GeoGebraCAS –
Didaktisches Computeralgebrasystem

gemeinsames Projekt von GeoGebra, Österreichisches GeoGebra institut,
RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und ACDCA

in Zusammenarbeit mit
der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich,
und der Johannes Kepler Universität Linz,

unterstützt vom Bundesministerium für
Unterricht, Kunst und Kultur

Endbericht

Juni 2010

Verfasst von:
Peter Hofbauer, Markus Hohenwarter, Walter Klinger, Andreas Lindner, Evelyn Stepancik

Unter Mitarbeit von:
Alfred Nussbaumer, Anton Nagl, Gabriele Bleier, Gerhard Egger, Günter Redl, Günter Schödl, Heidi Metzger-Schuhäker, Heike Wiesner, Heiner Juen, Helmut Heugl, Irma Bierbaumer, Jochen Maierhofer, Josef Böhm, Josef Lechner, Judith Hohenwarter, Matthias Kittel, Walter Wegscheider

Und den Testlehrer/innen:
Alfred Eisler, Beate Thonhauser, Eduard Engler, Egmond Vogel, Elisabeth Schmidt, Georg Frühwirth, Gerhard Egger, Günter Kienreich, Günter Redl, Günter Schödl, Josef Lechner, Jutta Braun, Klinger Walter, Lindner Andreas, Nagl Anton, Willhelm Haller, Wolfgang Fischer

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Seit im Jahr 2006 die Weiterentwicklung von DERIVE eingestellt und der TI Nspire mit wenig Erfolg am österreichischen Markt eingeführt wurde, herrschte in Österreich im allgemeinbildenden und teilweise auch im berufsbildenden Schulwesen Verunsicherung hinsichtlich des schon lange erfolgreich bestehenden Einsatzes von symbolischen technologischen Hilfsmitteln im Mathematikunterricht. Parallel dazu hat sich das österreichische Open Source Produkt GeoGebra rasant von Österreich aus über die ganze Welt verbreitet. Im Zuge dieser Verbreitung wurde die dynamische Geometriesoftware GeoGebra um eine dynamische Tabellenkalkulation neben der bereits breit akzeptierten dynamischen Geometrie ergänzt. Gleichzeitig mit diesen Entwicklungen rund um GeoGebra wurde versucht – neben den bereits etablierten - weitere Computeralgebrasysteme (z. B.: Maxima, WIRIS) im schulischen Kontext zu erproben. Keines dieser Systeme konnte sich jedoch flächendeckend durchsetzen! Keines dieser Systeme erfüllte vollständig und zufriedenstellend die didaktischen Erwartungen der erfahrenen CAS-Community! Wenige der neuen Computeralgebrasysteme konnten sich an einzelnen Standorten etablieren. Daher lag es nahe und fast auf der Hand, das mutige Unternehmen – GeoGebra mit einem didaktischen CAS auszustatten – zu starten.

Bei einem Treffen am 16.9.2009 in Linz wurde die Weiterentwicklung von GeoGebra in organisatorischer und inhaltlicher Hinsicht diskutiert und ein erster – ambitionierter – Zeitplan festgelegt.

Zur Mitarbeit an diesem Projekt erklärten sich folgende Initiativen bereit:
GeoGebra, Österreichisches GeoGebra Institut, RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und ACDCA.
Teilnehmer/innen dieses Treffens waren Dr. Anita Dorfmayr (PH NÖ RFDZ, UNI WIEN), Dr. Markus Hohenwarter (GeoGebra), Dr. Judith Hohenwarter (GeoGebra), Mag. Walter Klinger (PH NÖ RFDZ, ACDCA), Mag. Andreas Lindner (PH NÖ RFDZ – Leitung AGI), FI Mag Alfred Nussbaumer (LSR f NÖ).

Dabei wurde auch festgelegt, mit welcher Blickrichtung die Entwicklung eines didaktischen CAS erfolgen soll:

> *Unter einem didaktischen CAS verstehen wir ein CAS, das nicht nur möglichst exakte mathematische Bearbeitung ermöglicht, sondern auch durch Benutzerfreundlichkeit und einer geeigneten Grundkonzeption der Oberfläche den Lernprozess von Schüler/innen (besonders ab der 3 Klasse – 7. Schulstufe) bestmöglich unterstützt. Es sollen also in möglichst vielen Bereichen (beginnend bei der elementaren Algebra) Zugänge zur mathematischen Begriffsbildung und zu mathematischen Denk- und Modellbildungsprozessen unterstützt werden. Die damit mögliche Interaktion zwischen geometrischer und algebraischer Sichtweise mathematischer Inhalte soll schon frühzeitig die unterschiedlichen Begabungen der Schüler/innen während des mathematischen Lernprozesses ansprechen.*

Das Ergebnisprotokoll wurde dem bm:ukk übermittelt und daraus ein Werkvertrag entwickelt, der am 23.11.2009 von MR DI Dr. Christian Dorninger und Mag. Walter Klinger unterzeichnet wurde.

Eine wesentliche Unterstützung und Erleichterung für die Realisierung dieses engagierten Vorhabens war die etwa zeitgleich erfolgende Berufung von Dr. Markus Hohenwarter als Professor für Didaktik der Mathematik an die Johannes Kepler Universität Linz. Damit war klar, dass die direkte Zusammenarbeit mit dem GeoGebra-Entwickler/innen-Team nun wesentlich leichter von statten gehen kann.

All diese Voraussetzungen machen deutlich, dass das eindeutig und erklärte Ziel dieses Projekts – nämlich die Vorbereitung eines neuen Standards für einen didaktisch fundierten Technologieeinsatz im Mathematikunterricht in Österreich mit internationaler Blickrichtung – nun schrittweise erreicht werden kann.

Mag. Peter Hofbauer
Univ.-Prof. Dr. Markus Hohenwarter
Dr. Judith Hohenwarter
Mag. Walter Klinger
Mag. Andreas Lindner
Dr. Evelyn Stepancik

GeoGebraCAS – Didaktisches Computeralgebrasystem

gemeinsames Projekt von GeoGebra, Österreichisches GeoGebra institut,
RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und ACDCA

in Zusammenarbeit mit
der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich,
und der Johannes Kepler Universität Linz,

unterstützt vom Bundesministerium für
Unterricht, Kunst und Kultur

Teil 1 – Organisation des Projekts

Juni 2010

Peter Hofbauer, Judith Hohenwarter, Markus Hohenwarter,
Walter Klinger, Andreas Lindner, Evelyn Stepancik

1. Organisation des Projekts

Die organisatorischen Aufgaben wurden in Absprache mit der Initiative ACDCA bei einem Medienvielfaltstreffen im November 2009 auf die beiden Institutionen RFDZ für NÖ und GeoGebra aufgeteilt. Die Entwicklung des GeoGebraCAS übernahm das Team um Dr. Hohenwarter, die didaktische Konzeption der Begleitmaterialien und die Betreuung der Testlehrer/innen sowie die Evaluationskonzepte wurden vom RFDZ in Zusammenarbeit mit ACDCA und Frau Dr. Judith Hohenwarter entwickelt und durchgeführt. ACDCA übernahm die Hauptverantwortung für die Entwicklung der Unterrichtsmaterialien.

Der Ablauf des Projekts gliedert sich in allgemeine organisatorische Belange, CAS-Entwicklung und Evaluationskonzeption.

1.1 Allgemeine Organisation

1.1.1 Projekttreffen

Im Zuge der Entwicklungsarbeit kam es zu mehreren Treffen, die einerseits der Informationsweitergabe und andererseits der Abstimmung bei der Entwicklung der Materialien dienten.

Projekttreffen 17.2.2010
Die Mitglieder des GeoGebraCAS-Projekts trafen einander zu einem Planungstreffen am BG Amstetten.

Projektreffen 5.-7.3.2010 in Hotel Gürtler in Amstetten.

Tageordnung dieses Treffens:

Samstag			
09:00 – 09:30	*Ziele des Treffens klären (Materialien für Testlehrer/innen erstellen; je Klasse 3 Stück)*		
09:30 – 10:00	*Andi: Kurze Einführung in GeoGebraCAS und Sammlung der Befehle*		
10:00 – 12:30	*Arbeit in Gruppen*		
12:30 – 14:00	*Mittagspause*		
14:00 – 16:00	*Arbeit in Gruppen*		
16:00 – 17:30	*Gruppenergebnisse im Plenum diskutieren*		
17:30 – 18:30	*Arbeit am Zwischenbericht*	*Webseite des RFDZ*	*Pause oder Weiterarbeiten*
18:30	*Abendessen*		

Sonntag		
09:30 – 11:30	*Evaluation zur 1. Testphase*	*Erstellen von Testmaterialien*
11:30 – 12:00	*Vorstellung und Diskussion der Evaluation für die 1. Testphase*	
12:00 – 14:00	*Mittagspause*	
14:00 – 16:00	*Konzeption der Evaluation 2. Testphase*	*Erstellen von Testmaterialien*
16:00 – 17:30	*Besprechung der Ergebnisse im Plenum*	
17:30 – 18:30	*Erstellung einer Kurzreferenz*	
18:30	*Abendessen*	

Abendveranstaltung am 8.3.2010

Im Rahmen des Bundesseminars „Neue Technologien und eigenverantwortliches Arbeiten im Mathematikunterricht“ fand am 8.3.2010 eine Abendveranstaltung mit dem Thema „GeoGebraCAS – Symbolische Mathematik für Österreichs Schulen und die ganze Welt“ unter Mitwirkung von MR Dr. Dorniger, Dr. Hohenwarter und dem Rektorat der Pädagogischen Hochschule NÖ statt.

Pädagogische Hochschule für Niederösterreich
Mühlgasse 67, A-2500 Baden
Tel.: +43/(0)2252/88570 // Mail: office@ph-noe.ac.at // Web: www.ph-noe.ac.at

Department 3: RDFZ für Mathematik und Informatik, Department 5: Fächer
Postanschrift: Dechant Pfeifer-Str. 3, A-2020 Hollabrunn
Mag. Walter Klinger, Mitarbeiter: Tel.: +43 (0)2252/88570 DW 206 || Fax DW 250 // Mail: walter.klinger@ph-noe.ac.at

Zl.: A-14/10 Kl. Hollabrunn, 20. Jänner 2010

Einladung

Präsentation – Referat – Diskussion

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Mag. Dr. Markus Hohenwarter

GeoGebraCAS

Symbolische Mathematik für Österreichs Schulen und die ganze Welt

Mo., 8. März 2010, 19:30 – 21:30 Uhr
Hotel Gürtler, Rathausstraße 13, 3300 Amstetten

Die Veranstaltung ist offen für alle Interessierten!

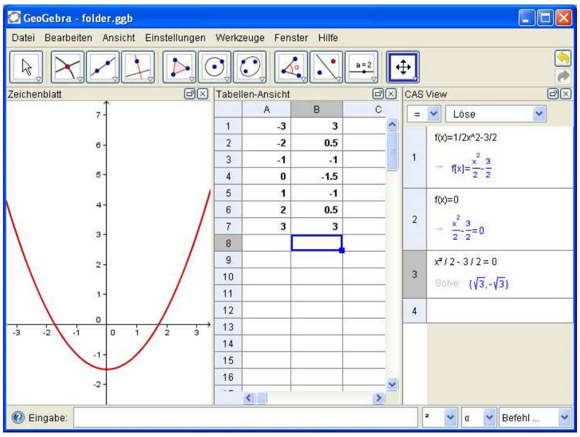
Organisation: Regionales Fachdidaktikzentrum für Mathematik und Informatik
Lehrveranstaltungsnummer PH-Online / PH Niederösterreich: **351F0SKW00**

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Mag. Dr. Markus Hohenwarter

- Mathematik und Angewandte Informatik, Universität Salzburg
- Entwicklung von GeoGebra im Rahmen der Diplomarbeit unter K.-J. Fuchs
- Doktoratsprojekt der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
- Workshops für LehrerInnen; Projekt ‚Medienvielfalt im Mathematikunterricht‛
- Seit 2006 in den USA tätig, GeoGebra-Projekt der National Science Foundation
- Florida Center for Research in Science, Technology, Engineering and Mathematics (FCR-STEM) an der Florida State University in Tallahassee, USA
- Februar 2010: Professor für Mathematik Didaktik an der Johannes Kepler Universität Linz
- Mail to: markus.hohenwarter@jku.at

GeoGebra – Bildungssoftwarepreise

- EASA 2002 (Europa)
- digita 2004 (Deutschland)
- L@rnie 2006 (Österreich)
- AECT 2008 (USA)
- TechAward 2009 (USA)



Bei dieser Veranstaltung wird Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Mag. Dr. Markus Hohenwarter die neusten Entwicklungen von GeoGebra – nämlich GeoGebraCAS – und die damit möglichen technologie-unterstützten Unterrichtspraktiken vorstellen.
GeoGebraCAS ist die neue Erweiterung von GeoGebra für symbolisches Rechnen und Termumformungen. Mit diesem CAS wird erstmals eine österreichische OpenSource Software vorgestellt, welche die für die Mathematik wichtigen Bereiche dynamisch miteinander verbindet:

- **dynamische Geometrie**,
- **Tabellenkalkulation** und
- **Computeralgebrasystem**

Neben einem Einblick in diese neuen Entwicklungen werden auch erste didaktische Materialien präsentieren, die für den Einsatz dieses frei verfügbare Computeralgebrasystem in österreichischen Schulen konzipiert wurden. Zudem werden die ersten Evaluationsansätze in diesem Projekt vorgestellt.

Moderation: Prof. Mag. Dr. Kurt Allabauer (Vizerektor der PH NÖ)

Impulsreferat: MR Dipl.-Ing. Mag. Dr. Christian Dorninger (bm:ukk, Leiter der Abteilung LII/8)

MEDIENVIELFALTS-INSTITUT [MATHEMATIK/INFORMATIK]

Ansprechpersonen des Regionalen Fachdidaktikzentrums für Mathematik und Informatik:

http://rfdz.ph-noe.ac.at

Bereich Mathematik	Bereich Informatik
Mag. Peter Hofbauer	Mag. Walter Wegscheider (Leitung)
Mag. Walter Klinger (Leitung)	
Mag. Andreas Lindner (Leitung AGI)	
Dr. Evelyn Stepancik	

Kontakt per Mail walter.klinger@ph-noe.ac.at

Planungstreffen 18.5.2010

Das Treffen fand an der Kepler Universität Linz statt.
Themen:
Weiterentwicklung des GeoGebraCAS
Internationale Konferenz 2011

Arbeitstreffen 9.6.2010 in Wien

Erstellung des Rechenschaftsberichts und Besprechung des weiteren Ablaufs.

1.1.2 Mitarbeiter/innenliste des Projekts GeoGebraCAS

Folgende Personen nehmen am Projekt teil:

Alfred Nussbaumer alfnuss@gmail.com
Andreas Lindner a.lindner@eduhi.at
Anton Nagl nagl.schiller@aon.at
Evelyn Stepancik estepancik@informatix.at
Gabriele Bleier gbleier@utanet.at
Gerhard Egger gerhardegger@live.at
Günter Redl g.redl@kabsi.at
Günter Schödl Guenter.Schoedl@schule.at
Heidi Metzger-Schuhäker heidi.metzger@hakhorn.ac.at
Heike Wiesner wiesner@heike-wiesner.de
Heiner Juen heiner.juen@ph-tirol.ac.at
Helmut Heugl hheugl@aon.at
Irma Bierbaumer irma.bierbaumer@aon.at
Jochen Maierhofer jochen.maierhofer@gmx.at ,
Josef Böhm nojo.boehm@pgv.at ,
Josef Lechner lejos@aon.at ,
Judith Hohenwarter judith@geogebra.org
Markus Hohenwarter markus@geogebra.org
Matthias Kittel km@matkit.at
Peter Hofbauer peter.hofbauer@schule.at
Walter Klinger wr.klinger@aon.at
Walter Wegscheider walter.wegscheider@ph-noe.ac.at

1.1.3 Testlehrer/innen für die erste Projektphase

Für die Testung der didaktischen Begleitmaterialien wurden Lehrer/innen aus allen Bundesländern angeschrieben.
Dabei konnten 17 Lehrer/innen mit 21 Projektklassen aus unterschiedlichen Schularten (AHS, BHS) und Typen (HAK, HTL, BG, BRG) sowie aus verschiedenen Bundesländern (NÖ, OÖ, Steiermark, Vorarlberg) zur Zusammenarbeit gewonnen werden.

	3. Klasse (7. Schulstufe)	4. Klasse (8. Schulstufe)	5. Klasse (9. Schulstufe)	6. Klasse (10. Schulstufe)	7. Klasse (11. Schulstufe)
Anzahl Klassen	4	6	3	4	4

TestlehrerInnen GeoGebraCAS

Name	Schule	Testphase 1
Mag. Günter Redl	HTL Mödling	3. Jahrgang HTL
Mag. Jutta Braun	BG/BRG Stockerau	4. Klasse AHS
Mag. Beate Thonhauser	BG/BRG Mürzzuschlag	6. Klasse AHS
Mag. Günter Schödl	BG/RG Wr. Neustadt Babenbergerring	7. Klasse AHS
Mag. Nagl Anton	BG/BRG Stockerau	3. Klasse AHS
Mag. Gerhard Egger	BG/BRG Stockerau	5. Klasse AHS
Mag. Klinger Walter	BG/BRG Stockerau	3.+4.. Schulstufe
Mag. Wolfgang Fischer	HAK Rohrbach	3. Jahrgang HAK
Mag. Alfred Eisler	BG/BRG Tulln	5. Klasse AHS
Mag. Georg Frühwirth	BORG Götzis	6. Klasse
Lindner Andreas	BG/BRG Bad Ischl	4. Klasse
Mag. Willhelm Haller	BG/BRG Bruck an der Leitha	3 Parallelgruppen 4. Klasse
Mag. Elisabeth Schmidt	G/RG/AG Unterwaltersdorf	6. Klasse AHS
Mag. Eduard Engler	BG Dornbirn	Zwei 3. Klassen AHS
Mag. Egmond Vogel	BG/BRG Krems Piaristengasse	5. Klasse AHS
Günter Kienreich	BORG Feldbach	7. Klasse AHS
Dr. Josef Lechner	BG Amstetten	6. Klasse AHS

1.1.3 Organisation der Begleitmaterialien

Sammeln potentieller Themen für die Materialien
Zum Sammeln potentieller Themen für die Begleitmaterialien der GeoGebraCAS Testphase wurde ein online Spreadsheet (GoogleDocs) mit den wesentlichen Lehrinhalten der einzelnen Schulstufen verwendet. Das Dokument war in der jeweils aktuellsten Version allen Autoren/innen per Internet zugänglich und erleichterte so den Austausch von Ideen und die Koordination der einzelnen Themenbereiche.

Kommunikation
Zur Vereinfachung der Kommunikation zwischen den Projektmitarbeiter/innen wurde eine Mailingliste eingerichtet (Google Group), auf die alle Beteiligten jederzeit zugreifen können.

Form und Aufbau der Begleitmaterialien
Zur Vereinheitlichung der erstellten Begleitmaterialien wurde eine Vorlage erstellt, die auf den Erfahrungen mit didaktischen Kommentaren aus früheren Projekten, sowie verschiedenen Online-Quellen basiert. Diese Vorlage gibt die Struktur der erstellten Begleitmaterialien vor (vgl. Kapitel 2.1).

Austausch von Informationen und Dokumenten
Zur Organisation von projektrelevanten Informationen und Dokumenten wurde ein Projekt-Wiki eingerichtet. Dieses enthält nicht nur organisatorische Informationen, wie zum Beispiel die Vorlage für die Begleitmaterialien und den Zeitplan des Projekts, sondern ermöglicht auch das Hochladen und Austauschen der Begleitmaterialien. Weiters wird dieses Projekt-Wiki auch zur Kommunikation über das GeoGebraCAS verwendet und ermöglicht den Projektmitarbeiter/innen, Feedback zur Entwicklungsversion des GeoGebraCAS zu geben und somit direkt an der Entwicklung dieser neuen GeoGebra-Komponente mitzuwirken.

Erstellung der Online-Feedback-Bögen

Zur Erstellung der Online-Feedback-Bögen für die an der Testphase teilnehmenden Lehrer/innen und Schüler/innen wird ein Google Form verwendet (vgl. Kapitel 1.2).

Fertigstellung der didaktischen Begleitmaterialien
Im März 2010 wurden die Unterrichtmaterialien und didaktischen Konzepte beim Treffen in Amstetten einer internen Evaluation unterzogen, überarbeitet und fertig gestellt. Die Materialien wurden auf der Homepage des RFDZ http://rfdz.ph-noe.ac.az für die Testlehrer/innen freigeschalten.

