

Lernspirale zum Thema Einführung in die Integralrechnung

8. Klasse

von
Evelyn Stepancik und Markus Hohenwarter
überarbeitet von **Christina Gassner**

zum Lernpfad von
Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck und Andreas Lindner

Themenbereich/Inhalte:	
Einführung in die Integralrechnung	
Fachliche	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Flächenberechnung • Funktionsgraphen interpretieren können • Geometrische Summe • Grenzwert • Termumformungen • Sicherer Umgang mit Polynomfunktionen • Differenzieren • Beweisschritte nachvollziehen 	<ul style="list-style-type: none"> • Die Problematik der Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen kennen. • Unter- und Obersummen charakterisieren können. • Flächeninhalte näherungsweise mit Unter- und Obersummen berechnen können. • Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten können. • Das bestimmte Integral mit Hilfe des Computers berechnen können. • Den Unterschied zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt erklären können. • Den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhaltsfunktionen kennen. • Stammfunktionen bestimmen können. • Das bestimmte Integral mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen können. • Die Grundideen des Hauptsatzes nachvollziehen können.

Methodische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • Informationen selbstständig schriftlich festhalten können • mit Partner und in Gruppe arbeiten können • Methoden zur Partner- und Gruppenfindung kennen • Ergebnisse präsentieren können 	<ul style="list-style-type: none"> • mathematische Inhalte selbstständig erarbeiten können • über mathematische Inhalte sprechen können • wichtige Informationen filtern und schriftlich festhalten können • Eigenverantwortung beim Lernprozess stärken • elektronische Lernhilfen sinnvoll nutzen können

Technische	
Voraussetzungen:	Ziele:
<ul style="list-style-type: none"> • PC mit Internetzugang oder PC mit dem installierten Lernpfad Einführung in die Integralrechnung für jede/n SchülerIn • Beamer • Dateien öffnen, schließen und speichern können • auf einer Webseite navigieren können • Grundfertigkeiten im Umgang mit Maxima oder Geogebra 	<ul style="list-style-type: none"> • Funktionen mit GeoGebra zeichnen können • Unter- und Obersummen mit GeoGebra berechnen können • Bestimmtes und unbestimmtes Integral mit Geogebra oder Maxima berechnen können • Interaktive Konstruktionen zur Visualisierung von Zusammenhängen und Eigenschaften nutzen können • technische Anleitungen (Eingabeanweisungen) selbstständig nutzen können

Makrospirale zur Einführung der Integralrechnung

Im Folgenden ist ein Ablauf inkl. Arbeitsinseln für 5 Unterrichtsstunden ausgearbeitet. 3 weitere Unterrichtsstunden sind als *eventuell* gekennzeichnet und können zur Vertiefung bestimmter Inhalte eingeschoben werden.

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren

A 00	Einführung
------	------------

Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten

A 01	Ober- und Untersumme
A 02	Bestimmtes Integral
A 03	Flächeninhalts- und Stammfunktion
A 04	Beweis zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (eventuell)

Komplexere Anwendungs-/Transferaufgaben

A 05	Übungen zur Integralrechnung
------	------------------------------

Arbeitsmittel für alle Arbeitsinseln sind PC und der Lernpfad Einführung in die Integralrechnung sowie Heft für Mitschriften.

Mikrospirale A00: Einführung

Beginn der 1. Unterrichtseinheit

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Der Lernschritt <i>Flächeninhalt eines Grundstücks</i> wird in Einzelarbeit durchgeführt und die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	EA	5'	
2	Zu zweit werden die Ergebnisse der Einzelarbeit besprochen.	PA	3'	
3	Der Lernschritt <i>Wasserverbrauch während einer Fußballübertragung</i> wird in Partnerarbeit durchgeführt, die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	PA	10'	
4	Die Ergebnisse werden mit einem anderen Paar verglichen.	GA	5'	

Zurück zur [Makrospirale](#)

Mikrospirale A1: Ober- und Untersumme

1	Der Lernschritt <i>Unter- und Obersumme</i> (interaktive Übung) wird in Einzelarbeit durchgeführt und die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	EA	10'	
2	Zu zweit werden die Ergebnisse der Aufgabe besprochen und anschließend werden diese mit den Erklärungen auf der Seite <i>Definition</i> verglichen. Die wichtigsten Erkenntnisse werden im Heft notiert.	PA	10'	
3	Als Hausübung kann die Aufgabe <i>Unters- und Obersumme GeoGebra</i> gelöst werden. GeoGebra-Dateien werden gespeichert und/oder ausgedruckt.			

Beginn der 2. Unterrichtseinheit

4	Zu zweit werden die Übungen <i>Unter- und Obersumme per Hand</i> gelöst und mit den Lösungen verglichen.	PA	10'	
---	----------------------------------------------------------------------------------------------------------	----	-----	--

Zurück zur [Makrospirale](#)

Mikrospirale A2: Bestimmtes Integral

Aktivierung des Begriffs „Grenzwert“.

