0-86238-319-6.

BUCHBERGER, B.: Teaching Math by Software. Paper of the RISC-Institut of the Johannes Keppler University Linz, 1992.

ASPETSBERGER, K./FUCHS, K./KLINGER, W.: DERIVE Beispiele und Ideen für den Mathematikunterricht. ACDCA Report Nr. 2. Zentrum für Schulentwicklung Klagenfurt, 1994. ISBN 3-9500283-1-5.

BARZEL, B.: Taylorreihenentwicklung mit DERIVE. In: Mathematik betrifft uns, 6/91, Bermoser + Höller Verlag GmbH, Aachen 1991.

ASPETSBERGER, K./FUCHS, K.: DERIVE im Mathematikunterricht: Zur Organisation von Beobachtungseinheiten; Modultechnik im Mathematikunterricht mit CAS. In: MÜLLER, K.P.: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 29.Tagung für Didaktik der Mathematik, 6.-10.März 1995, Kassel, für die GDM herausgeg. von K.P.Müller, Franzbecker, Hildesheim, 1995

BRUNER, J.S.: Der Prozeß der Erziehung, Berlin-Verlag und Schwann, Berlin - Düsseldorf, 1970 (englisch bereits 1960 erschienen).

BUCHBERGER, B./LICHTENBERGER, F.: Mathematik für Informatiker I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981. ISBN 3-540-10417-8.

BUCHBERGER, B./KUTZLER B.: Computeralgebra für den Ingenieur. In: Rechnerorientierte Verfahren, Mathematische Methoden in der Technik 4, S. 25. Teubner Verlg, Stuttgart, 1986. ISBN-3-519-02617-1.

BUCHBERGER, B.: What is Mathematics? Notes of a Talk for High School Teachers. Research Institut for Symbolic Computation, Hagenberg, Austria, 1994.

BÜRGER, H./FISCHER, R./MALLE, G.: Mathematik Oberstufe 3 - Arbeitsbuch, HPT Verlag, Wien, 1991, ISBN 3-209-01137-0.

CLAUS, H.J.: Einführung in die Didaktik der Mathematik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1989.

DESCARTES, R.: Discours de la méthode, Französisch-Deutsch, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1990

DÖRFLER, W.: Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 21, S. 51. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991. ISBN 3-209-01452-3.

DORNINGER, D./WIESENBAUER, J.: Mathematische Modelle in der Chemie. Skriptum des Instituts für Algebra an der TU Wien, 1994.

DORNINGER, D.: Optimierungsverfahren im Mathematikunterricht. Skriptum zur Lehrerfortbildung, Institut für Algebra, Technische Universität Wien, 1988.

DORNINGER, D./KARIGL, G.: Mathematik für Wirtschaftsinformatiker, Band II, S. 7. Springer Verlag, Wien-New York, 1988. ISBN 3-211-82107-4.

DORNINGER, D.: Aktuelle Anwendungen der Mathematik im Unterricht. Skriptum zur Lehrerfortbildung, S 25. Institut für Algebra, Technische Universität Wien 1985.

DRIJVERS, P.: The Use of Graphics CAlculators and Computer Algebra Systems: Differences and Similarities. In: The International Derive Journal, Number 1, P. 71, 1994. ISBN 0-13-510780-6.

FISCHER, R./MALLE, G.: Mensch und Mathematik. B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich 1985. ISBN 3-411-03117-4.

FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. KLETT Studienbüchr, Band 1, S 24, 1977.

GROGGER, G.: Der Einsatz von DERIVE im Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen (Gymnasien) in Österreich. ZSE Report Nr. 6. Zentrum für Schulentwicklung, Graz, 1995.

HEUGL, H.: Neue Wege im Mathematikunterricht unter dem Einfluß des Computers, Dissertation, TU Wien, 1989

HEUGL, H.: Computeralgebrasyteme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (Gymnasien). In: Reichel, H. C.: Computereinsatz im Mathematikunterricht. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich, 1995. ISBN 3-411-17281-9.

HEUGL H./Kutzler B.: DERIVE in Education, Chartwell-Bratt Ltd, 1994, ISBN 0-86238-351-X.

KAISER, H/NÖBAUER; W.: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1984. ISBN 3-209-00498-6.