1.1.4 Zeitplan

Anfang Dezember 2009

- Sammeln potentieller Themen für die Begleitmaterialien des GeoGebra CAS im online Spreadsheet (https://spreadsheets.google.com/ccc?key=0Ao7xWqtSV5VLdGpIblM4dHI0bEJ1clNhWHZnU2Q2akE&hl=en)
- Entwicklung einer Vorlage für die Begleitmaterialien
- Materialentwicklung für / Anpassung bereits existierender Materialien an das GeoGebraCAS durch Autor/innen beginnt (siehe Vorlage für Begleitmaterialien)

Jänner 2010

- Autor/innen laden die Materialien im vorläufigen Endformat ins GeoGebraCAS Wiki (http://ggbcas.pbworks.com) und geben entsprechende Metadaten für die Materialien an.
- Durchsicht der Materialien und Feedback durch Kolleg/innen im GeoGebraCAS-Wiki

Februar 2010

- Feedback der Kolleg/innen ist abgeschlossen
- Autor/innen ändern die Materialien laut Feedback
- Online Feedback-Fragebögen für die Testlehrer/innen werden vorbereitet
- GeoGebraCAS-Autor/innen Treffen am BG/BRG Amstetten am Mittwoch, 17. Februar 2010

März 2010

- GeoGebraCAS Treffen in Amstetten, Freitag, 5. März 2010 bis Sonntag 7. März 2010
  - Fertigstellung der Begleitmaterialien für die Testphase
  - Autor/innen laden die fertigen Begleitmaterialien im Endformat ins GeoGebraCAS-Wiki
- Bundesseminar in Amstetten, Montag, 8. März 2010 bis Mittwoch, 10. März 2010
- Zwischenbericht des Projekts

April 2010 bis Mai 2010

- Stabile Online- und Downloadversion wurde für die erste Testphase auf der RFDZ-Seite angeboten. Dadurch wurde gewährleistet, dass die Testklassen immer unter den selben Bedingungen die Aufgabestellungen bearbeitet haben.
- Die Entwicklung des CAS läuft parallel als Version 4.0 Beta internationaler Ebene weiter.
- Testphase in den Klassen mit ca. 20 Testlehrer/innen aus ganz Österreich
- Ständiger Kontakt mit den Testlehrer/innen und online-Betreuung auf Anfragen
- Treffen in Linz für weitere Planungen 18.5.2010 JKU
- Testlehrer/innen und Schüler/innen geben bis Ende Mai Feedback (mit Hilfe der vorbereiteten Online-Feedback-Bögen)

Juni 2010

- Zusammenfassung des Feedbacks und Weiterleitung an die Autor/innen
- Überarbeitung der Begleitmaterialien und Abschluss des Projekts
- Die Materialien sollen weiter online einsatzbereit sein
- Datenerhebung und Beginn der Auswertung der bereits vorhandenen Feedbacks
- Endbericht des Projekts

Zur weiteren Dissemination wurden bereits zwei Bundesseminare über die PH Tirol und PH Niederösterreich für den März 2011 eingereicht. Weiteren Fortbildungsveranstaltungen in den Bundesländern wurde im Zusammenwirken mit den Pädagogischen Hochschulen und Mathematik-AG-Leitungen geplant und fixiert.

Eine Internationale Konferenz zum Thema GeoGebraCAS wird im August 2011 in Hagenberg in Zusammenarbeit von bm:ukk, Kepler Universität Linz, RISC-Institut Hagenberg, ACDCA, Internationales GeoGebra_Institut und RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ sowie dem österreichischen GeoGebra-Institut (AGI) stattfinden. Bei dieser Konferenz ist sowohl eine Schiene für Entwickler als auch eine eigene für den Einsatz von GeoGebraCAS im Unterricht geplant.

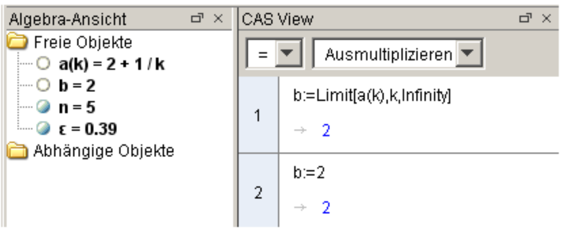
1.2 Organisation der GeoGebraCAS Entwicklung

Die Entwicklungsarbeit des GeoGebraCAS erfolgt in enger Kooperation von GeoGebra-Entwicklern, der Entwicklergruppe der Testmaterialien für dieses GeoGebraCAS Projekt, sowie von Entwicklern des Open Source CAS MathPiper aus den USA. Die Kooperation der verschiedenen Gruppen wurde dabei wie folgt organisiert.

Wiki für Entwicklerguppe der Testmaterialien

Der gesamte Entwicklungs- und interne Feedbackprozess für die Testmaterialien wurde über ein nicht-öffentliches Wiki abgewickelt (http://ggbcas.pbworks.com). Dort wurden parallel Prototypen der Testmaterialien gesammelt und von den Teammitgliedern gegenseitig getestet. Auf einer Feedbackseite wurden detaillierte Rückmeldungen mit zahlreichen Fehlerberichten und Wünschen geliefert. In der Abbildung is ein Ausschnitt dieser Feedback Seite zu sehen.

Andreas: a(n):=2+1/n
b:=Limit[a(k), k, Infinity] is not possible,
Markus: works for me
Andreas: yes, within CAS, but b is not exported to GeoGebra. Only if the assignment is like b:=2 it is exported to GeoGebra.



a(k)=2+1/k is defined in GeoGebra,
b:=Limit[a(k),k,Infinity] is defined in CAS but b is not automatically exported to GeoGebra. I have to write b:=2.
If I change to a(k)=3+1/k in GeoGebra the Limit does not change to 3 even after pressing ENTER.
Markus: ok, I see. The problem was that GeoGebra tried to evaluate the limit command which it doesn't understand. Thus, in
variable, so you can use b in GeoGebra as well. Also a(k) is now synchronized between CAS and the rest of GeoGebra.

GeoGebraCAS Entwicklerseite

Das GeoGebraCAS Entwicklerteam besteht aktuell aus Markus Hohenwarter, Michael Borcherds (Birmingham, UK) und Florian Sonner (Hamburg, Deutschland). Ausgehend von den Rückmeldungen der Testmaterialien-Entwicklergruppe wurden Bug Reports und Feature Requests auf http://www.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebraCAS gesammelt und bearbeitet. Dort befinden sich auch die öffentlichen Links zur Dokumentation sowie für aktuelle Beta und Testversionen des GeoGebraCAS. In einem Blog werden die verschiedenen Entwicklungsstufen und neuen Releases mit ihren Veränderungen dokumentiert (siehe http://www.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebraCAS/Blog).

MathPiper Entwicklerseite

Mehrere Bug Reports aus den Rückmeldungen der Materialentwicklungsgruppe (und später auch der Testlehrer/innen) haben nicht das GeoGebraCAS selbst, sonder das derzeit im Hintergrund verwendete CAS MathPiper betroffen. Diese Probleme werden in engem Kontakt mit den Entwicklern des MathPiper Systems besprochen und dokumentiert. Alle betreffenden Issues sind entsprechend auf http://code.google.com/p/mathpiper/issues/list dokumentiert. An der Verbesserung dieser Probleme wird von Seiten der MathPiper Entwickler intensiv gearbeitet.

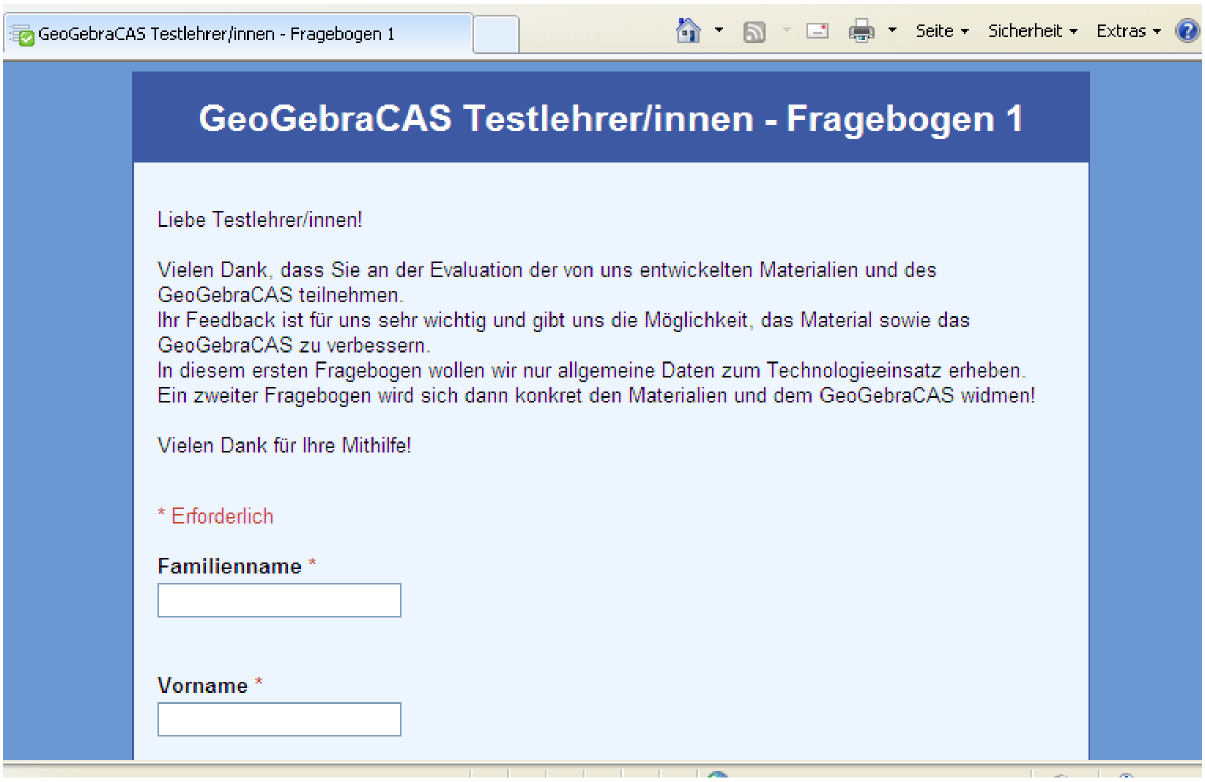
1.3 Organisation der Evaluation

Für die gesamte Evaluation des Projekts waren folgenden Teilaspekte geplant:

1. Online-Befragung aller Testlehrer/innen
2. Online-Befragung aller Schüler/innen
3. Videoanalyse von Schüler/innenlösungswegen
4. Interview mit Schüler/innen

Zur Konzeption der Lehrer/innen- und Schüler/innenfragebögen fand am 01.02.2010 ein ganztägiges Treffen von Dr. Judith Hohenwarter und Dr. Evelyn Stepancik in Linz statt. Die detaillierte Ausarbeitung der Fragen erfolgte kooperativ über ein gemeinsames Google-Doc. Sowohl der Fragebogen für die Lehrer/innen als auch der für die Schüler/innen wurde mittels Google-Form realisiert.

Screenshot eines Lehrer/innenfrageogens:



Screenshot des Schüler/innenfragebogens:


GeoGebraCAS - Schüler/innenfragebogen   Seite ▾ Sicherheit ▾ Extras ▾

GeoGebraCAS - Schüler/innenfragebogen

Liebe Schülerin!
Lieber Schüler!

Vielen Dank, dass du an der Rückmeldung zu den Unterrichtsmaterialien und zum GeoGebraCAS mitwirkst.
Dein Feedback ist für uns sehr wichtig und gibt uns die Möglichkeit, das Material sowie das GeoGebraCAS zu verbessern.
Bitte beachte, dass der Fragebogen anonym ist und dein Lehrer bzw. deine Lehrerin deine persönlichen Antworten nicht sehen kann!

Vielen Dank für deine ehrlichen Antworten und deine wertvolle Mithilfe!

* Erforderlich

Bitte gib hier den Familiennamen deines Mathematiklehrers bzw. deiner Mathematiklehrerin ein! *

Zur Information der Lehrer/innen hinsichtlich der Lehrer/innen- und Schüler/innenfragebogen wurden folgende zwei E-Mails an alle Testlehrer/innen versandt.

Am 20.04.2010 erfolgte folgende Aussendung:

> Liebe Testlehrer/innen!
>
> Endlich ist so weit - wir starten die erste Testphase zu GeoGebraCAS und den
> ausgewählten didaktischen Begleitmaterialien!
>
> Die stabile Offline- und Online-Version von GeoGebraCAS finden Sie auf http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=130.
>
> Sollte im Juni 2010 eine verbesserte Version verfügbar sein, werden wir Sie rechtzeitig informieren!
>
> Die Testmaterialien und ein Kurzreferenz zu GeoGebraCAS finden Sie ebenfalls unter diesem Link: http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=130.
>
> Es gibt:
>
> 1. Didaktische Begleitmaterialien,

2. Unterrichtsmaterialien für die Schüler/innen (zumeist Arbeitsblätter, manchmal Videos) und 3. einige weiterführende Materialien, die nicht getestet werden müssen, jedoch im weiteren Unterricht gerne verwendet werden können.

Diese Materialien wurden bereits von uns getestet und sollten problemlos im Unterricht eingesetzt werden können (wir werden alle Materialien mit der aktuellen Testversion weiter testen und wichtige Informationen sofort weitergeben).

Aufgabenstellungen, die über das vorhandene Material hinausgehen, können möglicherweise vom GeoGebraCAS noch nicht zufriedenstellend gelöst werden.

Als Beilage wird die aktuelle GeoGebraCAS Kurzreferenz für Testlehrer/innen und Schüler/innen gesendet(pdf- und doc-file).

Wir bitten Sie, mindestens zwei der Materialien mit Ihrer Testklasse zu erproben!

Wir bitten Sie weiters, den ersten Fragebogen vor Beginn Ihrer Testphase auszufüllen.

Sie helfen uns damit, einen standardisierten Fragebogen für die kommende große Testphase ab Herbst 2010 zu erzeugen!

Unter folgendem Link gelangen Sie zum Fragebogen.
http://spreadsheets.google.com/viewform?formkey=dDVJWVZsX2lwakREYkhmSHlYbVoxLUE6MQ

Mitte Mai ersuchen Sie wir Sie dann, einen weiteren Fragebogen zu absolvieren. Mit diesem wollen wir einerseits die Qualität der didaktischen Begleitmaterialien und andererseits die Handhabung des GeoGebraCAS evaluieren.

Analog zum Lehrer/innenfragebogen wird es dann auch einen für Schüler/innen geben, den Sie bitte mir Ihren Klasse bis Ende Juni 2010 durchführen.

Wir werden uns bemühen, Ihnen bis Herbst 2010 die Ergebnisse Ihrer Klasse rückzumelden.

DANKE, dass Sie mit Ihrer Zeit und Ihrem Engagement zur Entwicklung einer zukunftsträchtigen Mathematiksoftware beitragen!

Wir ersuchen Anfragen, Anregungen sowie offene Fragen und Problemfelder per mail an Walter Klinger Walter.Klinger@ph-noe.ac.at zu senden.

Liebe Grüße
Walter Klinger, Andreas Lindner, Peter Hofbauer, Evelyn Stepancik, Judith
Hohenwarter und Markus Hohenwarter

Am 06.05.2010 erfolgt die zweite Aussendung.

```
Liebe Testlehrer/innen!

Wir möchten uns recht herzlich bei Ihnen bedanken, dass Sie den
ersten Fragebogen bereits ausgefüllt haben.
Wie angekündigt, senden wir Ihnen heute den Link zum zweiten
(und letzten) Lehrer/innen-Fragebogen für die Testphase 1!
Bitte füllen Sie diesen Fragebogen nach jedem von Ihnen
eingesezten Testmaterial aus!
Falls Sie also zwei oder drei verschiedene
Unterrichtsmaterialien testen, ersuchen wir Sie wirklich für
jedes einzelne Material uns mithilfe des Fragebogens ein
Feedback zu geben.
Einige Fragen zur Bedienung des GeoGebraCAS müssen dabei jedoch
nicht nochmals ausgefüllt werden.

Hier geht es direkt zum Lehrer/innen-Fragebogen 2:
http://spreadsheets.google.com/viewform?formkey=dFdIWkRVNFU2LVlP
ZTZwcHVaeURZVEE6MQ
Weiters haben wir auch für Ihre Schüler/innen einen kurzen
Fragebogen zusammengestellt und ersuchen Sie, den Schüler/innen
etwa 10 Minuten zur Beantwortung Zeit zu geben!

Hier geht es direkt zum Schüler/innen-Fragebogen:
http://spreadsheets.google.com/viewform?formkey=dG5RMEdNUkQzV3c4
MTdjd0ltdzBRQ1E6MQ

Alle Ergebnisse der Evaluation werden im Herbst 2010 auf der
Webseite des Regionalen Fachdidaktikzentrums für Mathematik und
Informatik der PH NÖ veröffentlicht (http://rfdz.ph-noe.ac.at/)!
Falls Sie eine Zusammenfassung der Rückmeldungen Ihrer
Schüler/innen haben möchten, dann wenden Sie sich bitte per Mail
an Evelyn Stepancik estepancik@informatix.at.
Noch einmal möchten wir uns bei Ihnen bedanken!
Mit Ihrem Feedback und Ihren Rückmeldungen tragen Sie einerseits
zur Entwicklung innovativer Unterrichtsmöglichkeiten bei und
helfen uns andererseits dabei eine groß angelegte Evaluation
einer didaktischen Unterrichtssoftware vorzubereiten.

Liebe Grüße
Walter Klinger und Evelyn Stepancik
```

Für die Videoanalyse der Schüler/innenlösungswege und Interviews konnten vom BG/BRG Stockerau vier Testlehrer/innen gewonnen. Die Organisation dieses Teils der Evaluation wurde vor Ort von OStR Mag. Walter Klinger durchgeführt. Für die Schüler/innen wurden eigene Beispiele – in Analogie zu den bekannten Materialien – in Zusammenarbeit von OstR Mag. Walter Klinger und Dr. Evelyn Stepancik erstellt. Die Interviewfragen für die Schüler/inneninterviews wurden ebenso von OStR Mag. Walter Klinger und Dr. Evelyn Stepancik konzipiert.

GeoGebraCAS – Didaktisches Computeralgebrasystem

gemeinsames Projekt von GeoGebra, Österreichisches GeoGebra institut,
RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und ACDCA

in Zusammenarbeit mit
der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich,
und der Johannes Kepler Universität Linz,

unterstützt vom Bundesministerium für
Unterricht, Kunst und Kultur

Teil 2 - Projektinhalt

Juni 2010

Peter Hofbauer, Markus Hohenwarter, Andreas Lindner

Die Materialien entstanden unter Mitarbeit von:
Alfred Nussbaumer, Andreas Lindner, Anton Nagl, Evelyn Stepancik, Gabriele Bleier, Gerhard Egger, Günter Redl, Günter Schödl, Heidi Metzger-Schuhäker, Heike Wiesner, Heiner Juen, Helmut Heugl, Irma Bierbaumer, Jochen Maierhofer, Josef Böhm, Josef Lechner, Judith Hohenwarter, Markus Hohenwarter, Matthias Kittel, Peter Hofbauer, Walter Klinger, Walter Wegscheider

2. Projektinhalt

2.1 Veränderungen am CAS und der Schnittstelle

Ziel der Entwicklungsarbeit ist ein voll in GeoGebra integriertes symbolisches Algebrafenster, das einfach zu bedienen und ab der 7. Schulstufe einsetzbar ist.

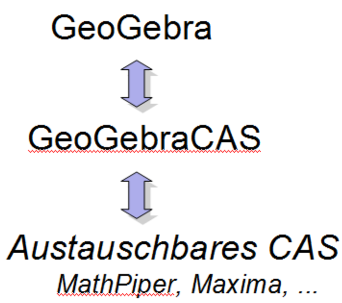
Dynamisches CAS Interface

Ausgangspunkt war die Idee eines statischen CAS Fensters wie in anderen Systemen, etwa Derive, Mathematica oder wxMaxima. Durch das Feedback der Entwicklungsgruppe für die Testmaterialien hat sich jedoch zunehmend der Wunsch nach einem dynamischen CAS Interface herauskristallisiert. Dabei soll insbesondere das dynamische Charakteristikum von GeoGebra mit seiner automatischen Aktualisierung von abhängigen Objekten auch auf Terme, Gleichungen, und Funktionen mit unbelegten Variablen anwendbar sein.

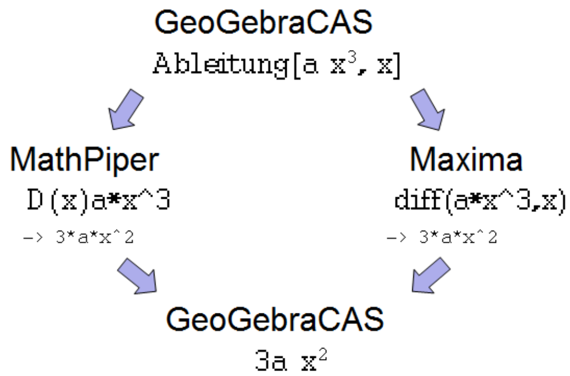
Beispielsweise wird die Befehlszeile `g := Grenzwert[a(n), n, Infinity]` bei Veränderung der Funktion a(n) nun im GeoGebraCAS automatisch neu berechnet, ohne dass eine manuelle Neuauswertung dieses Befehls erforderlich wäre. Dafür musste die Verwaltung dynamischer Abhängigkeiten zwischen Objekten auch im GeoGebraCAS für symbolische Ausdrücke implementiert werden. Durch diese dynamischen Abhängigkeiten zwischen GeoGebra Objekten und CAS Befehlen (wie z.B. Funktionen) lassen sich nun auch symbolische Zusammenhänge, wie etwa das Lösen eines Gleichungssystems, schnell an verschiedenen prototypischen Beispielen untersuchen.

GeoGebraCAS Design

Das GeoGebraCAS ist im Wesentlichen das Bindeglied zwischen dem existierenden numerischen GeoGebra Kern und einer symbolischen CAS Engine, die das eigentliche symbolische Rechnen übernimmt.



