

## Didaktischer Kommentar: Einführung in die Integralrechnung

Ihre Schülerinnen und Schüler können mit diesem Lernpfad die grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge der Integralrechnung entdecken. Ausgehend vom Wasserverbrauch während einer Fußballübertragung wird das bestimmte Integral über Unter- und Obersummen erarbeitet. Begleitet von vielen Übungen führt der Weg über Flächeninhaltsfunktionen zum unbestimmten Integral und schließlich zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Abschließend kann das erlernte Wissen anhand einiger Aufgaben und Quizzes angewendet und geübt werden.

Kurzinformation	
Schulstufe	12. Schulstufe
Dauer	4 - 6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Java-Applets, Dynamische Geometrie Software (GeoGebra), Computeralgebrasystem (Maxima)
Technische Voraussetzungen	Java, Internet
Autoren	Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck, Andreas Lindner (2005)
Überarbeitet	Christina Gassner (2011)

### Vorraussetzungen

- Technische Voraussetzungen: Java (kostenlos von [www.java.com](http://www.java.com)), Internet; eventuell: GeoGebra (kostenlos von [www.geogebra.at](http://www.geogebra.at)), Maxima (kostenlos von <http://maxima.sourceforge.net/>)
- Vorwissen der SchülerInnen: Differentialrechnung. Vorkenntnisse zu GeoGebra oder Maxima sind wünschenswert, aber nicht unbedingt erforderlich.

### Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Einstieg (Wasserverbrauch, Flächeninhalt eines Grundstücks)	Alltägliche Beispiele für die Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen nennen können.
Unter- und Obersumme	Unter- und Obersummen charakterisieren können. Flächeninhalte näherungsweise mit Unter- und Obersummen berechnen können.
Bestimmtes Integral	Das bestimmte Integral als Grenzwert von Unter- und Obersummen definieren können. Das bestimmte Integral mit Hilfe des Computers berechnen können.
„Negative“ Fläche	Den Unterschied zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt erklären können.
Flächeninhaltsfunktion	Den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhaltsfunktionen erklären können.
Stammfunktion	Stammfunktionen bestimmen können. Das bestimmte Integral mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen können.
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	Die Grundideen des Hauptsatzes nachvollziehen können.
Übungen	Das bestimmte Integral zur Lösung von Beispielen in verschiedenem Kontext anwenden können.

## **Didaktischer Hintergrund**

In diesem Lernpfad wird die Integralrechnung über das Problem der Berechnung krummlinig begrenzter Flächen eingeführt. Ausgegangen wird dabei von einem ungewöhnlichen und motivierenden Beispiel: dem Wasserverbrauch während eines Fußballspiels. Mit Hilfe der interaktiven Materialien können die Schülerinnen und Schüler viele wichtige Zusammenhänge selbsttätig entdecken. Um den Lernertrag zu sichern gibt es viele Übungen, in denen sie das eben Gelernte aktiv anwenden können.

## **Genderaspekte**

Neben einer genderbewussten Sprache werden im Lernpfad an vielen Stellen rein mathematische Inhalte durch interaktive Übungen erarbeitet, welche durch den hohen Experimentieranteil sowohl Mädchen als auch Burschen ansprechen sollen. Weiters lassen die vorgeschlagenen Lernmethoden (wie Gruppenrallye, Kugellager) unterschiedliche Lernprozesse wie kooperatives und integratives Lernen zu, welche beide Geschlechter gleichermaßen ansprechen.

Bei den Anwendungsbeispielen wurde versucht, Aufgaben aus dem mittleren Raum zu finden, wobei parallel mehrere Aufgaben zur Auswahl stehen. Schülerinnen und Schüler können so auswählen, welches Thema sie mehr anspricht: Grundstück, Satellit oder Hund.

## **Kompetenzen**

### Rechnen, Operieren

Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können. (Kapitel Stammfunktion)

Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können. (Übung Grenzwert per Hand)

Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können. (Anwendungsbeispiele)

### Interpretieren

Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können. (Kapitel Bestimmtes Integral, Kapitel Negative Fläche)

Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können. (Anwendungsbeispiele)

### Argumentieren, Begründen

Den Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nachvollziehen können. (Kapitel Hauptsatz)

### Transferieren

Die bereits bekannten Differentiationsregeln anwenden, um Integrationsregeln zu erarbeiten. (Kapitel Stammfunktion)

## **Einsatz im Unterricht**

Bei den Materialien zu diesem Lernpfad finden Sie drei konkrete Vorschläge samt Ablaufplan zum Einsatz des Lernpfades im Unterricht, selbstverständlich steht es Ihnen frei, diese Vorschläge Ihren eigenen Bedürfnissen und Vorlieben anzupassen.