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Informationssuche mit Bewegung zum Begriff „Bestimmtes Integral“. Pro ausgehängter Information eine Gruppe. Hinweis: Die Arbeitsblätter der SchülerInnen müssen stets verdeckt hingelegt werden.	EA	10'	Definition „bestimmtes Integral“ 2x aufhängen. Lückentext (S.10) kopieren.
2	Flächenberechnung: Die SchülerInnen bearbeiten einzeln das <i>Musterbeispiel</i> mit GeoGebra oder Maxima.	EA	5'	
3	Gruppenrallye: Flächenberechnung: In 4er-Gruppen werden die Beispiele (a) bis (e) arbeitsteilig gelöst und die Vorgangsweise besprochen.	GA	10'	
4	Die Ergebnisse werden von einer anderen Gruppe anhand der Lösungen verbessert und bewertet.	GA	5'	Lösung mit Folie oder Beamer vorbereiten
5	5 SchülerInnen präsentieren je ein Beispiel.	Plenum	10'	

Eventuell: Unterrichtseinheit zur Vertiefung des Grenzübergangs von Unter-, Obersummen zum bestimmten Integral				
8	Bestimmtes Integral per Hand: SchülerInnen mit einer Katalognummer der ersten Klassenhälfte bearbeiten in Partnerarbeit das Arbeitsblatt „lineare Funktion“ aus der Übung, die anderen bearbeiten das Arbeitsblatt „quadratische Funktion“. Kontrolle durch Vergleich mit einem anderen Paar.	PA	10'	Kopien der Arbeitsblätter vorbereiten
9	Kugellager: Austausch der Beispiele <ul style="list-style-type: none"> - Gruppe 1 erklärt Arbeitsblatt „lineare Funktion“ - Gruppe 2 wiederholt Vorgangsweise für Beispiel 1 - Gruppe 2 erklärt Arbeitsblatt „quadratische Funktion“ - Gruppe 1 wiederholt Vorgangsweise für Beispiel 2 	Plenum	10'	Eventuell Arbeitsblätter über Beamer erklären
10	In 3er-Gruppen wird je ein Lernplakat zum bisher erworbenen Wissen (Ober-, Untersumme, bestimmtes Integral) angefertigt.	GA	15'	Papier und Stifte für Plakate
11	Museumsrundgang: Jedes Mitglied einer Gruppe erhält eine bestimmte Farbe zugeteilt. Neue Gruppenbildung nach Farben. Jede neue Gruppe wird einem Plakat zugeordnet. Vor jedem Plakat erklärt der/die ExpertIn die Inhalte. Wechsel der Gruppen von einem Plakat zum nächsten.	GA	15'	
Beginn der 3. Unterrichtseinheit				
12	Negative Fläche: Die SchülerInnen bearbeiten die Übung <i>Ein negativer Flächeninhalt?</i> Die Fragestellungen werden im Heft beantwortet.	EA	5'	
13	Die SchülerInnen besprechen ihre Ergebnisse und vergleichen ihre Aufzeichnungen mit den Erklärungen auf den Seiten <i>Integral < 0</i> , <i>Integral = 0</i> und <i>Unterschied</i> . Fehlende Informationen werden im Heft ergänzt.	PA	10'	

Zurück zur [Makrospirale](#)

Mikrospirale A3: Flächeninhalts- und Stammfunktion

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die Lernschritte <i>Flächeninhaltsfunktion</i> (inkl. <i>Fortsetzung</i>) und <i>Stammfunktion</i> werden in Partnerarbeit durchgeführt und alle wichtigen Informationen und Ergebnisse im Heft festgehalten.	PA	20'	
2	<i>Übung 1</i> wird alleine gelöst. Die Ergebnisse werden im Heft festgehalten.	EA	10'	
3	Die Seite <i>Integrationsregeln</i> wird im Anschluss an die Übung durchgearbeitet. Ein Merkzettel mit Integrationsregeln wird von der Lehrperson ausgeteilt und ins Heft eingeklebt.	EA	5'	Merkzettel Integrationsregeln (siehe Anhang) ausdrucken
Beginn der 4. Unterrichtseinheit				
4	Gruppenrallye: <i>Übung 2</i> : In 4er-Gruppen werden die Beispiele (a) bis (h) arbeitsteilig gelöst und die Vorgangsweise besprochen.	GA	20'	
5	Zufällig gewählte SchülerInnen präsentieren je ein Beispiel.	Plenum	12'	Lösung mit Folie oder Beamer vorbereiten
6	Zu zweit wird die Übung <i>Flächenberechnung</i> bearbeitet. Bei Problemen wird mit den Hefteinträgen der Flächenberechnung mit Hilfe von GeoGebra oder Maxima (siehe 2. Unterrichtsstunde) verglichen.	PA	15'	

Zurück zur [Makrospirale](#)

Mikrospirale A4: Beweis zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Eventuell: Zwei Unterrichtseinheiten zum Beweis des Hauptsatzes
Beginn der 1. Unterrichtseinheit zum Beweis des Hauptsatzes

Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Teil a: Die SchülerInnen erarbeiten den ersten und zweiten Schritt des Beweises zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Existenz von Stammfunktionen) in Einzelarbeit und dokumentieren diese möglichst ausführlich im Heft.	EA	15'	Kopie der GeoGebra Konstruktion
2	Die SchülerInnen vergleichen und besprechen die Ergebnisse der ersten beiden Aufgabenstellungen. Zu zweit erarbeiten die SchülerInnen die restlichen Schritte und dokumentieren ihr Vorgehen möglichst ausführlich im Heft.	PA	25'	Kopie der GeoGebra Konstruktion
3	Der gesamte Beweis wird in allen seinen Schritten nochmals besprochen. Die interaktive Zusammenfassung wird Schritt für Schritt abgespielt und mit den eigenen Aufzeichnungen verglichen.	PA	10'	
	Hausübung: Die SchülerInnen verfassen einen zusammenhängenden Text, indem sie mit eigenen Worten den gesamten Beweis (Teile a und b) ausführlich wiedergeben.			
Eventuell: Zwei Unterrichtseinheiten zum Beweis des Hauptsatzes Beginn der 2. Unterrichtseinheit zum Beweis des Hauptsatzes				
5	Zu zweit werden die Ergebnisse der Hausübung verglichen.	PA	7'	
6	Zwei SchülerInnen präsentieren ihre Hausübung.	Plenum	7'	Eventuell Beamer für GeoGebra Konstruktionen
7	Die SchülerInnen bearbeiten die Aufgabenstellung der <i>anschaulichen Begründung</i> (Hauptsatz Teil b) und dokumentieren diese im Heft.	EA	7'	

8	Lernplakat zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	GA	20'	
9	Stafettenpräsentation eines Lernplakates	Plenum	7'	

Zurück zur [Makrospirale](#)

Mikrospirale A5: Übungen zur Integralrechnung

Beginn der 5. Unterrichtseinheit				
Schritt	Lernaktivitäten der SchülerInnen	Sozialform	Zeit	Arbeitsmittel
1	Die SchülerInnen bearbeiten in Partnerarbeit die Übung <i>Grundstück</i> und entweder die Übung <i>Satellit</i> oder <i>Hund</i> .	PA	20'	
2	Je zwei Paare gehen zusammen und besprechen ihre Lösungen.	GA	5'	
3	Die SchülerInnen lösen in Partnerarbeit die Beispiele zur <i>Integration mit unbekannten Grenzen</i> .	PA	10'	
4	Die SchülerInnen führen in Einzelarbeit <i>Quiz 1</i> und <i>Quiz 2</i> durch.	EA	15'	

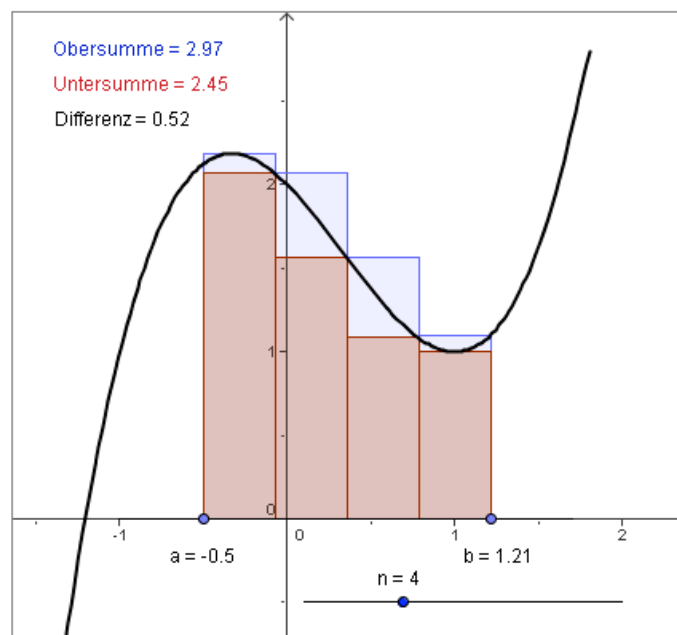
Zurück zur [Makrospirale](#)

Lückentext – Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral

In den bisherigen Übungen hast du gesehen, dass für die _____ unter der Funktion $f(x)$ immer gilt:

_____ \leq Fläche $A \leq$ _____



Bei wachsender Anzahl _____ der Rechtecke wird die Breite Δx jedes Rechtecks immer _____ und Unter- und Obersumme nähern sich _____ an. Daher definieren wir die _____ unter der Funktion $f(x)$ im _____ als _____ von Unter- und Obersumme: _____

Diese Fläche heißt **bestimmtes Integral** von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$, das wir so schreiben:

Das Integralzeichen _____ stellt ein stilisiertes "S" dar und steht für "Summe". Das " dx " steht für die _____ eines Rechtecks wenn _____ gegen _____ geht.

Diese Schreibweise des bestimmten Integrals soll verdeutlichen, dass es sich um den Grenzwert einer _____ handelt.

Integrationsregeln

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Integrationsregeln

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$