GeoGebraCAS definiert dabei eine eigene Befehlssyntax für den Benutzer, womit die darunterliegende CAS Engine prinzipiell austauschbar ist. Das folgende Beispiel zeigt, wie der Ableitungsbefehl von GeoGebraCAS verarbeitet und alternativ entweder an das im Hintergrund arbeitende CAS MathPiper oder das CAS Maxima übergeben und schließlich wieder in GeoGebraCAS rückübersetzt wird.



Neben der reinen Übersetzung der Befehlssyntax inkludiert das GeoGebraCAS auch einen Bereich, der die Logik der dynamischen Abhängigkeiten von Variablen und Funktionen im CAS Fenster verwaltet. Damit ist gewährleistet, dass die Veränderung von a := 2/3 auf a := 5/7 automatisch einen davon abhängigen Ausdruck f(x) := a x^2 neu berechnet. Diese dynamischen Abhängigkeiten sind nämlich mit der darunterliegenden CAS Engine (MathPiper oder Maxima) allein nicht möglich.

MathPiper & Maxima als CAS Engines

Die in diesem Projekt verwendete Testversion von GeoGebraCAS basiert auf der CAS Engine MathPiper. Die Verbesserungsvorschläge für MathPiper aus unserem Projekt sind auf http://code.google.com/p/mathpiper/issues/list zu finden.

Da sich in unseren Tests und aus den Rückmeldungen der Testlehrer/innen leider einige grundlegende Probleme mit MathPiper gezeigt haben, wurde parallel von der GeoGebra Entwicklergruppe auch mit der Einbindung von Maxima begonnen. Einerseits hoffen wir zwar weiterhin auf die Behebung von Fehlern in MathPiper durch dessen Entwicklerteam, andererseits wird uns die alternative Verwendung von Maxima erlauben, davon unabhängig im Laufe des Jahres 2011 eine stabile Version von GeoGebraCAS zu veröffentlichen.

Entwicklungsblog

Im Folgenden finden sich der Entwicklungsblog mit Einträgen zu GeoGebraCAS Versionen der letzten Monate, sowie die aktuelle Dokumentation.

2010-04-18: GeoGebraCAS 3.3.110.0

- New commands: LeftSide[<equation>], RightSide[<equation>]. These commands also work for the result of Solve, e.g. RightSide[{x=3/2}]
- Toolbar commands for Solve, Derivative, and Integral try variable x first. If the current expression does not contain x, then the first variable in alphabetic order of the expression is used. Thus, 3y+5=7 can be solved for y now by simply choosing Solve from the toolbar.
- Check input for assignments: a := 2 + 2 now keeps the input unevaluated when you press Ctrl+Enter
- Input of equations is now possible using both : and := notation, e.g. g: 3x + 4y = 7 or g := 3x + 4y = 7
- Fixed display of exponents in output, e.g. $(x+y)^2$ and press Ctrl+Enter
- (7*3)/(5*2) with Ctrl+Enter is now displayed as a single fraction
- Delete rows by selecting them with the mouse and then pressing the Delete key
- Update to MathPiper version 0.79b

2010-04-08: GeoGebraCAS 3.3.103.0

- Substitute improvements
    - click on an existing row inserts text into substitute dialog's text field
    - substitute dialog's text fields now allow the use of row references ($ or # notation)
    - substitute dialog now always stays on top of GeoGebra window
    - Substitute[1.05 * 1.05 K1, K1, K0 * 1.05] now gives 1.05 * 1.05 * 1.05 K0 instead of 1.1025 * 1.05 K0. Same from Substitute dialog.
- Output command comments saveable: Used toolbar commands are saved (e.g. "Factor") with CAS sessions now. After reloading a file, you can see the comments next to the respective outputs.
- Command translations: all entered commands are internally translated. This will allow creating a CAS session with German commands and then translating it by simply switching GeoGebra's language.
- Improved assignment output: function expressions are kept as entered, e.g. f(x) := (1/2)*(x+2/x)
- Multiplication signs and spaces improved in output: Integral[a sin(x),x] now shows a clear space in "-a cos(x)"
- "New file" now removes all variable and function definitions in CAS view
- Fixed # row references and added support for nested row references
- max/min CAS view window now keeps content
- change CAS view width while editing row now keeps current input
- Update to MathPiper version 0.78z

2010-03-07: GeoGebraCAS 3.3.70.0

New features

- Dynamic CAS View: dependent rows are evaluated automatically. The new CAS view is now fully dynamic, making it a true "GeoGebraCAS". This means that dependencies between the CAS view rows are respected and lead to automatic evaluation of other rows. For example, when you evaluate a row with a:=5, all dependent rows below like b := a + 5, c := b/2 are evaluated automatically too. This automatic evaluation always goes from top to bottom starting at the changed row.
- Full connection to GeoGebra: variables are updated between the CAS view and GeoGebra.
- Adding equations, e.g. first row: 3x+6y=7, second row: x-y=2, then you can use $1 +6 $2 to add the two equations ($1, $2 are dynamic references to the first and second row). If you also want to draw the equations, you can label them, e.g. first row a: 3x+6y=7, second row b: x-y=2, then add them in the third row using a + 6b
- Solve and Solutions: Solve[x^2=4] returns {x=-2, x=2} while Solutions[x^2=4] returns {-2,2}
- For convenience, the following input is automatically rewritten:
    - a:= is rewritten as Delete[a] and deletes/unbinds variable a
    - 2+2= is rewritten as 2+2 by removing the trailing =
    - f(x)=x^2 is rewritten as f(x):=x^2
    - Note that a=3 is no longer rewritten as a:=3 to allow equations of this form too.

Changes

- Dynamic row references now use the $ sign instead of %. The $ sign is already used in the spreadsheet, so it makes sense to reuse it here and keep % to allow easy input of percentages in the future.

- = now always automatically performs simplify. The simplify toolbar command has been removed.

Fixes

- Selections now always check the structure of expressions. Consider the input 2 + 2/3. When you select 2 + 2 and choose Evaluate (=) from the toolbar, the old version returned the incorrect result 4/3. Now, this structural selection problem is detected and yields an error message.
- Solve2 and Solutions2 now work correctly for (simple) systems of two equations
- -5 Ctrl+Enter (Hold) no longer gives -1 * 5 but now -5
- Variable assignments for x and y are now allowed in the CAS view, e.g. x := 5 and y := 7. Note that the values of x and y cannot be used in the rest of GeoGebra as they remain reserved for functions and equations there.

Notes

- output of assignments: a := 3 returns 3 and f(x) := x^2 returns x^2 as output instead of "defined" because we also want f(x) := Derivative[x^2] to return 2*x and not just "defined". Note that you can suppress the output by using a semicolon at the end, e.g. a := 3;

2010-01-27: GeoGebraCAS Version 3.3.56.0

- **Synchronization of variables**:
  Functions and variable definitions are now automatically synchronized between GeoGebraCAS and the rest of GeoGebra, e.g. you can define a function `f(x):= x^2` or variable *a:=5* in GeoGebraCAS or the GeoGebra Input Bar and it will be available in all views. If you then delete *f(x)* or *a* in GeoGebra, it will be undefined in GeoGebraCAS afterwards too. In GeoGebraCAS, you can delete objects by using e.g. `Delete[f]` or `Delete[a]`
- **Assignment convenience**:
  GeoGebraCAS requires := notation for assignments in order to distinguish an assignment `a := b + 5` from an equation `a = b + 5`. In order to help the user, an input like `f(x) = x^2` is now automatically rewritten as `f(x) := x^2`, and `a = 5` is rewritten as `a := 5`.
- **Suppress output**:
  A semicolon at the end of the input line keeps the output hidden. This is useful to suppress the output of assignments, e.g. `a := 5;`
- **Bugs fixed**:
  - `g(x) := Derivative[x^2]`, then `g(2)` now works correctly. Internally, the right hand side of an assignment is now always evaluated first.
  - Factor command improved: `Factor[ a^2 + 2 a b + b^2 ]` now gives *(a+b)^2*
- GeoGebraCAS version 3.3.56.0 includes MathPiper update .78f

2010-01-12: GeoGebraCAS Version 3.3.52.0

- GeoGebraCAS version 3.3.52.0 includes MathPiper update .78a
- **Command information** added to the output of a row, so you know what you did
- **New equation manipulation** based on flexible pattern rules, also added auto-simplification of equation manipulations to ensure that e.g. `(5x = 10) / 5` gives *x = 2* instead of *(5x)/5 = 2*
- **Default numeric precision** of the CAS is now 16 significant figures. `SetPrecision[32]` can be used to change the default precision. Note that you can always change the precision for a single computation using `N[sqrt(2), 20]`.
- Added support for **functions of any variable name**, e.g. `a(n) := 3n + 1`
- **Solve2 command** for systems of equations (needs some internal improvements on the MathPiper side)
- **Dynamic row references** with %
- Bug fixed #19: No more labels are shown with `Sequence[(n, 1), n, 1, 10]`

GeoGebraCAS Documentation

This document describes the current features of the GeoGebra CAS, available as a Java WebStart application from http://www.geogebra.org/webstart/beta/geogebra-cas.jnlp

Basic input

- *Enter*: evaluate input
- *Ctrl+Enter*: check input but do no evaluate input, e.g. b+b stays b+b. Note that assignments are always evaluated, e.g. `a := 5`
- In an empty row type
  - Space bar for previous output
  -) for previous output in parentheses
  - = for previous input
- Suppress output with a semicolon at the end of your input, e.g. `a := 5;`

Toolbar

- Clicking a button in the toolbar applies a command to the currently edited row
- You can select part of the input text to only apply the operation to this selected part

Variables

Assignments & Connection with GeoGebra

- Assignments use the **:= notation**, e.g. `b := 5`, `a(n) := 2n + 3`
- To **free up a variable name** again, use `Delete[b]` or `b :=`
- Variables and functions are always shared between the CAS View and GeoGebra if possible. If you define `b:=5` in the CAS View, then you can use *b* in all Views of GeoGebra. If you have a function `f(x)=x^2` in GeoGebra, you can also use this function in the CAS View.

Row References

You can refer to other rows in the CAS View in two ways

- **Static row references** insert text from another row, so your input is changed.
  - # inserts the previous output
  - #5 inserts the output of row 5
  - ## inserts the previous input
  - #5# inserts the input of row 5
- **Dynamic row references** use text from another row, but don't change your input.
  - $ inserts the previous output
  - $5 inserts the output of row 5
  - $$ inserts the previous input
  - 5 inserts the input of row 5

Equations

- Equations are written using the simple Equals sign, e.g. `3x + 5 = 7`
- You can perform arithmetic operations on equations, e.g. `(3x + 5 = 7) - 5` subtracts 5 from both sides of the equation. This is useful for manual equation solving.

Solve Equations

You can use the Solutions and Solve commands to solve equations.

- `Solutions[ equation ]` and solves an equation for *x*
  e.g. `Solutions[ x^2 = 4 ]` returns *{2, -2}*
- `Solutions[ equation, var ]` solves an equation for the given variable.
  e.g. `Solutions[ 3a = 5b, a ]` returns *{5b / 3}*
- `Solve[ equation ]` and solves an equation for *x*
  e.g. `Solve[ x^2 = 4 ]` returns *{x = 2, x = -2}*
- `Solve[ equation, var ]` solves an equation for the given variable.
  e.g. `Solve[ 3a = 5b, a ]` returns *{a = 5b / 3}*

System of Two Equations

- `Solutions2[equation1, equation2]` solves two equations for *x* and *y*
  e.g. `Solutions2[x + y = 2, y = x]` returns *{{1,1}}*
- `Solutions2[equation1, equation2, var1, var2]` solves two equations for *var1* and *var2*
  e.g. `Solutions2[a + b = 2, a = b, a, b]` returns *{{1,1}}*
- `Solve2[equation1, equation2]` solves two equations for *x* and *y*
  e.g. `Solve2[x + y = 2, y = x]` returns *{{x = 1, y = 1}}*
- `Solve2[equation1, equation2, var1, var2]` solves two equations for *var1* and *var2*
  e.g. `Solve2[a + b = 2, a = b, a, b]` returns *{{x = 1,y = 1}}*

Basic commands

- `Expand[ exp ]`expands the given expression
  e.g. `Expand[ (x-2) (x+3) ]` returns *x^2 + x - 6*
- `Factor[ exp ]` factors the given expression
  e.g. `Factor[ 2x^3 + 3x^2 - 1 ]` returns *2*(x+1)^2 * (x-1/2)*
- `Numeric[ exp ]`, `Numeric[ exp, precision ]` tries to determine a numerical approximation of the given expression
  - e.g. `Numeric[ 1/2 ]` returns 0.5
  - e.g. `Numeric[ sin(1), 20 ]` returns 0.84147098480789650666

Calculus

- `Limit[ exp, var, value ]` tries to determine the limit of an expression.
  e.g. `Limit[ sin(x)/x, x, 0 ]` returns 1
- `LimitAbove[ exp, var, value ]` tries to determine the limit of an expression.
  e.g. `LimitAbove[ 1/x, x, 0 ]` returns Infinity
- `LimitBelow[ exp, var, value ]` tries to determine the limit of an expression.
  e.g. `LimitBelow[ 1/x, x, 0 ]` returns *-Infinity*
- `Sum[ exp, var, from, to ]` finds the sum of a sequence
  - e.g. `Sum[i^2, i, 1, 3]` returns 14
  - e.g. `Sum[r^i, i,0,n]` returns *(1-r^(n+1))/(1-r)*
  - e.g. `Sum[(1/3)^i, i,0,Infinity]` returns 3/2
- `Derivative[ function ]`, `Derivative[ function, var ]`, `Derivative[ function, var, n ]` takes the derivative of a function with respect to the given variable. If no variable is given, *x* is used.
  - e.g. `Derivative[ sin(x)/x^2, x ]` returns *(x^2*cos(x) - sin(x)*2*x) / x^4*
  - e.g. `Derivative[ sin(a*x), x, 2 ]` returns *-sin(a*x)*a^2*
- `Integral[ function, var ]`, `Integral[ function, var, x1, x2 ]` finds the (definite) integral of a function with respect to the given variable
  - e.g. `Integral[ cos(x), x ]` returns *sin(x)*
  - e.g. `Integral[ cos(x), x, a, b ]` returns *sin(b) - sin(a)*

Further Commands

The following commands are symbolic equivalents to existing GeoGebra commands, see the GeoGebra documentation

- `GCD[ number, number ]` gives the greatest common divisor of two numbers
- `LCM[ number, number ]` gives the least common multiple of two numbers
- `Numerator[ <Function> ]`
- `Denominator[ <Function> ]`
- `PartialFractions[ <Function> ]`
- `Limit[ <Function>, <Value> ]`
- `LimitAbove[ <Function>, <Value> ]`
- `LimitBelow[ <Function>, <Value> ]`
- `Degree[ <Polynomial> ]`
- `Coefficients[ <Polynomial> ]`
- `Div[ <Polynomial>, <Polynomial> ]`
- `Mod[ <Polynomial>, <Polynomial> ]`
- `Factors[ <Polynomial> ]`
- `Simplify[ <Function> ]`

2.2 Didaktische Materialien auf der Homepage

2.2.1 Allgemeine Beschreibung und Konzeption der didaktischen Beleitmaterialien

Alle im Zuge dieses Projektes entwickelten Unterrichtsmaterialien beinhalten didaktische Begleitmaterialien, die den Lehrer/innen als Leitfaden und als Vorbereitung zum Einsatz der eigentlichen Unterrichtsmaterialien dienen sollen.

Es war von Beginn des Projekts an eine der zentralen Aufgaben, neben dem eigentlichen CAS auch Handreichungen zum konkreten Unterrichtseinsatz zu entwickeln, um eine Didaktik zu entwerfen, die dem Einsatz von CAS gerecht wird.

Die didaktischen Begleitmaterialien sind auf der Homepage des RFDZ unter
>Material, >Mathematik, >GeoGebraCAS
aufgelistet:
http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=130

Form und Aufbau der Begleitmaterialien

Zur Vereinheitlichung der angebotenen Begleitmaterialien wurde eine Vorlage erstellt, die auf den Erfahrungen mit didaktischen Kommentaren aus früheren Projekten sowie verschiedenen Online-Quellen basiert. Diese Vorlage gibt die Struktur der erstellten Begleitmaterialien vor und ist in die folgenden Abschnitte gegliedert:

1. Überblick (Zusammenfassung, Kurzinformation, Vorwissen der Lernenden, Lerninhalte und Lernziele, Lernzielkontrolle)
2. Vorbereitung der Lehrenden (Vorbereitung des Unterrichts und Verwendung des GeoGebraCAS)
3. Didaktischer Hintergrund
4. Einsatz im Unterricht (Verlaufsplan und Unterrichtsablauf)
5. Anhang (zugehörige Arbeitsblätter und andere Materialien)

Die einzelnen Abschnitte des Begleitmaterials im Detail

1) Überblick

<u>Zusammenfassung</u>
Die Zusammenfassung gibt einen kurzen Überblick über den Inhalt und die Grundintention dieser Unterrichtsmaterialien.

<u>Kurzinformation</u>
Die Lehrkräfte erhalten in übersichtlicher Form einen Überblick über

Schulstufe
Geschätzte Dauer
Verwendete Materialien
Technische Voraussetzungen
Schlagwörter Mathematik
Schlagwörter GeoGebraCAS
Autor/in
Download von Zusatzmaterialien

<u>Vorwissen der Lernenden</u>

Mathematisches Vorwissen
Hier wird das Vorwissen der Schüler/innen präzisiert, das diese vor dem Einsatz des Unterrichtsmaterials bereits erworben haben sollten und auf dem weiter aufgebaut werden soll.

Technisches Vorwissen
beschreibt die Voraussetzungen zum erfolgreichen Einsatz der Unterrichtsmaterialien in technischer Hinsicht.

<u>Lerninhalte und Lernziele</u>
Neben den Inhalten werden auch die Lernziele der Unterrichtsmaterialien beschrieben, die die Schüler/innen nach Beendigung dieses Abschnitts erreicht haben sollten.

<u>Lernzielkontrolle</u>
Vorschläge zur eventuellen Lernzielkontrolle werden angeführt.

2) Vorbereitung der Lehrenden

Vorbereitung des Unterrichts
Beschreibung der Vorbereitungsarbeiten und der Rahmenbedingungen, die für eine erfolgreiche Durchführung notwendig sind.

Verwendung des GeoGebraCAS
Dieser Punkt dient den Lehrkräften zur Information und zur Vorbereitung, welche Befehle in der Unterrichtssequenz benötigt werden.

Verwendete Befehle
listet die Befehle von GeoGebraCAS auf.

Verwendete Werkzeuge
listet die Werkzeuge (aus der Symbolleiste) von GeoGebra auf

3) Didaktischer Hintergrund

In diesem Abschnitt soll verdeutlicht werden, welchen Nutzen der Einsatz eines CAS im Mathematikunterricht bringen kann. Neben den Vorteilen können aber auch durchaus mögliche Schwierigkeiten im Lernprozess angeführt werden.

4) Einsatz im Unterricht

Verlaufsplan und Unterrichtsablauf

Der Verlaufsplan gibt Auskunft über die Gliederung des Unterrichts hinsichtlich *Einführung, Erarbeitungsphase, Zusammenfassung, Lernzielkontrolle und Anwendung /Differenzierung /Übung /Vertiefung* und zwar in den Punkten *Inhalt, Sozial- /Aktionsform und Materialien.*

Im Unterrichtsablauf wird im Detail festgelegt, wie eine Unterrichtssequenz ablaufen könnte und entsprechende Hinweise gegeben.

5) Anhang

Hier finden sich Hinweise auf die bereitgestellten Unterlagen wie Arbeitsblätter, Materialien, Anleitungen, Aufgabenstellungen etc.

Vorlage für die GeoGebraCAS-Begleitmaterialien

Um ein einheitliches Erscheinungsbild der didaktischen Begleitmaterialien zu gewährleisten, wurde folgende **Vorlage** geschaffen.

Titel der Materialien

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 22. Juni 2010
[*Datum wird vom Computer automatisch geändert!*]

[Gelb hinterlegte Texte bitte löschen oder durch entsprechende Texte ersetzen (z. B. Titel). Platzhaltertexte „TextTextTextTextTextText...“ *bitte durch entsprechende Texte in derselben* Formatierung ersetzen.*]*

[Bitte Formatvorlage verwenden – kein händisches Formatieren!]

[Es müssen nicht alle Abschnitte dieser Vorlage verwendet werden. Nicht benötigte Teile bitte einfach löschen.]

Überblick

Zusammenfassung

[Ein *Absatz, der den Inhalt der Materialien beschreibt*]
TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Kurzinformation

[Bitte Tabelle ausfüllen.
„Schlagwörter Mathematik“ bezieht sich auf die mathematischen Inhalte der Materialien.
„Schlagwörter GeoGebraCAS“ sind z. B. verwendete Befehle,...
Zusatzmaterialien sind zum Beispiel GeoGebra Angabedateien, Lösungsdateien,...]

Schulstufe	TextTextTextTextTextText...
Geschätzte Dauer	TextTextTextTextTextText...

Verwendete Materialien	TextTextTextTextTextText...
Technische Voraussetzungen	TextTextTextTextTextText...
Schlagwörter Mathematik	TextTextTextTextTextText...
Schlagwörter GeoGebraCAS	TextTextTextTextTextText...
Autor/in	TextTextTextTextTextText...
Download von Zusatzmaterialien	http://www...

Vorwissen der Lernenden

[*Welches Vorwissen sollten die Lernenden haben?*]

Mathematisches Vorwissen	• TextTextTextTextTextText... • TextTextTextTextTextText… • …
Technisches Vorwissen	• TextTextTextTextTextText... • TextTextTextTextTextText… • …

Lerninhalte und Lernziele

[*Welche Lernziele sollen die Lernenden mit dem jeweiligen Lerninhalt erreichen?*]

Lehrinhalt	**Lernziel**
TextTextTextTextTextText...	TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...	TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...	TextTextTextTextTextText...