KIRSCH, A.: Über Ziele der "neuen Mathematik" in der Schule. In: Westermanns Pädagogische Beiträge, Heft 3, S 164, 1974.

KÖHLER, R.: Computeralgebrasysteme im mathematischen Begriffsbildungsprozeß, Tagungsband zu den DERIVE DAYS DÜSSELDORF, 19.-21. April 1995, Landesmedienzentrum Rheinland-Pfalz, Hofstr.257c, D-56077 Koblenz, 1995

KUTZLER, B.: Symbolrechner TI-92. Addison-Wesley Publishing Company, Bonn, 1996. ISBN 3-89319-952-7.

LAUB J./HRUBY E.: Mathematisches Arbeitsbuch 3, HPT Verlag, Wien, 1993, ISBN 3-209-01476-9.

LECHNER, J.: Der Integraph, CA-Report #5, ACDCA, Wien, 1996

LEHMANN, E.: Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen. kolleg text, J. B. Metzler, Stuttgart 1990. ISBN 3-476-20450-2.

LEITNER, L. Hrsg.: Lehrplan-Service Mathematik AHS-Oberstufe. Österreichischer Bundesverlag, Wien, 1991.ISBN 3-215-07374-9.

MAUVE, R./ MOOS, J.P.: Mathematik mit DERIVE, Dümmler, Bonn, 1993

MÜLLER, K.P.: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 29.Tagung für Didaktik der Mathematik, 6.-10.März 1995, Kassel, für die GDM herausgeg. von K.P.Müller, Franzbeker, Hildesheim, 1995

NOCKER, R.: Studie: Veränderungen im Methodeneinsatz. ACDCA Report Nr. 3. Pädagogisches Institut Hollabrunn, Österreich, 1994.

OSSIMITZ, Materialien zur Systemdynamik, Bd.19 der Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, HPT, Wien, 1990

PAPERT, S.: Mindstorms - Kinder, Computer und Neues Lernen. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1982. ISBN 3-7643-1273-4.

POSTEL, H/KIRSCH, A./BLUM, W.: Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel, Schroedel Schulbuchverlag, Hannover, 1991

REICHEL, H.C.: Lehrbuch der Mathematik 7. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991.

REICHEL, H.-C.: Computereinsatz im Mathematikunterricht, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1995

REICHEL, H.-C./HUMENBERGER, H.: Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht. Endbericht eines Forschungsprojektes des Bundesministeriums für Unterricht, Wien 1996.

REICHEL, H.-C./ MÜLLER, R./ HANISCH, G./ LAUB J.: Lehrbuch der Mathematik 7 (11.Schulstufe) , Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991.

SOFT WAREHOUSE, Inc. Honolulu, Hawai, U.S.A, User Manual DERIVE, Version 3, A Mathematical Assistent for Your Personal Computer, 1994.

SVECNIK, E.: Der Einsatz von DERIVE im Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen (Gymnasien) in Österreich. ZSE Report Nr. 12. Zentrum für Schulentwicklung, Graz, 1995.

SZIRUCSEK, E/DINAUER, G./UNFRIED/H.; SCHATZL, H.: Mathematik 7, Lehrbuch Mathematik 11.Schulstufe, HPT, Wien, 1991

TIMISCHL, W.: Biomathematik. Springer Verlag, Wien-New York, 1988. ISBN 3-211-82093-6.

VESTER F.: Unsere Welt - ein vernetztes System, DTV, München, 1993, ISBN 3-423-30078-7.

WEIGAND, H.-G.: Überlegungen zum Verhältnis von Mathematik- und Informatikunterricht. In: MNU 46.Jahrgang, Heft 7, Dümmler, Bonn, 1993

WILLIAMSON, K.: Derive and 16-19 Mathematics. In: BÖHM, J. Hrsg.: Teaching Mathematics with Derive. Chartwell-Bratt, London 1993.

WITTMANN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig 1981. ISBN 3-528-58332-0.

ZEILER D.: Computerunterstützter Mathematikunterricht an Allgemeinbildenden Höheren Schulen in Österreich, Diplomarbeit bei Univ.Prof.Dr. Reichel C., Wien, 1995.

ZIEGENBALG, J.: Programmiersprachen als Träger von Grundideen der Informatik, In: MNU, 37.Jahrgang, Heft 7, Dümmler, Bonn, 1984