*Lernspirale nach Klippert:* Nach dem Konzept des Eigenverantwortlichen Arbeitens und Lernens (EAV) wurde eine Lernspirale erstellt, bei der die Schülerinnen und Schüler in verschiedenen Sozialformen und mit verschiedenen Methoden den Lernpfad erarbeiten.

*Arbeitsplan:* Der Arbeitsplan stellt eine Übersicht der Aufgabenstellungen dar, welche die Schülerinnen und Schüler bewerkstelligen sollen. Zu jedem Punkt des Arbeitsplans sind die Sozialform und die Art der Kontrolle angegeben, so dass Schülerinnen und Schüler mit diesem Arbeitsplan den Lernpfad großteils ohne weitere organisatorische Anweisungen der Lehrperson erarbeiten können.

*Unterrichtsvorschlag 3:* Dieser Vorschlag basiert auf der Annahme, dass nur ein Klassenraum mit einem Computer und Projektor zur Verfügung steht. Die Lehrperson benützt die Applets des Lernpfades für Erklärungen, weiters werden immer wieder Aufgabenstellungen des Lernpfades projiziert, sodass diese von allen Schülerinnen und Schülern in verschiedenen Sozialformen bearbeitet werden können.

Beim Einsatz dieses Lernpfades stehen Sie als Lehrperson Ihren Schülerinnen und Schülern als Moderator mit Hilfestellungen zur Seite und organisieren den Ablauf (z.B. Wechsel der Sozialform, Gruppeneinteilung, ...). Für den Einsatz des Lernpfades im Unterricht sind verschiedene Szenarien denkbar:

- Einzelarbeit an einem PC (z.B. Arbeitsplan)
- Partnerarbeit an einem PC
- Stationenbetrieb mit mehreren PCs, bei denen jede Station aus einem Teil des Lernpfades besteht
- Lernpfad als Unterstützung der Lehrperson, wenn in der Klasse nur ein PC mit Projektor zur Verfügung steht (z.B. Unterrichtsvorschlag 3).

Es ist nicht notwendig, dass der Lernpfad in aufeinander folgenden Stunden bearbeitet wird. In der Regel wird dies von der Verfügbarkeit von Computern abhängen. Inhaltlich steht es Ihnen frei, bestimmte Teile aus dem Lernpfad auszuwählen, die Reihenfolge ihrer Behandlung im Unterricht zu verändern oder Ihre Schülerinnen und Schüler nur bestimmte Übungen bearbeiten zu lassen. Beispielsweise können Sie an geeigneter Stelle auch Übungen zum Thema "Flächeninhalte zwischen den Graphen zweier Funktionen" einbauen. In diesem Lernpfad wechseln sich Arbeiten am Computer und im Heft ab. Daher sollte auf den Tischen neben den Computern genügend Platz zum Schreiben vorhanden sein. Wenn Sie möchten, können Sie Ergebnisdateien, die mit GeoGebra oder Maxima erzeugt wurden, auch über eine Lernplattform abgeben lassen. Auf diese Art könnten Teile des Lernpfades auch als Hausübung gegeben werden.

### **Kombination der Medien**

In dem vorliegenden Lernpfad wird versucht, durch den Einsatz von interaktiven Internetseiten, der Programme GeoGebra und Maxima Ihren Schülerinnen und Schülern ein erforschendes Lernen von Mathematik zu ermöglichen. Die neu gewonnenen Erkenntnisse sollen im Anschluss daran durch händisches Rechnen vertieft und gefestigt werden. Besonders wichtig für die Ergebnissicherung sind neben der Arbeit am Computer daher auch Diskussionen in Kleingruppen und mit der ganzen Klasse.

### **Lernmedien der Schülerinnen und Schüler**

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit diesem Lernpfad nicht nur am Computer. Sie sollen auch Definitionen und Ergebnisse von Übungen im Heft festhalten - auf diese Art kann ein Lerntagebuch zur Integralrechnung entstehen.

### **Leistungsbeurteilung**

Die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler sollten als Basis für Diskussionen und Zusammenfassungen in Gruppen oder der ganzen Klasse verwendet werden, wobei die Mitarbeit der einzelnen Schülerinnen und Schüler bewertet werden kann. Weitere Möglichkeiten zur Leistungsbeurteilung sind das Absammeln der Hefte, entsprechende Schularbeitsbeispiele, Hausübungsbeispiele in einer Lernplattform oder auch eine schriftliche Überprüfung der Mitarbeit am Ende des Lernpfades.

Die Leistungsbeurteilung hängt natürlich sehr stark davon ab, wie Sie den Lernpfad im Unterricht einsetzen. So wird sich die Beurteilung prinzipiell beim Einsatz einer Lernplattform auf andere Kriterien stützen müssen als beim Einsatz des Lernpfades zur Wiederholung und Festigung eines schon großteils bekannten Lerninhalts.