Lernzielkontrolle

[*Wie könnten die Lehrenden überprüfen, ob die Lernenden die Lernziele erreicht haben?*]
TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Vorbereitung der Lehrenden

Vorbereitung des Unterrichts

[*Was müssen die Lehrenden vor dem Unterricht schon vorbereiten (z. B. Kopien anfertigen)?*]

TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Verwendung des GeoGebraCAS

[Mit welchen Befehlen, Funktionalitäten, Ansichten,... von GeoGebra müssen Lehrende vertraut sein? Technische Hinweise für Lehrende.]
TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Verwendete Befehle

[Befehlsnamen bitte mit Formatvorlage "Befehl" formatieren, das sollte die Tabelle automatisch vorschlagen (siehe Beispiel).]

`Befehl`	Erklärung des Befehls (siehe Beispiel unten)
`Vereinfache`	Vereinfacht den ausgewählten Term

Verwendete Werkzeuge

[GeoGebra Icons (Werkzeuge, Menüs,...) können von http://www.geogebra.org/source/toolbar heruntergeladen werden.]

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege

Didaktischer Hintergrund

[Bezogen auf die Verwendung des GeoGebraCAS (inkl. Was ist der didaktische Mehrwert des CAS Einsatzes?). Eventuell auch Erfahrungen aus dem eigenen Unterricht.]
TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Einsatz im Unterricht

Verlaufsplan

[Übersicht über die einzelnen Phasen der Unterrichtsstunde / Einheit. In der Spalte „Materialien" können wir eventuell später auch Links zu den Begleitmaterialien (z. B. Lösungsdateien) einfügen.]

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	TextTextTextTextText...	TextText...	TextText...
Erarbeitungsphase	TextTextTextTextText...	TextText...	TextText...
Zusammenfassung	TextTextTextTextText...	TextText...	TextText...
Lernzielkontrolle	TextTextTextTextText...	TextText...	TextText...
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	TextTextTextTextText...	TextText...	TextText...
Hausübung	TextTextTextTextText...	TextText...	TextText...

Unterrichtsablauf

[*Wie sollen diese Materialien im Unterricht eingesetzt werden?*]

Einführung

TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Erarbeitungsphase

TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Zusammenfassung

TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

Hausübung

TextTextTextTextTextText...
TextTextTextTextTextText...

[Bitte Hinweise, Tipps, Beispiele,... mit Formatvorlage "Unterstrichen" formatieren.]
Hinweis: TextTextTextTextTextText...

Anhang

[Arbeitsblätter und andere Materialien für Lernende zum Ausdrucken. Bitte durch Seitenumbruch (Strg-Enter)eine neue Seite pro Arbeitsblatt erzeugen und nicht durch viele einzelne Zeilenumbrüche.]

[Danke für eure Mitarbeit bei der Entwicklung und Testphase des GeoGebraCAS!]

Kurzreferenz GeoGebra

Da für die GeoGebra-Testversion noch keine Hilfe zu Verfügung steht, wurde für alle Schüler/innen und alle Lehrer/innen eine Kurzreferenz der wichtigsten Befehle erstellt.

GeoGebraCAS Kurzreferenz
zur Testversion vom 18. April 2010

Grundlegende Eingabe

- Enter: berechnet die Eingabe
- Strg + Enter: überprüft die Eingabe ohne sie zu berechnen, Zuordnungen wie a:=5 werden immer ausgewertet
- Eingabe in eine leere Zeile:
  - Leertaste für die Übernahme der vorhergehenden Ausgabe
  -) für die vorhergehende Ausgabe in Klammern
  - = für die vorhergehende Eingabe
- Ein Strichpunkt am Ende der Eingabe versteckt die Ausgabezeile, z.B. a := 5;

Grundlagenbefehle

Eingabe	Resultat	Mausmenü
Multipliziere[*Ausdruck* **]** **Expand[** *Expression* **]**	Multipliziert einen gegeben *Ausdruck* aus	Multipliziere
Faktorisiere[*Ausdruck* **]** **Factor[** *Expression* **]**	Faktorisiert einen gegebenen *Ausdruck*	Faktorisiere
Numerisch[*Ausdruck* **]** **Numerisch[** *Ausdruck, Stellen* **]** **Numeric[** *Expression* **]**	Bestimmt eine numerische Näherung eines gegebenen *Ausdrucks* mit optionaler Angabe der Anzahl signifikanter Stellen	≈
Ersetze[*Ausdruck, Alt, Neu* **]** **Substitute[** *Expression, Old, New* **]**	Ersetzt im *Ausdruck* Alt durch Neu	Ersetze
Berechne[*Ausdruck* **]** **Evaluate[** *Expression* **]**	Berechnet die Eingabe	=
PürfeEingabe[*Ausdruck* **]** **CheckInput[** *Expression* **]**	Überprüft die Eingabe ohne diese zu berechnen	✓

Lösen von Gleichungen

Eingabe	Resultat	Mausmenü
Lösungen[*Gleichung* **]** **Lösungen[** *Gleichung, Variable* **]** **Solution[** *Equation* **]**	Löst eine *Gleichung* für die Variable x und liefert z.B. {2, -2}. Optional kann eine andere Lösungsvariable angegeben werden	

Löse[*Gleichung***]** **Löse[** *Gleichung, Variable* **]** **Solve[** *Equation* **]**	Löst eine *Gleichung* für eine Variable x und liefert z.B. {x = 2, x = -2}. Optional kann eine andere Lösungsvariable angegeben werden.	Löse
Lösungen2[*Gleichung1, Gleichung2* **]** **Löse2[** *Gleichung1, Gleichung2* **]** **Lösungen2[** *Gleichung1, Gleichung2, var1, var2* **]** **Löse2[** *Gleichung1, Gleichung2, var1,var2* **]** ***Solutions2*[** *Eqation1, Equation2* **]** **Solve2[** *Eqation1, Equation2* **]**	Löst ein System von zwei linearen Gleichung in x und y. Optional können andere Lösungsvariablen angegben werden.	

Grenzwert & Ableitung

Eingabe	Resultat	Mausmenü
Grenzwert[*Ausdruck, Variable, Wert* **]** ***Limit*[** *Expression, Varable Value* **]**	Bestimmt den Grenzwert eines gegebenen *Ausdrucks* für die *Variable* Richtung *Wert*	
Ableitung[*Funktion, Variable, n* **]** ***Derivative*[** *Expression, Varable, n* **]**	Liefert die *n*-te Ableitung einer *Funktion* nach *Variable*	Ableitung

Anmerkung zum Ersetze-Dialog

- Mausmenü „Ersetze“
- Klicken auf die Ausgabe einer Zeile fügt diese in den Ersetze–Dialog ein.
- In den Textfeldern können Zeilenreferenzen verwendet werden, z.B. $2 steht für die Ausgabe von Zeile 2.
- Mit der Schaltfläche „Ersetze“ wird ohne Berechnung eingesetzt. Das Ergebnis wird mit „=“ berechnet bzw. mit „≈“ näherungsweise berechnet.

Weitere Informationen

Die englische Kurzdokumentation zur GeoGebraCAS Entwicklerversion finden Sie auf http://www.geogebra.org/trac/GeoGebraCAS

Weitere Materialien zum Einsatz von GeoGebraCAS

Im Zuge des Projekts wurden auch weitere Materialien erstellt, die nicht Eingang in die erste Testphase gefunden haben. Manche Themen betreffen nicht explizit den Lehrplan der Schulstufen 7 bis 11 und beziehen sich beispielsweise auf Kapitel, die in einem Wahlpflichtgegenstand behandelt werden können.

Folgende weitere Materialien wurden erstellt und sind ebenfalls von der RFDZ-Website http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=136 abrufbar:

- Konzept: Einführung in das numerische Rechnen mit GeoGebraCAS
- Klasse 5: Lineare Funktionen
- Klasse 6: Matrizenrechnung
- Klasse 7: Kostentheorie (wirtschaftliche Anwendung der Differentialrechnung)
- Klasse 7: Kurvendiskussion von Polynomfunktionen 3. Grades
- Klasse 7: Einführung des Wendepunkts

Neben diesen weiteren Materialien wurde auch eine Anleitung im Videoformat erstellt, die die Handhabung der GeoGebra-Tabellenkalkulation zeigt.

2.2.2 Materialien der Testphase 1 für GeoGebraCAS

Die für die Testphase notwendigen Unterlagen wurden den Testlehrer/innen auf der Homepage des Regionalen Fachdidaktikzentrums für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich in Form von pdf-Dateien zum Download bereit gestellt. Vereinzelt fanden sich auch GeoGebra- und Video-Dateien als unterstützende bzw. weiterführende Materialien im Download-Bereich der Homepage.
Alle didaktischen Begleitmaterialien und die Arbeitsunterlagen, auf die von den Testlehrer/innen in der Testphase zugegriffen werden konnte, sind im Folgenden dargestellt:

GeoGebraCAS Kurzreferenz
zur Testversion vom 18. April 2010

Grundlegende Eingabe

- Enter: berechnet die Eingabe
- Strg + Enter: überprüft die Eingabe ohne sie zu berechnen, Zuordnungen wie a:=5 werden immer ausgewertet
- Eingabe in eine leere Zeile:
    - Leertaste für die Übernahme der vorhergehenden Ausgabe
    -) für die vorhergehende Ausgabe in Klammern
    - = für die vorhergehende Eingabe
- Ein Strichpunkt am Ende der Eingabe versteckt die Ausgabezeile, z.B. a := 5;

Grundlagenbefehle

Eingabe	Resultat	Mausmenü
Multipliziere[*Ausdruck* **]** **Expand[** *Expression* **]**	Multipliziert einen gegeben *Ausdruck* aus	Multipliziere
Faktorisiere[*Ausdruck* **]** **Factor[** *Expression* **]**	Faktorisiert einen gegebenen *Ausdruck*	Faktorisiere
Numerisch[*Ausdruck* **]** **Numerisch[** *Ausdruck, Stellen* **]** **Numeric[** *Expression* **]**	Bestimmt eine numerische Näherung eines gegebenen *Ausdrucks* mit optionaler Angabe der Anzahl signifikanter Stellen	≈
Ersetze[*Ausdruck, Alt, Neu* **]** **Substitute[** *Expression, Old, New* **]**	Ersetzt im *Ausdruck* Alt durch Neu	Ersetze
Berechne[*Ausdruck* **]** **Evaluate[** *Expression* **]**	Berechnet die Eingabe	=
PrüfeEingabe[*Ausdruck* **]** **CheckInput[** *Expression* **]**	Überprüft die Eingabe ohne diese zu berechnen	✓

Lösen von Gleichungen

Eingabe	Resultat	Mausmenü
Lösungen[*Gleichung* **]** **Lösungen[** *Gleichung, Variable* **]** **Solutions[** *Equation* **]**	Löst eine *Gleichung* für die Variable x und liefert z.B. {2, -2}. Optional kann eine andere Lösungsvariable angegeben werden	
Löse[*Gleichung* **]** **Löse[** *Gleichung, Variable* **]** **Solve[** *Equation* **]**	Löst eine *Gleichung* für eine Variable x und liefert z.B. {x = 2, x = -2}. Optional kann eine andere Lösungsvariable angegeben werden.	Löse
Lösungen2[*Gleichung1, Gleichung2* **]** **Löse2[** *Gleichung1, Gleichung2* **]** **Lösungen2[** *Gleichung1, Gleichung2, var1, var2* **]** **Löse2[** *Gleichung1, Gleichung2, var1,var2* **]** **Solutions2[** *Eqation1, Equation2* **]** **Solve2[** *Eqation1, Equation2* **]**	Löst ein System von zwei linearen Gleichung in x und y. Optional können andere Lösungsvariablen angegben werden.	

Grenzwert & Ableitung

Eingabe	Resultat	Mausmenü
Grenzwert[*Ausdruck, Variable, Wert* **]** ***Limit[*** *Expression, Varable Value* ***]***	Bestimmt den Grenzwert eines gegebenen *Ausdrucks* für die *Variable* Richtung *Wert*	
Ableitung[*Funktion, Variable, n* **]** ***Derivative[*** *Expression, Varable, n* ***]***	Liefert die *n*-te Ableitung einer *Funktion* nach *Variable*	Ableitung

Anmerkung zum Ersetze-Dialog

- Mausmenü „Ersetze“
- Klicken auf die Ausgabe einer Zeile fügt diese in den Ersetze–Dialog ein.
- In den Textfeldern können Zeilenreferenzen verwendet werden, z.B. $2 steht für die Ausgabe von Zeile 2.
- Mit der Schaltfläche „Ersetze“ wird ohne Berechnung eingesetzt. Das Ergebnis wird mit „=“ berechnet bzw. mit „≈“ näherungsweise berechnet.

Weitere Informationen

Die englische Kurzdokumentation zur GeoGebraCAS Entwicklerversion finden Sie auf http://www.geogebra.org/trac/GeoGebraCAS

Numerisches Rechnen

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 21. April 2010

---

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Der Übergang vom Taschenrechner zum Arbeiten mit einem CAS soll durch numerisches Arbeiten erleichtert werden. Kennen lernen der einfachen Befehle und Üben der linearisierten Eingabe von komplexeren numerischen Ausdrücken stehen im Fokus. Numerische Berechnung von Teilausdrücken Auf den Unterschied zwischen Dezimalstellen und signifikanten Stellen,, sowie auf die wissenschaftliche Schreibweise von Dezimalzahlen wird Wert gelegt. Dazu kommt die Substituierung von Variablen in Termen. Erste Hinweise auf iterative Verfahren.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	8 und 9 (an der HAK 10)
Geschätzte Dauer	1 Stunde + Hausübungen
Verwendete Materialien	Arbeitsblätter
Technische Voraussetzungen	GeoGebra an PC oder Notebook
Schlagwörter Mathematik	Numerik, Substituieren, Iteration
Schlagwörter GeoGebraCAS	Vereinfachen, Ersetzen, Tabelle
Autor/in	Josef Böhm
Download von Zusatzmaterialien	http://www...

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Eingabe von Ausdrücken am TR • • …
Technisches Vorwissen	• elementare Bedienung von GeoGebra • Grundkenntnisse in TabKalk • …

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
numerische Ausdrücke	Ausdrücke in linearisierter Form eingeben und auf Richtigkeit überprüfen können
Substitution	Für eine oder mehrere Variable substituieren können
Darstellung von numerischen Größe	zwischen Dezimalstellen und signifikanten Stellen unterscheiden können, die wissenschaftliche Schreibweise anwenden können

1.5 Lernzielkontrolle

Aufgaben nach Art des Arbeitsblatts bearbeiten lassen

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Handout kopieren oder zum Download vorbereiten

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Umgang mit den Varianten des Vereinfachens
Editieren von Termen
elementares Arbeiten in der Tabellenansicht

Verwendete Befehle

`Ausmultiplizieren`	Verwendung der drei angebotenen Varianten
`WithValue`	Substitution ohne Verwendung des Ersetzen-Fensters
`Ersetze`	Substituieren über das Ersetzen-Fenster

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	

3 Didaktischer Hintergrund

An Hand von teilweise vertrauten Aufgaben soll mit dem neuen Werkzeug unter besonderer Berücksichtigung der CAS- und der Tabellenansicht Bekanntschaft gemacht werden, bzw. wenn bisher nur Geometrie betrieben wurde, soll an diese zusätzlichen Features herangeführt werden. Neue Ideen wie die Eingabe von Wurzel, iteratives Vorgehen, Wechsel der Werkzeuge (CAS-Tabelle) fließen dabei automatisch mit ein.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Wiederholung, die ersten Aufgaben mit dem TR lösen lassen	Partner/Gruppe	Arbeitsblatt
Erarbeitungsphase	Demonstration der Möglichkeiten an bis zu drei Aufgaben in den einzelnen Abschnitten	Lehrer	Arbeitsblatt oder Extraaufgaben
Zusammenfassung			

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Lernzielkontrolle			
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Erstellung von Aufgaben durch die Schüler	Partner oder Gruppe	
Hausübung	die noch offenen Aufgaben	individuell	Arbeitsblatt

4.2 Unterrichtsablauf

Ergibt sich aus dem Aufbau des Arbeitsblatts. Im Prinzip sollte das Arbeitsblatt selbst erklärend sein und der Lehrer/die Lehrerin hat die Rolle des Moderators.

In Abständen sollten die Ergebnisse verglichen werden. SchülerInnen können ausgewählte Aufgaben am Lehrergerät demonstrieren.

Ein Teil jeder Aufgabengruppe kann zur Hausübung überlassen werden.

5 Anhang

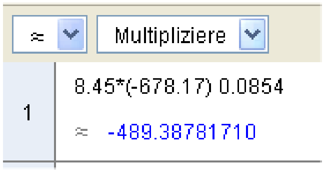
Arbeitsblätter

Wie mit einem Taschenrechner?

Berechne die folgenden Ausdrücke im CAS-Fenster.

Das Ergebnis ist mit der geforderte Anzahl von Dezimalstellen oder signifikanten Stellen auszugeben. (d = Dezimalstellen, s = signifikante Stellen)

Hinweise: Das Multiplikationszeichen kann aber muss nicht eingegeben werden. Ein Leerzeichen genügt. Für die Berechnung verwende die ≈-Option - damit wird die Ausgabe als Dezimalzahl erzwungen.



Das ≈-Zeichen soll dich später daran erinnern, dass dieser Ausdruck numerisch (näherungsweise) berechnet worden ist.

$18,45 \cdot (-678,17) \cdot 0,0854 \approx$ (3d)

$\dfrac{345,3 \cdot 3,8927 \cdot 0,1525}{8,52 \cdot 2,593 \cdot 39 \cdot 45 . 0,72} \approx$ (2s)

Wenn Du einen Ausdruck mit dem „Häkchen“ auswertest, dann wird dieser nicht berechnet, sondern in „pretty print“ Form ausgegeben. Damit kannst Du überprüfen, ob Du Deine Eingabe richtig gemacht hast. Du kannst dafür auch die Tastenkombination Strg+Eingabe verwenden.

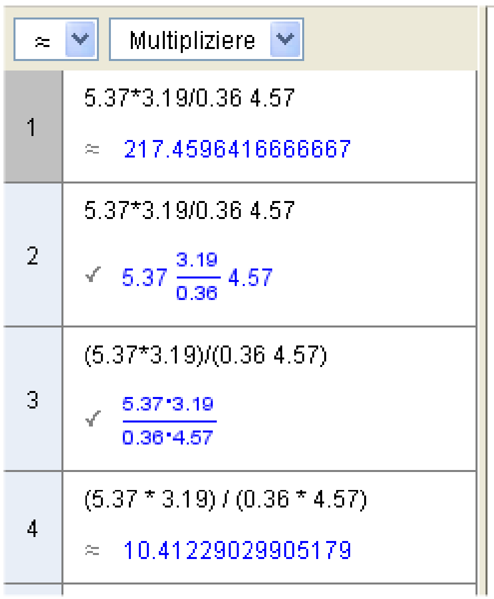
Ein Beispiel: $\dfrac{5,37 \cdot 3.19}{0,36 \cdot 4,57}$ ist zu berechnen.

In Zeile 1 wurde sofort berechnet. Siehst Du den Fehler?

In Zeile 2 wurde dieser Term mit dem „Häkchen“ behandelt. Der Eingabefehler wird nun deutlich.

Ein vorsichtiger Schüler testet zuerst in Zeile 3 seine „linearisierte Eingabe“ mit dem Häkchen – und wertet dann – wenn´s stimmt – in Zeile 4 aus.

Wenn die Schreibmarke in der 4. Zeile blinkt, brauchst du nur auf das Ergebnis der 3. Zeile zu klicken und es wird in die 4. Zeile zur weiteren Bearbeitung übernommen – oder Du drückst nur die Zwischenraumtaste.



Es wäre nicht nötig, den Term nochmals in Zeile 4 zu übernehmen, die rechnerische Auswertung kann nach der Überprüfung auch in Zeile 3 durchgeführt werden.

Hinweis: die Quadratwurzel muss als sqrt(...) eingeben werden, wie zB $\sqrt{2}$ = sqrt(2).
Beachte das richtige Setzen der Klammern.

$142{,}9^{0{,}43} \approx$ (4d) $\sqrt{17{,}032 \cdot 3{,}22} \approx$ (5d)

Denke bei komplizierteren Termen an die Überprüfung der Eingabe durch das Häkchen –nur ein Tastendruck ist nötig und er macht Dich sicher!!

$\dfrac{-29{,}573 \cdot 8{,}26 \cdot 10^4}{2857{,}3 \cdot 147{,}12} \approx$ (3s) $\left(\dfrac{14{,}21 \cdot 0{,}852}{3{,}71}\right)^2 \approx$ (5s)

$\left(\dfrac{1}{7{,}42 \cdot 2{,}483}\right)^3 \approx$ (4d) $\left(\dfrac{1}{7{,}42 \cdot 2{,}483}\right)^3 \approx$ (4s)

$\sqrt[3]{3456{,}89} \approx$ (2d)

Die n-te Wurzel muss als Potenz mit der Hochzahl $\frac{1}{n}$ eingegeben werden. Nimm das bitte vorerst zur Kenntnis, die Erklärung dafür fällt im Lauf des Schuljahres.

$\dfrac{76{,}25 \cdot \sqrt[3]{0{,}2956}}{1{,}49 \cdot \sqrt[4]{125{,}63}} \approx$ (4d)

Bei allen weiteren Aufgaben rechne - wenn nicht anders angegeben auf 4 Dezimalstellen genau!

$\dfrac{\sqrt[5]{97{,}67} - \sqrt[4]{83{,}563}}{2{,}1956^2} \approx$ $\sqrt{6-\sqrt{7}} \approx$

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{2527} - \sqrt[4]{1897}} \approx$ $\dfrac{13{,}73^2 + 16{,}95^2 - 8{,}42^2}{5{,}32 . 2{,}35} \approx$

$\dfrac{1724 \cdot 0{,}0821}{\sqrt[3]{1524 - 6{,}215 \cdot \sqrt{1120}}} \approx$ $\left((4.5^2 + 0.89^3)^3 + \dfrac{3{,}42}{1{,}25}\right)^2 \approx$

Vergleich der Ergebnisse

Manchmal braucht man auch numerisch Zwischenergebnisse (z.B. zum Aufsuchen eines Fehlers). Wir wollen z.B. im obigen linken Ausdruck gerne wissen welchen Wert der Zähler, der Radikand im Nenner und der Nenner haben. (3. Wurzel als ^(1/3) schreiben!!)

1	1724 0.0821/(1524-6.215 sqrt(1120))^(1/3) ≈ 12.915991798683333
2	(1724 0.0821)/(1524-6.215 sqrt(1120))^(1/3)

2	(1724 0.0821)/(1524-6.215 sqrt(1120))^(1/3) ≈ $\dfrac{141.5404}{(1524\text{-}6.215\sqrt{1120})^{\frac{1}{3}}}$
3	141.5404 / (1524 - 6.215 sqrt(1120))^(1 / 3)

Markiere den Zähler und führe ≈ durch. Damit wird der Zähler berechnet. Übernimm das Ergebnis in die nächste Zeile, markiere den Radikand und werte diesen aus. (Der Radikand ist 1316,006…)

3	141.5404 / (1524 - 6.215 sqrt(1120))^(1 / 3) ≈ $\frac{141.5404}{1316.006317403629^{\frac{1}{3}}}$
4	141.5404 / 1316.006317403629^(1 / 3)

Im nächsten Schritt kannst Du den Nenner berechnen lassen.

4	141.5404 / 1316.006317403629^(1 / 3) ≈ $\frac{141.5404}{10.95853901164824}$
5	141.5404 / 10.95853901164824 → 12.91599179868333

Fasse nun zusammen:

Zähler =

Ausdruck unter der Kubikwurzel =

Nenner =

Als Kontrolle berechne den Wert des Bruchs.

$$6,23412 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{732,4}{0,8721}} - 1,2146^3 \right)^3 \approx$$

Welchen Wert hat der Ausdruck in der Klammer?

$$28,1^2 \cdot \left(\sqrt[4]{0,75} + \frac{305,9}{417} \right) \approx$$

erster Summand ≈ zweiter Summand ≈ Klammer ≈

$$\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{11}}} \approx$$

Vergleich der Ergebnisse

Gib das nächste Resultat in wissenschaftlicher Notation an.

$$\frac{1,234\cdot 10^{15}\cdot 0,56783\cdot 10^{17}\cdot 1,433\cdot 10^{7}}{4,2345\cdot 10^{23}\cdot 0,8765\cdot 10^{13}} \approx \qquad \sqrt{\frac{34,67}{3,22}-\left(\frac{25,23}{6,89}\right)^2} \approx$$

Warum gibt es für den rechten Ausdruck kein (für Dich verständliches) Ergebnis?
Untersuche den Ausdruck genauer!

$$\sqrt[6]{\left(17,234^4+9,276\cdot\sqrt[5]{52,9}\right)^5} \approx \text{(3s)} \qquad \sqrt[4]{\frac{0,9842^3+5,32\cdot 11,924}{\sqrt[3]{0,00015}}} \approx \qquad \text{(3d)}$$

$$\frac{3,45^3-\sqrt{76,2+2,04^3}}{\sqrt{110,36}} \approx \qquad \text{(4d)} \qquad \frac{25,123}{\sqrt{456,35}}-\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2300}}}{2,4^2-3,5^2} \approx \qquad \text{(4s)}$$

Vergleich der Ergebnisse

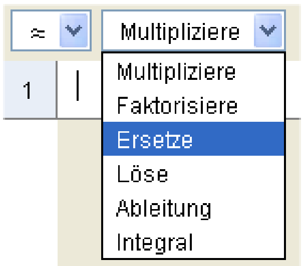
Eine wichtige numerische Tätigkeit ist das Belegen von Variablen mit Werten (hier vorerst nur mit Zahlen). Belege x mit den angegebenen Werten.

$3,53x^5-10,31x^4+0,532x^3-13,62x^2+100,3$ mit x = 2,19: (4s)

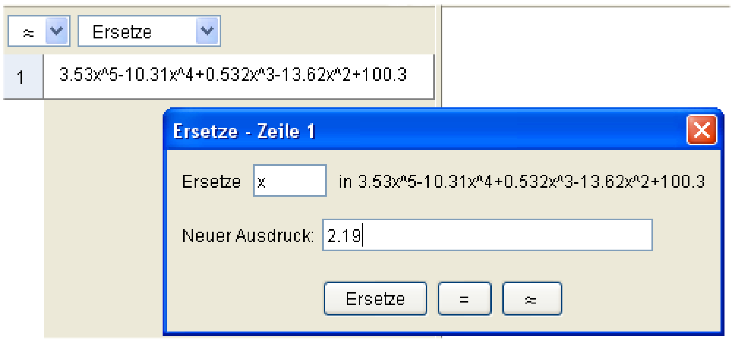
mit x = – 0,76: (4s)

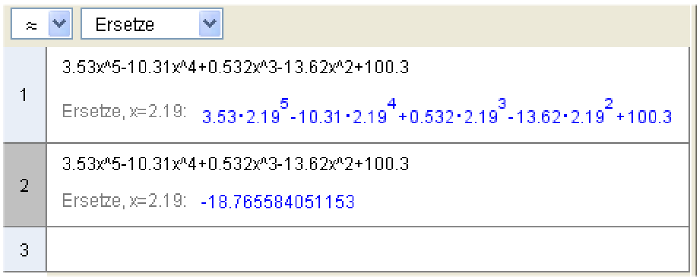
mit x = 112,3: (4s)

Hinweis: Gib den Term ein und wähle die Tätigkeit "Ersetze":



Dann öffnet sich ein Fenster und GeoGebra wartet auf drei Eingaben: für welche Variable ist zu ersetzen (hier natürlich x) und mit welchem Wert ist die Variable zu belegen. Anschließen hast Du die Wahl, gleich das Ergebnis zu sehen (=) oder vorerst nur die Ersetzung (= Ersetze) vorzunehmen.





Hier wurde zuerst mit „Ersetze“ und dann mit dem ≈-Zeichen die Ersetzung (= Substitution) durchgeführt.

Beachte den Kommentar Ersetze, x=2.19:

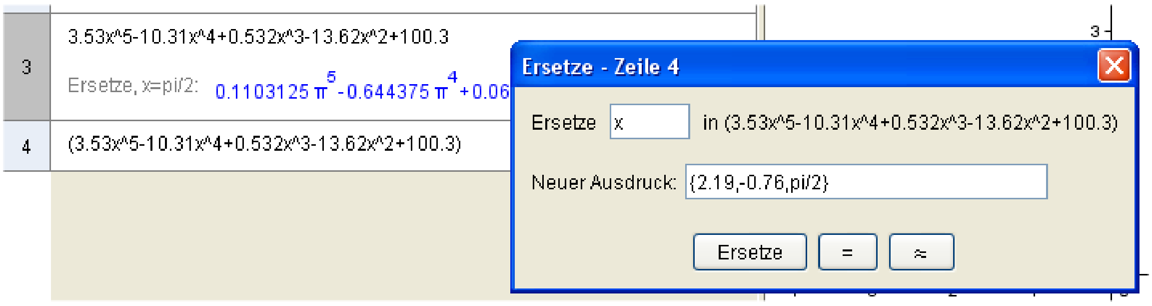
Hier wird sofort das Ergebnis angezeigt. Bei Ausdrücken mit Brüchen und Wurzeln ist es meist noch nötig, das Ergebnis nochmals näherungsweise (≈) zu berechnen.

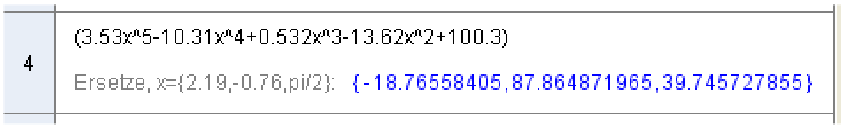
$3{,}53x^5 - 10{,}31x^4 + 0{,}532x^3 - 13{,}62x^2 + 100{,}3$	mit x = 2,19:	(4s)
	mit x = – 0,76:	(4s)
	mit x = π/2:	(4s)
	(Hinweis: Eingabe für π: pi)	

Vergleich der Ergebnisse

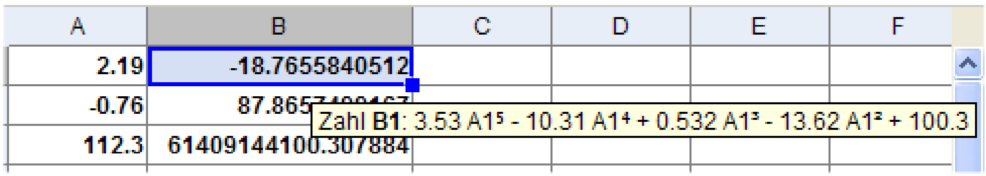
Hinweis: Wenn ein Term mit mehreren Werten für eine Variable belegt werden soll, können diese Werte in Form einer Liste ins "Ersetze-Fenster" eingetragen werden. Siehe dazu die Abbildungen auf der nächsten Seite.

Wir wollen im vorliegenden Polynom (Zeile 1) die Variable x in einem Schritt mit allen drei Werten belegen. Dazu kann man die Zeilenreferenz gut einsetzen. Die Eingabe der letzten Zeile wird mit ## (oder mit dem =-Zeichen) angesprochen, die Eingabe einer anderen Zeile, wie zB der Zeile 1 ruft man mit #Zeilennr.# auf.





Du kannst die numerische Berechnung auch in der Tabellenansicht durchführen:



[-18.765584051153, 87.864871964672, 61409146932.8036309]

Verwende bei den folgenden Aufgaben jeweils zumindest zwei der angebotenen Möglichkeiten.

$152{,}19x^6 - \frac{1885}{x^2+1} + 28x$	mit x = 39,823:	(3s)
	mit x = 0,076:	(2d)
$a - \frac{1{,}02a^5 - 2{,}5a^3 + 0{,}85a^2}{6{,}1a^4 - 7{,}5a^2 - 1{,}7a}$	mit *a* = 4,823:	(3d)
	mit *a* = – 3,785	(3d)

$\dfrac{2^{-0{,}03x^2+4{,}73x}}{3^{0{,}5x^2}-4\sqrt{x}}$	mit x = 8,65	(4s)
	mit x = 2,35	(4d)
	mit x = 0,8	(3d)

Vergleich der Ergebnisse

Wenn Du direkt – ohne den Assistenten über „Ersetzen" arbeiten willst, kannst Du die Funktion **WithValue (zu ersetzende Variable, einzusetzender Ausdruck, Term)** verwenden. Für den einzusetzenden Ausdruck kann wie im „Ersetzen-Fenster" auch eine Liste – zwischen {} – von einzusetzenden Werten angegeben werden.

```
5   WithValue(x,{2.19,-0.76,pi/2},#1#)
```

```
5   WithValue(x,{2.19,-0.76,pi/2},((3.53x^5-10.31x^4+0.532x^3-13.62x^2+100.3)))
    ≈  {-18.76558405,87.864871965,39.745727855}
```

Wiederhole die beiden letzten Aufgaben mit dieser praktischen Funktion. In WithValue kann auch eine Liste von Variablen angegeben werden. Im Ersetze-Fenster muss bei zwei Variablen zweimal substituiert werden.

WithValue({x,y},{5.843,-6.824}, Ausdruck) bei zwei (oder mehreren) Variablen ist allerdings möglich. Verwende diese Funktion für die nächsten Berechnungen.

$\dfrac{\sqrt[3]{x^2-5y}}{\sqrt{3x^3-8x^2-20y}}$	mit x = 5,843 und y = – 6,824	(6d)
$\left(3x^2-\dfrac{y^3}{2}+\dfrac{z}{4}\right)^3$	mit x = 3,56; y = 7,18; z = 2,06	(3d)
$\sqrt[5]{5x-\sqrt[4]{\sqrt{3z}+12y}}$	mit x = – 10,78; y = 5,167; z = 10,78	(3s)
$\dfrac{x^2+2x+17}{1-4x-3x^2}$	mit x = 1, 2, 3, ..., 10	(2d)
$\sqrt{2{,}5x^3+\sqrt{10x}}$	mit x = 10, 20, 30, …, 90, 100	(4s)
$\dfrac{c^2+2}{1-2c}$	mit c von 1 bis 2 mit einer Schrittweite von 0,1	(3d)

$\dfrac{\sqrt{z^3 - z}}{\sqrt[3]{3z+1}}$ mit z von 5 bis 10 mit einer Schrittweite von 0,5 (3d)

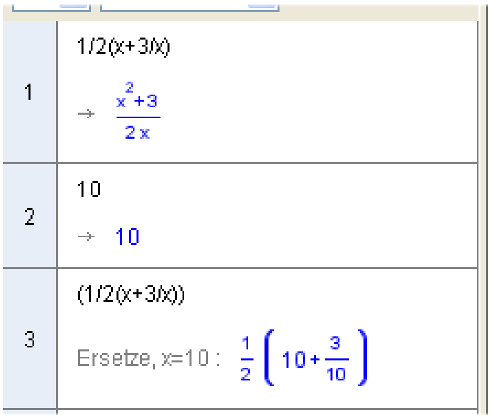
Bei den letzten vier Aufgaben bietet sich auch die Tabellenansicht zur Berechnung an, warum?

Vergleich der Ergebnisse

$\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ beginne mit x = 10 und setze das Ergebnis gleich wieder

in die Formel für x ein, dieses Ergebnis wieder usw, insgesamt mindestens 8 mal;

1. Schritt



Wiederhole dieses Verfahren mit 2 beliebigen anderen Anfangswerten.

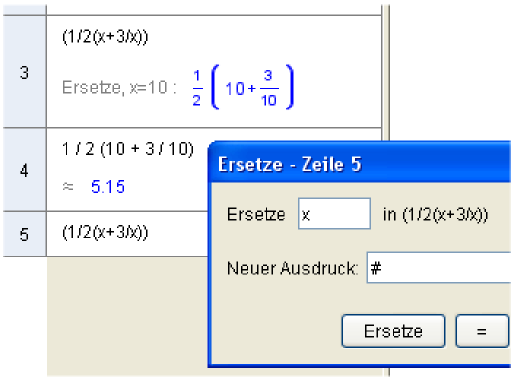
Was kannst Du dabei beobachten?

Mache den Versuch nochmals, ersetze aber die Zahl 3 zuerst durch 5 und dann durch 100.

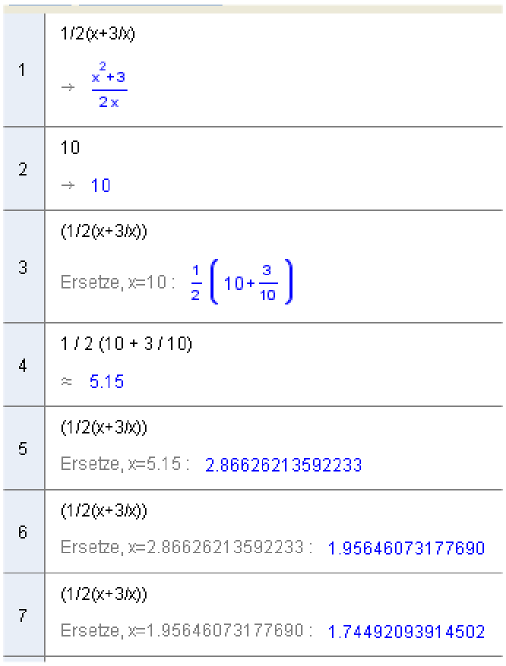
Kannst Du erkennen, wohin diese Rechenvorschrift führt? Wenn ja, dann versuche, Deine Vermutung durch selbst gewählte Beispiele zu bestätigen.

2. Schritt

Schreibe in Zeile 4 wie zuerst #1# und rufe das Ersetze-Fenster auf. (Nach der Eingabe von #1# **nicht** die Eingabe-taste betätigen.



Mit # wird das Ergebnis der letzten Zeile angesprochen – für x wird also 5,15 substituiert.



Zur Erinnerung: mit dem #-Zeichen rufst Du immer das Ergebnis der letzten Berechnung auf! Mit #1#1 kopierst Du die Eingabe der Zeile Nr. 1 in die aktuelle Zeile.

Diese Rechenvorschrift lässt sich auch in dieser Form darstellen:

$$x_{neu} = \frac{1}{2}\left(x_{alt} + \frac{3}{x_{alt}}\right); \; x_1 = 10$$

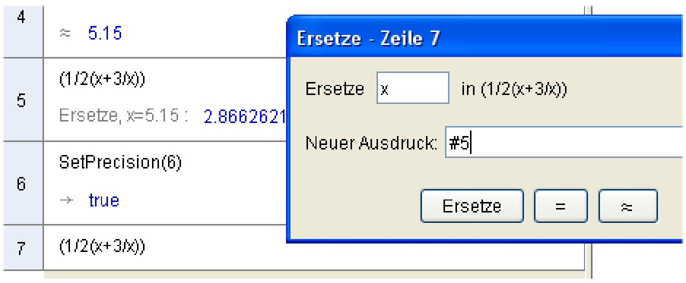
Eine derartige schrittweise Berechnung nennt man eine ITERATION.

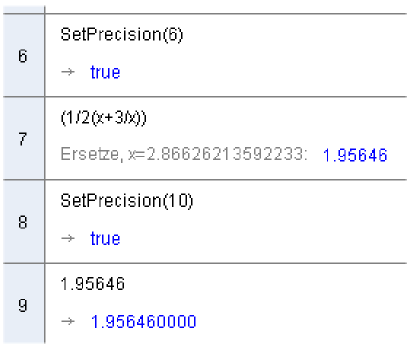
Führe die folgenden Iterationen durch:

$x_{neu} = 1{,}03 \cdot x_{alt}; \; x_1 = 100;$ $\qquad x_{10} =$ $\qquad$ (4d)

$u_{neu} = 2 + u_{alt}^{\,2}; \; u_1 = 0{,}3;$ $\qquad u_6 =$ $\qquad$ (4d)

$z_{neu} = a + b \cdot z_{alt}; \; z_1 = a \cdot b;$ $\qquad z_5 =$





Die Rechengenauigkeit kann mit SetPrecision(signifikante Stellen) gesteuert werden. Wie Du im rechten Bild siehst, wird aber dann mit dem gerundeten

Ergebnis weiter gerechnet.

Mit # greifen wir auf das letzte Ergebnis zurück mit #*n* auf das Ergebnis der Zeile Nr. *n*.

Versuche, diese Iterationen auch in der Tabellenkalkulation durchzuführen.

Vergleich der Ergebnisse

Schreibe die folgenden Zahlen in wissenschaftlicher Notation (mit 4 signifikanten Stellen):

12345,345 =	0,004567 =
78995677 =	36,78 =
0,0000000034 =	88877556644 =

Schreibe die folgenden Zahlen als Dezimalzahlen (mit 6 signifikanten Stellen):

$3{,}4678\ 10^{5}$ =	$1{,}0095\ 10^{10}$ =
$6{,}5669\ 10^{-5}$	$2{,}234\ 10^{-2}$ =
$7{,}78\ 10^{7}$ =	$5{,}010305\ 10^{-8}$ =

Vergleich der Ergebnisse

Stelle für Deinen Sitznachbarn / Deine Sitznachbarin einen kleinen Test mit ähnlichen Aufgaben wie sie in dieser Übung gestellt wurden zusammen. Mache es nicht zu schwierig, die Bearbeitungszeit sollte nicht über 15 Minuten gehen.

Ziele beim Umformen von Gleichungen – die erste Umformung

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 07. März 2010

Überblick

1.1 Zusammenfassung

Beim Lösen von Gleichungen ist besonders darauf zu achten, dass Schüler/innen den ersten Äquivalenzumformungen ein besonderes Augenmerk schenken und die Ziele, die mit den ersten Umformungen erreicht werden auch formuliert werden können. Diese Entscheidungen für und Anwendungen von Äquivalenzumformungen führen zu neuen äquivalenten Gleichungen, die ein möglichst rasches Finden der Lösungen von Gleichungen ermöglichen.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	Neulernen in der 7. Schulstufe, Vertiefung und Übung in den folgenden Schulstufen 8 bis10.
Geschätzte Dauer	1 Unterichtseinheit
Verwendete Materialien	Arbeitsblatt
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS an PC oder Notebook
Schlagwörter Mathematik	Gleichung, Äquivalenzumformungen
Schlagwörter GeoGebraCAS	Äquivalenzumformunen durchführen, Vereinfachen
Autor/in	Walter Klinger
Download von Zusatzmaterialien	-----------

JKU
JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Grundkompetenzen im Umgang mit Termen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) – noch keine Potenzen. • Was heißt Lösen einer Gleichung? • Äquivalenzumformungen kennen • Einfachste Formen von Gleichungen angeben und interpretieren können • Aussagen und Aussageformen unterscheiden können
Technisches Vorwissen	• Elementare Bedienung von GeoGebraCAS

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	Lernziel
Lösen von Gleichungen	Ziele des Gleichungsumformens angeben können
Äquivalenzumformungen bei Gleichungen	• Ziele angeben können, die durch einzelne Äquivalenzumformungen erreicht werden sollen. • Auswirkungen von verschiedenen Äquivalenzumformungen auf dieselbe Gleichung formulieren können. • Entscheidungen für eine bestimmte Umformung begründen können. • Die Umformung auch händisch durchführen können.
Äquivalente Gleichungen	Äquivalente Gleichungen, die zu einfacheren Formen führen, erzeugen können

1.5 Lernzielkontrolle

Bei ähnlichen Beispielen händisch und mit GeoGebraCAS lösen können und mündlich oder schriftlich die Ziele der Umformungen angeben können.

Vorbereitung der Lehrenden

1.6 Vorbereitung des Unterrichts

Arbeitsblatt kopieren oder zum Download vorbereiten. Jede Schülerin/Jeder Schüler braucht ein eigenes Notebook oder einen Computer im EDV-Raum.

1.7 Verwendung des GeoGebraCAS

Eingabe von Gleichungen in GeoGebraCAS
Eingabe von Äquivalenzumformungen in GeoGebraCAS
Vereinfachen von Termen und Gleichungen
Eventuell Ausmultiplizieren

Verwendete Befehle

`Vereinfache`	Vereinfacht die beiden Term einer Gleichung
`Lösche`	Löscht die Eingabezeile

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug

Didaktischer Hintergrund

Anhand einer ausgewählten Aufgabenstellung soll der Lernprozess der Schüler/innen bei der Entscheidung für einzelne Äquivalenzumformungen durch die richtigen Rechenvorgänge des CAS derartig unterstützt werden, dass die Zielsetzung und die Begründung im Vordergrund stehen. „Ungeeignete“ Umformungen (z.B.: die Gleichung wird komplizierter oder Ziel wurde nicht ereicht) können sofort erkannt werden und dadurch neue Strategien und Zielsetzungen (z.B.: die Gleichung wird komplizierter) erarbeitet werden.
Das CAS dienst nur als Feedbackinstrument für die Lernenden. Dabei kann auch die im Kopf erfolgte Rechnung (genannt: händische Rechnung) sofort nach ihrer Richtigkeit hinterfragt werden.

1.8 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Wiederholung Gleichungen	Lehrer-/Schülergespräch	
Erarbeitungsphase	Erste mögliche Äquivalenzumformungen angeben können. Ziele die dadruch erreicht werden sollen formulieren können. Diese ersten Umformungen durchführen und überpüfen, ob die jeweiligen Ziele erreicht wurden	Vierfenstertechnik mit GeoGebraCAS	Arbeitsblatt
Zusammenfassung	Verschiedene Ziele verbal angeben können und nach ihrer „Sinnhaftigkeit“ für die Lösung der Gleichung bewerten. Entscheidung für den eigenen Lösungsweg finden.	Plenumsgespräch und schriftliche Zusammen-fassung	Selbst erstellte Mitschrift
Lernzielkontrolle	Neuerliche Anwendung mit selbständiger Beschreibung der Ziele	Einzelarbeit – Partnerarbeit zum Vergleichen und Diskussion	
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Ähnliche Beispiele druchführen		

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Hausübung	Bei ausgewählten Gleichungen wird die schriftliche Angabe der Ziele, die durch Äquivalenz-umformungen erreicht werden, verlangt	Einzelarbeit	Hü-Mappe bzw. -Heft

1.9 Unterrichtsablauf

Einführung

Wiederholung: Was heißt Lösen einer Gleichung?
Wiederholung: Welche Umformungen sind beim Lösen von Gleichungen erlaubt (Genaue Beschreibung der Äquivalenzumformungen).
Eventuell die Grundlagen beim Arbeiten mit Termen besprechen (Addition und Subtraktion von Termen. Multiplikation und Division von Termen. Besonders das Distributivgesetz, da beide Seiten einer Gleichung von der Umformung betroffen sind.

Erarbeitungsphase

Erhebung der Vorschläge von SchülerInnen für die beiden ersten Umformungen der angegebenen Gleichung $3-\frac{x}{5}=1$ und Testen mit GeoGebraCAS. Im Plenum werden danach die ersten Umformungen verglichen und eventuell geeignete erste Umformungen, die noch nicht gewählt wurden, in Spalte 3 und 4 eingetragen.
Die Ziele sollen genau formuliert werden und die SchülerInnen sollen über diese Ziele sprechen und sie begründen.
Danach sollen die jeweiligen „Wege" weiter bearbeitet und die gleichen einfachsten Formen hergeleitet werden.
Die Anzahl der jeweiligen Umformungen soll gezählt und eingetragen werden.
Jede Schülerin/Jeder Schüler soll aufschreiben für welche erste Umformung und damit für welchen weiteren Weg sie/er sich entscheidet.

Zusammenfassung

Als Zusammenfassung soll (Heft, Portfolio, Arbeitsblatt) vermerkt werden dass es mehrere sinnvolle erste Umformungen gibt.
Z.B.:

Welches Ziel möchte ich damit erreichen?
(1) Der Ausdruck mit der gesuchten Variablen soll auf einer Seite alleine stehen (–3)
(2) Es soll bei der Gleichung kein Bruch mehr auftreten (*5)
(3) Vor dem Ausdruck mit der Variablen soll kein Minus stehen ($+\frac{x}{5}$)
(4) ………..

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Übungen für erste Umformungen.
Übungen, bei denen die äquivalenten Gleichungen gegeben sind und nach der Umformung gefragt wird. Dabei sollen auch Gleichungen auftreten, die nicht äquivalent sind, also nicht durch eine Äquivalenzumformung auseinander hervorgegangen sind.

Hausübung

Beispiele, bei denen zusätzlich das Ziel der ersten Umformung formuliert werden soll.
Verschiedene Anwendungen, Differenzierungen und Vertiefungen (siehe oben)

<u>Hinweis</u>: Beispiele

Beispiel 1
Gib an, welche Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden. ***Teste deine Meinung mit GeoGebraCAS***! Stelle gegebenenfalls richtig.

a)	$2a = 2a$ $0 = 0$	b)	$2a = 2a$ $1 = 1$	c)	$2a = 2a$ $2 = 2$
d)	$3b - 6 = 9$ $b - 2 = 3$	e)	$3b + 6 = 9$ $b + 6 = 9 - 2b$	f)	$\frac{b}{5} = \frac{b}{2} + \frac{3}{10}$ $2b = 5b + 3$

Beispiel 2

Bestimme die einfachste Form und gib ***die Lösungsmenge*** an:

(1) G=N und (2) G=Q.

Gib an, welche der Eigenschaften für die jeweiligen Gleichungen gilt: (

(1) eindeutig lösbar, (2) allgemeingültig oder (3) nicht lösbar!

a) $c-2=9$	b) $c-2=c+2$	c) $c-2=c-2$	d) $c-2=2c$
$L_{(1)}=$	$L_{(1)}==$	$L_{(1)}=$	$L_{(1)}=$
$L_{(2)}=$	$L_{(2)}=$	$L_{(2)}=$	$L_{(2)}=$

Anhang

Arbeitsblatt

Arbeitsblatt

Viele Wege führen zu einer Lösung ?!
Erste Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Gib in den ersten beiden Spalten eine deiner Meinung nach sinnvolle Äquivalenzumformung an (Zeichne einen Strich neben der Gleichung und trage ein). Schreibe darunter die nach der Umformung erhaltene Gleichung (erzeuge 4 CAS-Fenster und überprüfe deine Umformung durch GeoGebraCAS bevor du weitermachst).
Trage das Ziel (vollständiger Satz) der gewählten Umformung in das Kästchen darunter ein.
Löse dann durch weitere Umformungen die Gleichungen und gib die einfachste (äquivalente) Form der Gleichung an.
Wir besprechen danach gemeinsam weitere mögliche Umformungen und du kannst danach die Spalten 3 und 4 dafür verwenden.

$3-\frac{x}{5}=1 \mid$	$3-\frac{x}{5}=1 \mid$	$3-\frac{x}{5}=1 \mid$	$3-\frac{x}{5}=1 \mid$
Ziel der 1. Umformung:	Ziel der 1. Umformung:	Ziel der 1. Umformung:	Ziel der 1. Umformung:
Einfachste Form:	Einfachste Form:	Einfachste Form:	Einfachste Form:
Anzahl der nötigen Äquivalenzumformungen ________	Anzahl der nötigen Äquivalenzumformungen ________	Anzahl der nötigen Äquivalenzumformungen ________	Anzahl der nötigen Äquivalenzumformungen ________

Für welchen Weg würdest du dich entscheiden und warum? Beschreibe:

Herleitung von Potenzrechenregeln

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 07. März 2010

Überblick

1.1 Zusammenfassung

Das Rechnen mit Potenzen (Rechenarten 3. Stufe) mit Exponenten aus der Menge der natürlichen Zahlen wird in der 3. Klasse eingeführt und gefestigt. Die dabei auftretenden neuen Rechenregeln sollen von Schüler/innen selbständig – unter Verwendung eines CAS – hergeleitet, angewendet und überprüft werden

Kurzinformation

Schulstufe	Neulernen in der 7. Schulstufe, Vertiefung und Übung in den folgenden Schulstufen 8 bis10.
Geschätzte Dauer	abhängig von der Anzahl der Regeln 1 - 2 Unterrichtsstunden
Verwendete Materialien	4 Arbeitsblätter
Technische Voraussetzungen	GeogebraCAS an PC oder Notebook
Schlagwörter Mathematik	Potenzen, Rechenregeln
Schlagwörter GeoGebraCAS	Vereinfache, Faktorisiere, Expandiere
Autor/in	Walter Klinger
Download von Zusatzmaterialien	-----------

1.2 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Grundkompetenzen im Umgang mit Variablen • den Begriff Potenz beschreiben können • Berechnungen von Potenzausdrücken mit ganzen Zahlen durchführen können (Beilage 1) • Addition und Subtraktion von Potenzen mit gleicher Basis und gleicher Hochzahl sollen sicher beherrscht werden. • Vorrangregeln sollen mit Zahlen in der neuen Situation angewendet werden können (Beilage 2)
Technisches Vorwissen	• elementare Bedienung von GeoGebraCAS

1.3 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Potenzen	neue Rechenregeln für die Rechenart dritter Stufe herleiten können
Beschreiben von Sachverhalten beim Rechnen mit Potenzen	Die gefundenen Rechenregeln beschreiben, anwenden und überprüfen können.

1.4 Lernzielkontrolle

Informationsfestellung mit einzelnen Beispielen

Vorbereitung der Lehrenden

1.5 Vorbereitung des Unterrichts

Arbeitsblätter kopieren oder zum Download vorbereiten. Jede/r Schüler/in braucht ein eigenes Notebook oder einen Computer im EDV-Raum.

1.6 Verwendung des GeoGebraCAS

Je Arbeitsblatt:
Eingabe von Potenzen und Vereinfachung dieser Eingaben.
Nach abgeschlossener „händischer“ Anwendung der Regel bei Beispielen erfolgt die Testung und Fehleranalyse mit dem CAS.

Verwendete Befehle

`Vereinfache`	Vereinfacht die beiden Terme einer Gleichung
`Expand`	Ausrechnen von Ausdrücken
`Factor`	Faktorisieren von Ausdrücken

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	
	Bewege

Didaktischer Hintergrund

Anhand einer ausgewählten Aufgabenstellung soll der Lernprozess der Schüler/innen beim Erkennen von Zusammenhängen und Rechenregeln unterstützt werden. Die Selbständigkeit beim Erkennen neuer Zusammenhänge soll dabei im Vordergrund stehen. Die dabei entwickelten Erkenntnisse sollen händisch angewendet werden können sowie Teststategien zur Überprüfung durchgeführt werden.
Das CAS dient nur als sicheres und stabiles Feedbackinstrument für die Lernenden.

Einsatz im Unterricht

1.7 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Wiederholung Potenzen (Beilage 1)	Lehrer-Schülergespräch	--------------
Erarbeitungsphase	Die einzelnen Arbeitblätter sollen hintereinander bearbeitet werden.	Einzelarbeit mit anschließendem Plenum	Arbeits-blätter
Zusammenfassung	Besprechung im Plenum einerseits zur Wiederholung der Rechenregeln, andererseits zur Vorbereitung auf die Anwendungen dieser Regeln. Fehleranalyse soll erfolgen.	Plenumsgespräch	Selbst erstellte Mitschrift
Lernzielkontrolle	Informationsfest-stellung	Einzelarbeit	
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	ähnliche Beispiele druchführen		
Hausübung	Beispiele zum Festigen und Durchführen, verbal beschreiben		Hü-Mappe bzw. -Heft

1.8 Unterrichtsablauf

Einführung

Wiederholung oder Einführung von Potenzen mit natürlichen Exponenten (Siehe Anhang 2).

Erarbeitungsphase

Die einzelnen Aufträge werden zuerst mit dem CAS bearbeitet und daraus eine Vermutung über eine Regel entwickelt. Vor der Anwendungsphase soll im Plenum (eventuell auch durch Lösungsblätter) eine Reflexion und wenn nötig eine Korrekur/Exaktifizierung der gefundenen Regel erfolgen.

Zusammenfassung

Am Ende dieses Lernprozesses sollen die Rechenregeln sowohl formal als auch verbal angegeben werden können. Eine Fehleranalyse kann mit dem CAS erfolgen.

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Wie bereits beim letzten Arbeitsblatt vorgegeben, sollen weitere komplexere Beispiele gelöst werden können.

Hausübung

Die Beispiele sollen die Regeln festigen und Anwendungen in vielschichtigen Anwendungen ermöglichen.

Hinweis: Beispiele aus Schulbüchern

Anhang

Arbeitsblätter

Arbeitsblatt 1

Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis

Berechne mit CAS und überlege, wie Du zu diesem Ergebnis kommen kannst!

$a^2 \cdot a^3 =$

$x^5 \cdot x^7 =$

$z \cdot z = z^1 \cdot z^1 =$

$c^2 \cdot c \cdot c^4 =$

$a^2 \cdot b^3 \cdot a^5 \cdot b =$

$x \cdot z \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot z^4 =$

Regel: $a^n \cdot a^m =$

Multiplizierst du zwei Potenzen gleicher Basis, so

....

Begründung: $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot ...... \cdot a \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a \cdot a}_{m-mal}$

Wie oft wird *a* insgesamt mit sich selbst multipliziert?
Berechne nun ohne Verwendung des CAS!

$p^9 \cdot p^{13} =$

$s^3 \cdot s^4 \cdot s^5 =$

$2 \cdot k^3 \cdot 5 \cdot k^5 =$

$2^3 \cdot x^4 \cdot 3 \cdot x^7 =$

$2c^2 \cdot c \cdot 7c^4 =$

$a^2 \cdot b^7 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot a^8 \cdot b^1 \cdot b^4 \cdot a^5 \cdot b =$

$x \cdot z \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y^7 \cdot z^4 \cdot y^4 \cdot x \cdot y^5 =$

$2a^2 \cdot 4b \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot a^8 \cdot 10b^4 \cdot a^2 \cdot b =$

Arbeitsblatt 2

Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis

Berechne mit dem CAS und überlege, wie Du zu diesem Ergebnis kommen kannst!

$a^7 : a^3 =$

$b^9 : b^4 =$

$c^{14} : c =$

$d^5 : d^4 =$

> Regel: $a^m : a^n =$
>
> Dividierst du zwei Potenzen gleicher Basis, so
>
> ………………………………………………………………………………………

Begründung: Betrachte z.B. $a^7 : a^3$ als Bruch: $\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$

Von den 7 Faktoren im Zähler werden 3 "weggekürzt".
Achtung! Steht im Nenner eine höhere Potenz, wird der Zähler "weggekürzt".

Bsp.: $\frac{z^3}{z^5} = \frac{z \cdot z \cdot z}{z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z} = \frac{1}{z^2}$

Berechne nun ohne CAS! Überprüfe nach Deiner Berechnung.

$x^9 : x^2 =$

$y^{15} : y^6 =$

$\frac{s^8}{s^2} =$

$\frac{k^7}{k} =$

$\frac{x^3}{x^{10}} =$

$\frac{a^5 \cdot b^{11}}{a^3 \cdot b^2} =$

$\frac{s^5 \cdot s^7}{s^5} =$

$\frac{r^4 \cdot s^9}{s^3 \cdot r^6} =$

$\frac{x \cdot y}{x^5 \cdot y^9} =$

$\frac{e^2 \cdot f^{11} \cdot g}{f^3 \cdot g \cdot e^2} =$

$\frac{2x^2 \cdot 9y}{6x^5 \cdot 7y^7} =$

Für Spezialisten (Stoff der 6. Klasse):

Berechne nach der Regel:

$z^4 : z^9 =$

Berechne durch Kürzen: $\frac{z^4}{z^9} =$

Was bedeutet also z^{-5}?

Arbeitsblatt 3

Potenzieren von Produkten - Rechenregeln

Berechne mit dem CAS:

$(3 \cdot b)^2 =$

$(7 \cdot x \cdot y)^5 =$

$(a \cdot b)^3 =$

$(a \cdot b)^4 =$

Regel (Distributivgesetz): Potenzierst du ein Produkt, so …………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………	$(a \cdot b)^n =$

Die Formel gilt analog für die Division:

Berechne mit dem CAS:

$\left(\frac{3}{a}\right)^2 =$

$\left(\frac{b}{7}\right)^3 =$

$\left(\frac{z}{y}\right)^5 =$

Regel (Distributivgesetz): Potenzierst du einen Quotienten, so …………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………	$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

Achtung: Diese beiden Regeln gelten nicht für Addition und Subtraktion!

$$\boxed{(a+b)^2 \neq a^2+b^2}$$

Potenzieren von Potenzen - Rechenregel

Berechne nun ohne CAS und Überprüfe danach:

$\left(a^2\right)^3 =$ $\left(w^4\right)^5 =$ $\left(t^6\right)^2 =$

Regel: $\left(a^n\right)^m =$ Du potenzierst eine Potenz, indem du   ....

Versuche nun jeweils die gegebenen Zahlen so durch Rechenzeichen zu verbinden, dass das Ergebnis möglichst groß ist! Schreibe verschiedene Varianten mit ihrem Ergebnis an!

z.B.: 1,2,3 : $1 \cdot 2^3$ oder $\left(1^2\right)^3$ usw.

- 3,3,3,
- 3,4,5
- 9,9,9

Berechne nun ohne CAS und überprüfe dann deine Rechnungen:

$(3e)^2 - 3e^2 =$

$(5t)^3 + 5t^3 =$

$6u^3v \cdot (2uv)^2 =$

$3x^2y^3 \cdot (3xy)^3 =$

$(gh)^3 =$

$(g^2h^2)^3 =$

Beilage 1

Potenzschreibweise

Berechne mit dem CAS:

$\mathrm{a} \cdot \mathrm{a} =$

$\mathrm{x} \cdot \mathrm{x} \cdot \mathrm{x} =$

$\mathrm{b} \cdot \mathrm{b} =$

$\mathrm{d} \cdot \mathrm{d} \cdot \mathrm{d} \cdot \mathrm{d} \cdot \mathrm{d} \cdot \mathrm{d} =$

$\mathrm{h} \cdot \mathrm{h} \cdot \mathrm{h} \cdot \mathrm{h} =$

r^2 ist eine Kurzschreibweise für .... Man spricht : "r hoch 2". (oder "r Quadrat") $\underbrace{r \cdot r \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot r}_{n-mal} =$ Rechenausdrücke wie $r^2, r^3, \ldots\ldots, r^n$ bezeichnet man als **Potenzen**. Dabei heißt r **Grundzahl (Basis)**, und 2,3,....,n heißen **Hochzahlen (Exponenten)**

Gib in Potenzschreibweise an:

$3 \cdot 3 \cdot 3 =$

$d \cdot g \cdot d \cdot d \cdot g =$

$5 \cdot r \cdot r \cdot 5 \cdot r \cdot 5 \cdot 5 \cdot r \cdot r =$

$f \cdot 7 \cdot h \cdot 7 \cdot f \cdot f \cdot h \cdot 7 \cdot f =$

$3 \cdot o \cdot 2 \cdot p \cdot 3 \cdot p \cdot 2 \cdot 2 \cdot o \cdot p \cdot 2 \cdot p \cdot p =$

Berechne ohne CAS, indem du die Basis entsprechend oft mit sich selbst multiplizierst, und überprüfe dann mit dem CAS:

Beispiel: $7^3 = \underbrace{7 \cdot 7}_{49} \cdot 7 = \underbrace{49 \cdot 7}_{343} = 343$

Berechnung mit dem CAS durch folgende Eingabe: 7^3

$1^2 =$ $1^3 =$ $1^7 =$

$2^6 =$ $7^3 =$ $5^3 =$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 =$$

Potenzen negativer Zahlen

Berechne ohne CAS und überprüfe dann mit dem CAS:

$(-1)^2 =$

$(-1)^3 =$

$(-1)^4 =$

$(-1)^5 =$

Berechne nun noch mit dem CAS:

$(-1)^6 =$

$(-1)^7 =$

$(-1)^8 =$

Man erkennt: Eine gerade Potenz einer negativen Zahl ergibt eine .... Zahl.
Eine ungerade Potenz einer negativen Zahl ergibt eine .... Zahl.

Berechne nun weiters wieder zunächst ohne CAS und überprüfe dann mit dem CAS:

$(-7)^3 =$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$

$\left(-\frac{2}{5}\right)^4 =$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^5 =$

$\left(-\frac{r}{s}\right)^2 =$

Fülle die Tabelle ohne CAS aus!

k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
2k									
k²									

Beachte den Unterschied zwischen 2k und k²! k² ist eine verkürzte Schreibweise für $k \cdot k$. Wofür ist 2k eine verkürzte Schreibweise?

Tabellen

Fülle mit Hilfe des CAS die folgende Tabelle aus!

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
3x									
x^3									

Fülle nun auch die folgende Tabelle aus:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
4x									
x^4									

Beilage 2

Potenzen - Vorrangregeln

Berechne: $220+4\cdot 6^2$!
Zwei Schüler/innen schlagen folgende Vorgangsweise vor:

Petra) Wir quadrieren zuerst und rechnen dann nach den alten Regeln weiter:
$220+4\cdot 6^2 = 220+4\cdot 36 = 220+144 = 364$

Pauline) Wir multiplizieren zuerst 4 mit 6 und quadrieren erst dann:
$220+4\cdot 6^2 = 220+24^2 = 220+576 = 796$

Berechne mit dem CAS um herauszufinden, welcher Rechengang der richtige ist! Wir erkennen folgende Regel:

Das Potenzieren ist .... den Rechnungsarten zweiter (Multiplikation, Division) und erster (Addition, Subtraktion) Stufe durchzuführen.
Daher bezeichnet man das Potenzieren als Rechnungsart dritter Stufe.

Damit ergibt sich eine neue Reihenfolge der Berechnung:

1. Klammern auflösen
2...
3...
4...

Berechne nun ohne CAS und überprüfe dann die Ergebnisse:

$3\cdot 2^2 - 2\cdot 3^2 =$	$-3^2-(-3)^2 = -9-(+9) = -9-9 = -18$
$5\cdot 4^2 + 3\cdot 2^3 =$	$4^3-(-4)^3 =$
$(3+8)\cdot 3^2 =$	$-5^2-(-5)^2 =$
$(8-3)^2\cdot 9 =$	$-5^2-5^2 =$
$[(9-6)\cdot 3]^2 =$	$-2^3+(-2)^3 =$

Beilage 1

Potenzschreibweise

Berechne mit dem CAS:

a · a =

x · x · x =

b · b =

d · d · d · d · d · d =

h · h · h · h =

<table><tr><td>

r^2 ist eine Kurzschreibweise für .... Man spricht : "r hoch 2".
(oder "r Quadrat")

$\underbrace{r \cdot r \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot r}_{n-mal} =$
Rechenausdrücke wie $r^2, r^3, \ldots\ldots, r^n$ bezeichnet man als **Potenzen**. Dabei heißt r **Grundzahl (Basis)**, und 2,3,....,n heißen **Hochzahlen (Exponenten)**

</td></tr></table>

Gib in Potenzschreibweise an:

$3 \cdot 3 \cdot 3 =$

$d \cdot g \cdot d \cdot d \cdot g =$

$5 \cdot r \cdot r \cdot 5 \cdot r \cdot 5 \cdot 5 \cdot r \cdot r =$

$f \cdot 7 \cdot h \cdot 7 \cdot f \cdot f \cdot h \cdot 7 \cdot f =$

$3 \cdot o \cdot 2 \cdot p \cdot 3 \cdot p \cdot 2 \cdot 2 \cdot o \cdot p \cdot 2 \cdot p \cdot p =$

Berechne ohne CAS, indem du die Basis entsprechend oft mit sich selbst multiplizierst, und überprüfe dann mit dem CAS:

Beispiel: $7^3 = \underbrace{7 \cdot 7}_{49} \cdot 7 = \underbrace{49 \cdot 7}_{343} = 343$

Berechnung mit dem CAS durch folgende Eingabe: 7^3

$1^2 = 1^3 = 1^7 =$

$2^6 = 7^3 = 5^3 =$

$\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

$\left(\frac{3}{5}\right)^4 =$

$\left(\frac{x}{y}\right)^3 =$

Potenzen negativer Zahlen

Berechne ohne CAS und überprüfe dann mit dem CAS:

$(-1)^2 =$

$(-1)^3 =$

$(-1)^4 =$

$(-1)^5 =$

Berechne nun noch mit dem CAS:

$(-1)^6 =$

$(-1)^7 =$

$(-1)^8 =$

Man erkennt: Eine gerade Potenz einer negativen Zahl ergibt eine .... Zahl.
Eine ungerade Potenz einer negativen Zahl ergibt eine .... Zahl.

Berechne nun weiters wieder zunächst ohne CAS und überprüfe dann mit dem CAS:

$(-7)^3 =$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$

$\left(-\frac{2}{5}\right)^4 =$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^5 =$

$\left(-\frac{r}{s}\right)^2 =$

Fülle die Tabelle ohne CAS aus!

k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
2k									
k²									

Beachte den Unterschied zwischen 2k und k²! k² ist eine verkürzte Schreibweise für $k \cdot k$.
Wofür ist 2k eine verkürzte Schreibweise?

Tabellen

Fülle mit Hilfe des CAS die folgende Tabelle aus!

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
3x									
x^3									

Fülle nun auch die folgende Tabelle aus:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
4x									
x^4									

Beilage 2

Potenzen - Vorrangregeln

Berechne: $220+4\cdot 6^2$!
Zwei Schüler/innen schlagen folgende Vorgangsweise vor:

Petra) Wir quadrieren zuerst und rechnen dann nach den alten Regeln weiter:

$$220+4\cdot 6^2=220+4\cdot 36=220+144=364$$

Pauline) Wir multiplizieren zuerst 4 mit 6 und quadrieren erst dann:

$$220+4\cdot 6^2=220+24^2=220+576=796$$

Berechne mit dem CAS um herauszufinden, welcher Rechengang der richtige ist! Wir erkennen folgende Regel:

Das Potenzieren ist .... den Rechnungsarten zweiter (Multiplikation, Division) und erster (Addition, Subtraktion) Stufe durchzuführen. Daher bezeichnet man das Potenzieren als Rechnungsart dritter Stufe.

Damit ergibt sich eine neue Reihenfolge der Berechnung:

1. Klammern auflösen
2...
3...
4...

Berechne nun ohne CAS und überprüfe dann die Ergebnisse:

Zinseszinsrechnung

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 12. April 2010

Überblick

1.1 Zusammenfassung

Bei dieser Unterrichtssequenz sollen die Kenntnisse der Schüler/innen zur Prozentrechnung (6. Schulstufe) auf die Situation der Zinseszinsproblematik übertragen werden. Dabei wird ein – meist für die Schüler/innen neues – Denkmodell, die Iteration – als Zyklische Maschine – systematisch eingeführt und angewendet.

Kurzinformation

Schulstufe	Erarbeiten neuer Lerninhalte in der 7. Schulstufe. Vertiefung und Festigung in der 8. bis10. Schulstufe möglich.
Geschätzte Dauer	Ein (wenn der Prozess einer zyklischen Maschine bekannt ist) bis zwei Unterrichtsstunden in der 7. Schulstufe
Verwendete Materialien	Arbeitsblätter
Technische Voraussetzungen	GeogebraCAS an PC oder Notebook
Schlagwörter Mathematik	Prozentrechnen, Zinsenrechnung, Iteration, Zyklische Maschine
Schlagwörter GeoGebraCAS	Einsetzen/Substituieren, eventuell Definition von Konstanten

Autor/in	Walter Klinger, Anton Nagl, Irma Bierbaumer, Evelyn Stepancik
Download von Zusatzmaterialien	-----------

1.2 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Prozentrechnung in Sachsituation anwenden können. • Die Begriffe Grundwert, Prozentanteil sowie Prozentsatz und Kapital, Zinssatz und Zinsen erklären können. • Berechnungen bei Vermehrung und Verminderung von Grundwerten. Kapitalien bei angegebenen Prozentsätzen berechnen können. • Potenzrechnen.
Technisches Vorwissen	• Elementare Bedienung von GeoGebraCAS.

1.3 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Zinseszinsen	Jahreszinsen berechnen und die Entwicklung des Kapitals über mehrere Jahre angeben können.
Iteration	Einen sich zyklisch wiederholenden Vorgang beschreiben und oftmals anwenden können.
KESt	Zinssätze unter Berücksichtigung der KESt (25 % der Zinsen) verwenden und bei der Zinseszinsrechnung anwenden können.

1.4 Lernzielkontrolle

Anwendung von Zinseszinsrechung (mit Schwerpunkt der Festigung des iterativen Zugangs) bei weiteren Beispielen. Überprüfung der Ergebnisse durch eine geschlossene Formel.

Vorbereitung der Lehrenden

1.5 Vorbereitung des Unterrichts

Arbeitsblätter kopieren oder zum Download vorbereiten. Jede Schülerin / Jeder Schüler braucht ein eigenes Notebook oder einen Computer im EDV-Raum (Das Arbeiten von zwei Schüler/innen an einem Gerät ist auch möglich).

1.6 Verwendung des GeoGebraCAS

Das CAS dient besonders dem Einsetzen von Zahlenwerten in die vorgegebene Formel und der Auswertung. Dadurch soll der Vorgang einer zyklischen Maschine eingeübt und formalisiert werden.

Verwendete Befehle

`Vereinfache`	Vereinfacht die beiden Terme einer Gleichung
`Expand`	Ausrechnen von Ausdrücken
`Factor`	Faktorisieren von Ausdrücken
`Approximate`	Berechne näherungsweise
`Substitute`	Setze für einen Ausdruck/Teilausdruck ein
`Numeric-Befehl`	Numeric(Ausdruck, Anzahl der Stellen] für bestimmte Ausgaben von Dezimalzahlen

Didaktischer Hintergrund

Bei der Zinseszinsrechnung sollen die Schüler/innen den sich immer wiederholenden Vorgang, der zur Berechnung des Kapitals (Guthabens auf einem Sparbuch) benötigt wird, erkannt und mehrmals durchgeführt haben. Dieser Iterationsprozessprozess soll eingeführt und /oder gefestigt werden.
Darauf aufbauend kann die Entwicklung einer geschlossenen Formel zur Berechnung von Kapitalien nach einer bestimmten Anzahl von Jahren bei einem gleich bleibenden Zinssatz mit und ohne Berücksichtigung der KESt erfolgen.

Der hier gewählte Zugang zum Verständnis eines iterativen Prozesses soll als Vorbreitung für weitere Anwendungen in den nachfolgenden Schulstufen dienen. (z.B.: näherungsweise Berechnung von Wurzeln – HERON-Verfahren sowie Kreditprobleme – Ratenrückzahlungsmodelle, …)
Das CAS bietet hier – besser als die Tabellenkalkulation – die Möglichkeit, den Vorgang des Einsetzens beliebig oft zu wiederholen und alle Teilschritte einzusehen. Diese Situation soll im Lernprozess häufig, langsam und schrittweise durchgeführt werden.
Erst in einer späteren Lernphase in der 3. Klasse sollen diese Ansätze dann mit den Möglichkeiten der Tabellenkalkulation und Graphik verbunden werden. Dazu werden Materialien für den weiteren Unterrichtverlauf und ein Video für das Handling der Tabellenkalkulation und der Erstellung einer Graphik angeboten.

Einsatz im Unterricht

1.7 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Wiederholung der Grundbegriffe der Prozentrechnung. Verbindung der bereits bekannten Begriffe mit den Begriffen Anfangskapital, Zinssatz und Zinsen anhand eines Beispiels aus der Erfahrungswelt der jungen Menschen (z. B.: Sparbuch)	Lehrer/innen-/Schüler/innengespräch	

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Erarbeitungsphase	Zuerst wir die Aufgabenstellung schrittweise mit dem CAS durchgeführt. Danach wird dieser Vorgang verbalisiert. Dasselbe Beispiel kann unter dem Blickwinkel der KESt nochmals bearbeitet werden.	Einzelarbeit mit anschließendem Plenum	Arbeits-blätter Video
Zusammenfassung	Verbalisierung des Vorganges. Verallgemeinern der Zyklischen Maschine bzw. Iteration.	Plenumsgespräch	Selbst erstellte Mitschrift
Lernzielkontrolle	Informationsfest-stellung unter besonderer Berücksichtigung der verbalen Beschreibung des Vorganges	Einzelarbeit	
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Ähnliche Beispiele durchführen		
Hausübung	Beispiele zum Festigen durchführen und verbal beschreiben können.		Hü-Mappe bzw. -Heft

1.8 Unterrichtsablauf

Einführung

In der 2. Klasse (6. Schulstufe) werden die Begriffe Prozentanteil, Grundwert und Prozentsatz eingeführt und Formeln zu deren Berechnung hergeleitet. In der 3. Klasse (7. Schulstufe) werden diese Begriffe vertieft. Dabei werden insbesondere die Formeln zur Vermehrung/Verminderung eines Betrags G um p% erarbeitet und gefestigt:

$A = G \cdot \frac{p}{100}$ und $A = G \cdot (1 + \frac{p}{100})$

Danach werden diese Begriffe anhand der Aufgaben vom „*Arbeitsblatt 1 – Berechnung von Zinseszinsen*" mit jenen des Bankwesens am Beispiel der Zinseszinsrechnung in Verbindung gebracht.

Zinsenrechnung	Prozentrechnung
(Anfangs-)Kapital K	Grundwert G
Zinssatz p	Prozentsatz p
Zinsen Z	Prozentanteil A

Erarbeitungsphase

Die Aufgabenstellung von Arbeitsblatt 1 wird langsam und schrittweise mit den Schüler/innen bearbeitet. Dabei kann das beiliegende Video zur Veranschaulichung der Vorgangsweise verwendet werden.

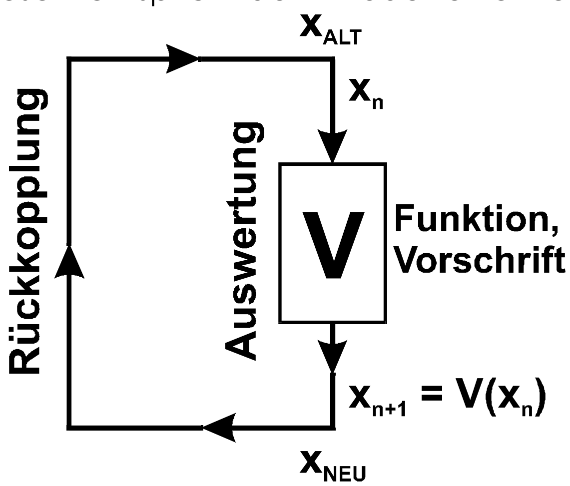
Die Grundidee der Iteration ist hier von besonderer Bedeutung!
Bei der Iteration wird ein Verfahren (z.B.: Rechenvorschrift) jeweils auf das vorhergehende (alte) Ergebnis angewandt. Man erhält dadurch immer wieder ein neues Ergebnis, auf das selbst wieder das Verfahren angewendet wird. D.h. das „neue" Ergebnis wird so zu einem „alten" Ergebnis. Es entstehen immer wieder neue Ergebnisse (Werte). Ein Startwert (z.B.: Anfangskapital bei diesem Beispiel 1000 Euro) muss vorgegeben oder gewählt werden.

Weiters soll eine geschlossene Formel (siehe Arbeitsblatt 2) hergeleitet

werden.
Danach wird der Begriff KESt (25%) eingeführt und die Vorgangsweise nochmals wiederholt (siehe Arbeitsblatt 3). Dabei soll auch eine geschlossene Formel (nur mit unter Berücksichtigung der KESt) angegeben werden)

Zusammenfassung

Nochmalige Beschreibung der zyklischen Maschine. Die Zinseszinsberechnung – jedoch nicht nur diese – entspricht dem Modell einer Iteration:



Dabei wird ein Vorgang immer wiederholt bis die gewünschte Anzahl an Durchläufen erfolgt ist.

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Weitere Beispiele:
1685 verkauften die Indianer die Insel Manhattan für 24 Dollar an die Weißen. Wie viel Geld wäre das heute, wenn sie das Geld zu 6% Zinsen auf die Bank gelegt hätten?

Hausübung

Beispiele zur Zinseszinsrechnung

Bsp 1: 14.000€ werden zu 3% angelegt. Nach 4 Jahren wird der Zinssatz auf 2,75 % gesenkt. Wie viel kann nach insgesamt 10 Jahren abgehoben werden? Berücksichtige 25% KESt! (17297,31 €)

Bsp 2: Ein unbekanntes Grundkapital wächst bei einer Verzinsung von 3.5 % (25 % KESt) in 3 Jahren auf 51 880 €. Berechne das Grundkapital! (48 000 €)

Bsp 3: 35 000 € werden zu einem Zinssatz von 3 % (25 % Kest) 7 Jahre und 11 Monate lang angelegt. Berechne das Endkapital! (41 742,40 €)

Kapital nach 3 Jahren:
Zinsen im ganzen 4. Jahr:
Zinsen für 11 Monate:
Endkapital:

Bsp 4: Eine Bank gewährt 3 % Zinsen (25 % KESt). Herr Huber legt 8 000 € ein und nach 3 Jahren nochmals 2 000 €. Wie viel kann er nach insgesamt 8 Jahren abheben? (ca. 1794€)

Bsp 5: 20 000 € werden zu 3,25 % (25 % KESt) verzinst. Nach 2 Jahren werden 5 000€ eingelegt, nach weiteren 3 Jahren werden 5 000 € abgehoben. Wie viel kann man nach insgesamt 8 Jahren abheben? (26 801,96 €)

Bsp 6: Eine Bank bietet 4 % Zinsen (25% KESt). Wie viel muss man anlegen, damit das Kapital in 4 Jahren auf 70 107 € wächst? (62 000 €)

Bsp 7: Frau Pokorny legt 25 000 € zu 3,25% (25 % KESt) an. Wie viel kann sie nach 3 Jahren 7 Monaten abheben? (27 348,37 €)

Hinweis: Beispiele aus Schulbüchern

Anhang

Arbeitsblätter

Arbeitsblatt 1 - Berechnung von Zinseszinsen – Zyklische Maschine

Ein Kapital von 1 000 Euro wird mit einem Zinssatz von 5% p.a. bei einen Bank auf ein Sparbuch gelegt und nach 10 Jahren abgehoben.
a) Wie viel Geld hat man nach 10 Jahren zur Verfügung?

Anleitung: Verwende im CAS den Term **K·1,05** (oder $\mathbf{K_{neu} = K_{alt} \cdot 1{,}05}$), um die Entwicklung des Kapitals schrittweise zu berechnen und trage die Ergebnisse hier im Arbeitsblatt ein!

Jahre		**Kapital**
0	$K_0 =$	1000
1	$K_1 =$	$K_0 \cdot 1{,}05 =$
2	$K_2 =$	$K_1 \cdot 1{,}05 =$
3	$K_3 =$	$K_2 \cdot 1{,}05 =$
4	$K_4 =$	$K_3 \cdot 1{,}05 =$
5	$K_5 =$	$K_4 \cdot 1{,}05 =$
6	$K_6 =$	$K_5 \cdot 1{,}05 =$
7	$K_7 =$	$K_6 \cdot 1{,}05 =$
8	$K_8 =$	$K_7 \cdot 1{,}05 =$
9	$K_9 =$	$K_8 \cdot 1{,}05 =$
10	$K_{10} =$	$K_9 \cdot 1{,}05 =$

Beschreibe den Vorgang mit eigenen Worten und durch eine allgemeine Formel – verwende die Variablen K_{alt}, K_{neu} und p!

Arbeitsblatt 2 - Berechnung von Zinseszinsen – geschlossene Formel

Setze jeweils für das Kapital nach 1,2,3,... Jahren die dazugehörigen Kapitalien ein, sodass schrittweise eine Formel nur mit K_0 entsteht.

Jahre		**Kapital**	**Kapitalberechnung nur mit** K_0	
0	$K_0 =$	K_0		
1	$K_1 =$	$K_0 \cdot 1{,}05 =$	$K_0 \cdot 1{,}05$	
2	$K_2 =$	$K_1 \cdot 1{,}05 =$	$K_0 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 =$	$K_0 \cdot 1{,}05^2$
3	$K_3 =$	$K_2 \cdot 1{,}05 =$	$K_1 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = K_0 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 =$	$K_0 \cdot$
4	$K_4 =$	$K_3 \cdot 1{,}05 =$		$K_0 \cdot$
5	$K_5 =$	$K_4 \cdot 1{,}05 =$		$K_0 \cdot$
6	$K_6 =$	$K_5 \cdot 1{,}05 =$		
7	$K_7 =$	$K_6 \cdot 1{,}05 =$		
8	$K_8 =$	$K_7 \cdot 1{,}05 =$		
9	$K_9 =$	$K_8 \cdot 1{,}05 =$		
10	$K_{10} =$	$K_9 \cdot 1{,}05 =$		

Gib eine geschlossene Zinseszinsformel an! Verwende für das Anfangskapital die Variable K_0, für den Zinssatz p und für das Kapital nach n Jahren K_n!

Beschreibe die geschlossene Formel mit eigenen Worten:

Überprüfe die Werte für K_2 K_5 K_7 aus Arbeitsblatt 1 mit Hilfe der geschlossenen Formel**!**

Arbeitsblatt 3 - Berechnung von Zinseszinsen unter Berücksichtigung der KESt

Aufgabenstellung neu:
Ein Kapital von 1000 Euro wird mit einem Zinssatz von 5% p.a. bei einer Bank auf ein Sparbuch gelegt und nach 10 Jahren abgehoben.
a) Wie viel Geld hat man nach 10 Jahren wirklich, also unter Berücksichtigung der KESt, zur Verfügung?

5 %*0,75 = _______ %

Bearbeite mit dem CAS schrittweise nach der Strategie: „aus alt wird neu“

Jahre		**Kapital**	**Kapitalberechnung nur mit** K_0
0	$K_0 =$	1000	
1	$K_1 =$	$K_0 \cdot 1{,}0375 =$	$= K_0 \cdot 1{,}0375 =$
2	$K_2 =$	$K_1 \cdot 1{,}0375 =$	$= K_0 \cdot 1{,}0375^2 =$
3	$K_3 =$	$K_2 \cdot 1{,}0375 =$	$= K_0 \cdot$
4	$K_4 =$	$K_3 \cdot 1{,}0375 =$	=
5	$K_5 =$	$K_4 \cdot 1{,}0375 =$	=
6	$K_6 =$	$K_5 \cdot 1{,}0375 =$	=
7	$K_7 =$	$K_6 \cdot 1{,}0375 =$	=
8	$K_8 =$	$K_7 \cdot 1{,}0375 =$	=
9	$K_9 =$	$K_8 \cdot 1{,}0375 =$	=
10	$K_{10} =$	$K_9 \cdot 1{,}0375 =$	=

Gib eine Formel für die Iteration und eine geschlossene Formel (nur mit K_0) unter Berücksichtigung der KESt an:

Was stellst Du beim Vergleichen der Endbeträge nach 10 Jahren fest, wenn einmal mit und einmal ohne KESt fest gearbeitet? Beschreibe in eigenen Worten.

Bearbeite die weiteren Aufgabestellungen:

b) Könntest du das Anfangskapital K_0 von 1 000 € gleich um 10*5% = 50% vermehren, um das Endkapital zu erhalten?
c) Um wie viel Prozent wurde das ursprüngliche Anfangskapital vermehrt, um das Endkapital zu erhalten?
d) Nach wie viel Jahren wird K_0 verdoppelt?

Zinseszinsen

1. Beispiel:

200 € werden 17 Jahre lang zu einer Verzinsung von p_{eff} = 4% angelegt. Stelle das Kapital nach einem, zwei ,... Jahren mit Hilfe einer Tabelle und als Grafik dar! Beantworte folgende Fragen:

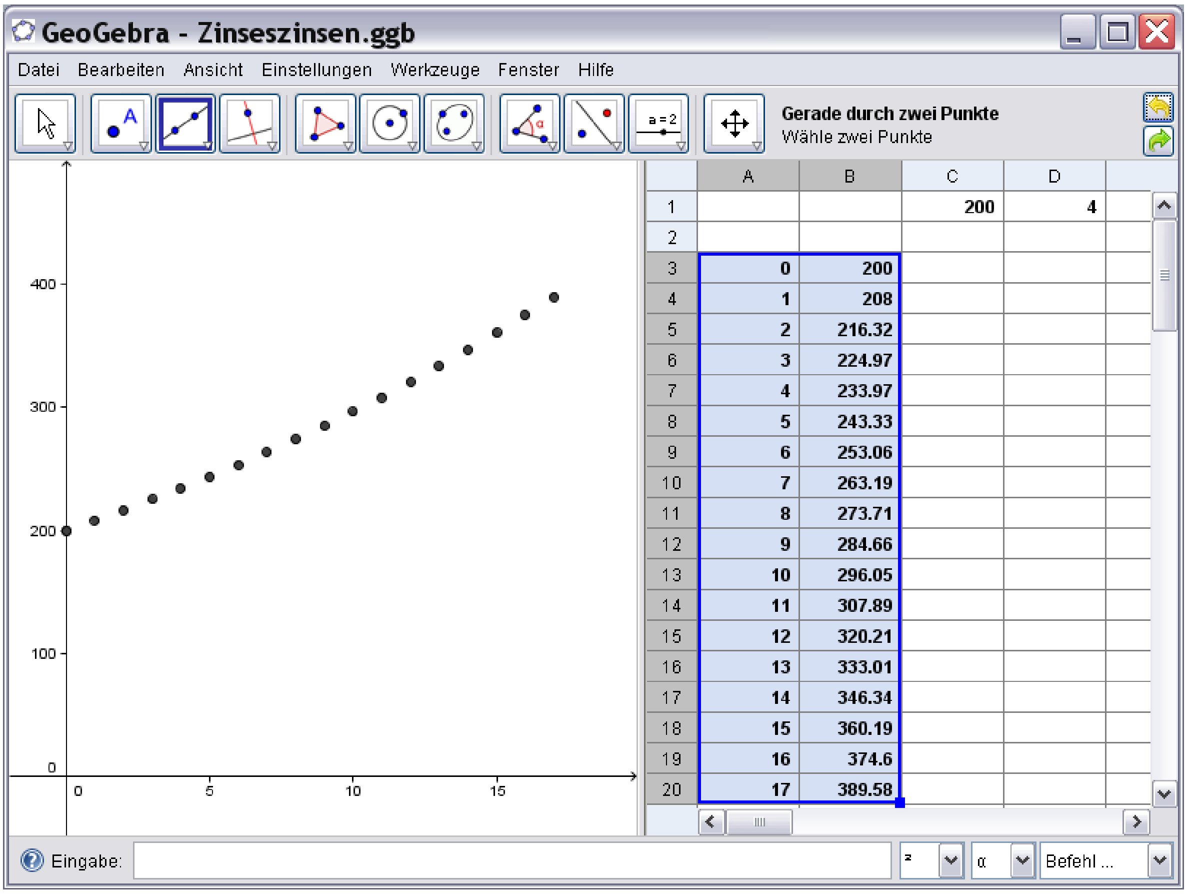
a) Wie groß ist das Kapital nach fünf Jahren?

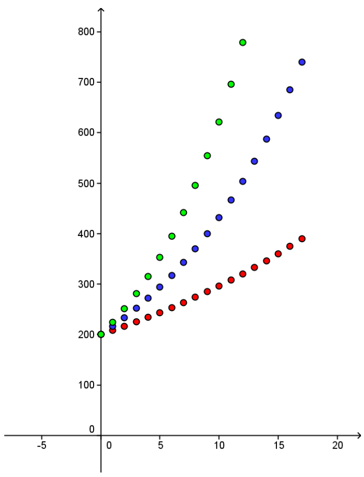
b) Wann ist das Kapital erstmalig auf über 300 € gestiegen?

c) Stelle durch Probieren fest, wie hoch der Zinssatz sein muss, damit das Kapital in 15 Jahren auf 500 € ansteigt.

d) Wie viele Jahre muss man sparen, damit sich das Kapital verdoppelt?

e) Ist die Zunahme des Kapitals ein linearer Vorgang?





2. Beispiel (freiwillig):

Stelle in einer Tabelle und einer Zeichnung verschiedene Verzinsungen dar, damit man den Unterschied im Kapitalwachstum sieht. In der nebenstehenden Abbildung sind die Zinssätze 4%, 8% und 12% verglichen.

Zinseszinsen

1. Beispiel:

200 € werden 17 Jahre lang zu einer Verzinsung von p_{eff} = 4% angelegt. Stelle das Kapital nach einem, zwei ,... Jahren mit Hilfe einer Tabelle und als Grafik dar! Beantworte folgende Fragen:

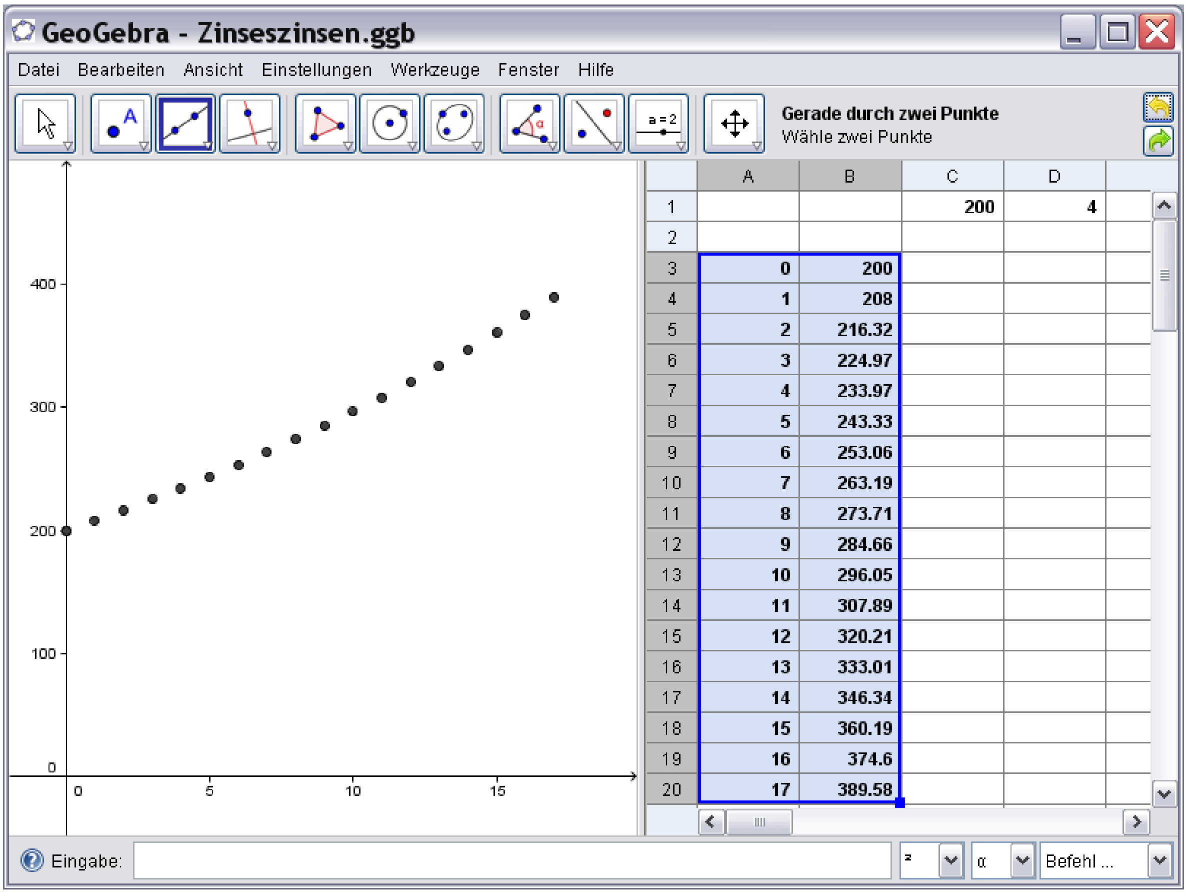
a) Wie groß ist das Kapital nach fünf Jahren?

b) Wann ist das Kapital erstmalig auf über 300 € gestiegen?

c) Stelle durch Probieren fest, wie hoch der Zinssatz sein muss, damit das Kapital in 15 Jahren auf 500 € ansteigt.

d) Wie viele Jahre muss man sparen, damit sich das Kapital verdoppelt?

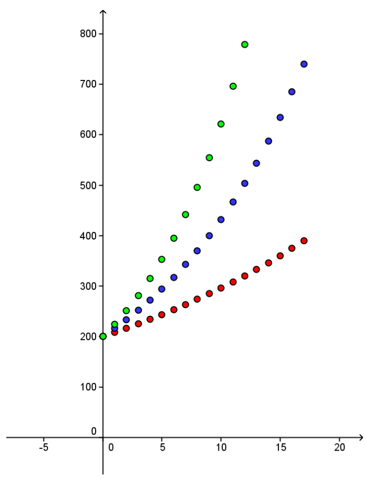
e) Ist die Zunahme des Kapitals ein linearer Vorgang?



(Hilfe: ZinseszinsenVideo.wmv)

2. Beispiel (freiwillig):

Stelle in einer Tabelle und einer Zeichnung verschiedene Verzinsungen dar, damit man den Unterschied im Kapitalwachstum sieht. In der nebenstehenden Abbildung sind die Zinssätze 4%, 8% und 12% verglichen.



Anwenden von Formeln

$$(u + v)^2 = u^2 + 2 u v + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2 u v + v^2$$

$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 19. April 2010

Überblick

1.1 Zusammenfassung

In der dritten Klasse werden die drei oben angeführten Formeln hergeleitet und in unterschiedlichen Situationen angewendet. Meist werden eine geometrische Interpretation und algebraische Berechnungen den Lernprozess bestimmen. In der 4. Klasse werden diese drei Formeln vertieft und weitere Formeln erarbeitet. Dabei kann das CAS nicht nur als geeignetes Testinstrument eingesetzt werden. Durch die Möglichkeiten eines didaktischen CAS können auch Teilausdrücke bearbeitet werden und für Teilausdrücke andere Ausdrücke eingesetzt werden. Diese vielschichtigen Manipulationsmöglichkeiten auf Basis einer gesicherten Termstruktur eröffnet ein Feld von vielen Möglichkeiten den Lernprozess in der elementaren Algebra zu unterstützen.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	Vertiefung der Anwendung der bereits in der 7. Schulstufe gelernten drei Formeln und Anwendung bei komplexeren Aufgaben. Diese Materialien können jedoch auch jederzeit in der Sekundarstufe 2 zum Festigen der Möglichkeiten eines didaktischen CAS und zur nachhaltigen Sicherung elementarer algebraischer Umformungen eingesetzt werden.
Geschätzte Dauer	1-2 Unterrichtseinheiten

Verwendete Materialien	Arbeitsblätter
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS an PC oder Notebook
Schlagwörter Mathematik	Binomische Formeln, Substituieren, Termstruktur
Schlagwörter GeoGebraCAS	Teilausdrücke bearbeiten, Substituieren, Expandieren, Faktorisieren, Termstrukturen verändern
Autor/in	Walter Klinger
Download von Zusatzmaterialien	-----------

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Grundlagen der Elementaren Algebra (Term, Rechnen mit Termen) • Potenzrechnen, Binome multiplizieren können • Bruchrechnen • Folgende Formeltypen kennen: $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$
Technisches Vorwissen	• Elementare Bedienung von GeoGebraCAS und Kenntnisse über das Bearbeiten von Teilausdrücken und eventuell Techniken um Terme vergleichen zu können

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Formeln anwenden können	Sicherung der Fertigkeiten bei der Anwendung von Formeln. Dabei werden folgende drei Formeltypen verwendet: $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$

Lehrinhalt	Lernziel
Fehlende Teile erkennen, ergänzen und überprüfen können	Fehlende Teile, bei denen die drei angeführten Formelbeziehungen gelten erkennen, angeben und einsetzen können. Techniken der Veränderung von Termen und Termstrukturen beherrschen und anwenden können. Eventuell Fehleranalyse auf Basis eines sicheren Termstruktursystems (CAS) durchführen können. Strategien und Vorgangsweisen verbalisieren können.
Komplexere Aufgaben im Kopf lösen können	Die Fertigkeiten auch in komplexeren Situationen erkennen, herleiten und dann auch im Kopf (händisch zu Fuß)anwenden können

1.5 Lernzielkontrolle

Bei ähnlichen Beispielen händisch lösen und mit GeoGebraCAS testen können und mündlich oder schriftlich Beschreibung der Vorgangsweise angeben können

Vorbereitung der Lehrenden

1.6 Vorbereitung des Unterrichts

Arbeitsblätter kopieren oder zum Download vorbereiten. Jede Schülerin/Jeder Schüler braucht ein eigenes Notebook oder einen Computer im EDV-Raum (es können auch zwei Schüler/innen zusammen an einem PC arbeiten).

1.7 Verwendung des GeoGebraCAS

Eingabe von Termen. Teilausdrücke bearbeiten, Teilausdrücke durch Ausdrücke ersetzen können, Faktorisieren und Expandieren. Veränderungen der Termstruktur durchführen können, Termstukturen auf- und abbauen können, Veränderungen auch rückgängig machen können.

Verwendete Befehle

`Vereinfache`	Vereinfacht einen Term

`Factorisiere`	Terme als Pordukte darstellen
`Expandiere`	Terme ausrechenen
`Substituiere`	In (Teil-)Ausdrücke andere Ausdrücke einsetzen können
`Lösche`	Löscht die Eingabezeile
	Alle diese Befehle sollen auch auf Teilausdrücke angewendet werden können und eventuell zur Fehlerfindung dienen

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug


Didaktischer Hintergrund

Durch diese Beispiele soll in Bereich der elementaren Algebra der Lernprozess der Schüler/innen beim Umgang mit Termen und Termstrukturen sowie Anwendung von Formen in einer sehr frühen Phase unterstützt werden. Das CAS eignet sich neben der Verwendung als Testinstrument durch seine vielschichtigen Manipulationsmöglichkeiten besonders als Lernwerkzeug, das die Begriffsbildung unterstützt und den Umgang mit Termstrukturen festigt. Gleichzeitig kann in einem frühen Stadium ein Werkzeug zur Fehleranalyse, Überprüfung und Sicherung des Lernertrages verwendet werden. Die Selbständigkeit im Umgang mit Lerninhalten steht dabei im Zentrum. Weiters werden dadurch Strategien vorbereitet, die in späteren Lernphasen ein großes Repertoire von Vergleichstrategien und ein flexibler Umgang mit eigenen und fremden Produkten im Bereich des Termrechnens ermöglichen. Das CAS dient dabei nicht nur als Feedbackinstrument, sondern wird zum integrierten Bestandteil des mathematischen Erfassen und Handelns.

1.8 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Wiederholung der drei Formeln	Lehrer-/Schüler/innengespräch	
Erarbeitungsphase	Teil 1) Fehlende Teile sollen eingesetzt werden und die Richtigkeit der Formeln mit dem CAS getestet werden. Teil 2) Vervollständigung der Formeln druchgeführt werden sowie fehlende Teile erkannt und/oder richtiggestellt sowie it dem CAS getestet werden werden	Alleine Teilausdrücke bearbeiten und Tests durchführen können sowie Termstrukturen verändern und diese auch kommunizieren können	Arbeitsblatt - Formeln ergänzen (2 Seiten) Arbeitsblatt - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms
Zusammenfassung	Es werden Strategien eingeübt, mit denen SchÜler/innen elementare algebraische Umformungen durchführen und selbständig die Richtigkeit von selbsterzeugten Termen und Zusammenhängen testen können	Plenumsgespräch und schriftliche Zusammen-fassung	
Lernzielkontrolle	Neuerliche Anwendung mit selbständiger Beschreibung der Vorgangsweise	Einzelarbeit – Partnerarbeit zum Vergleichen und Diskussion	

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Ähnliche Beispiele werden in komplexeren Aufgabenstellungen angeboten und Strategien für die ´händisch´ Bearbeitung hergeleitet.	Gemeinsames Erarbeiten und Anwendung der Strategien für ´händische´ Bearbeitung	Arbeitsblatt - Vertiefung der Anwendung von Formeln
Hausübung	Weitere Beispiele sollen bearbeitet werden und Fehler erkannt und ausgebessert werden	Einzelarbeit	Hü-Mappe bzw. -Heft

1.9 Unterrichtsablauf

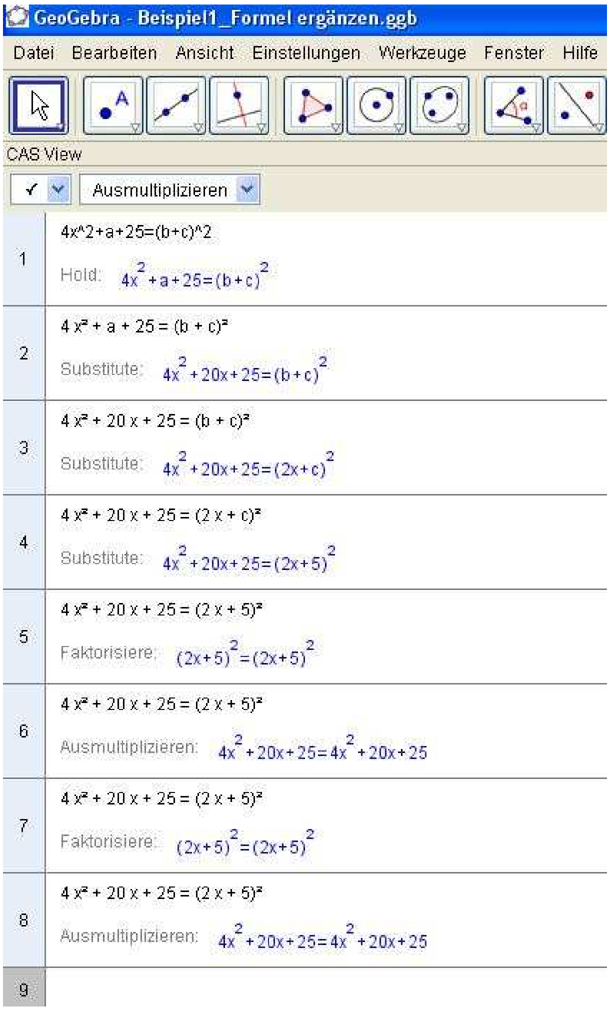
Einführung

Wiederholung der drei Formeln

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$
$$(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$
$$u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$$

Erarbeitungsphase

Beim **Arbeitsblatt - Formel Ergänzen** – wird zuerst ein Beispiel vorgezeigt und Testverfahren/Nachweisstrategien für die richtige oder falsche Bearbeitung aufgezeigt. Die Vorgansweise ist wie folgt auf dem Arbeitsblatt beschrieben.



Gib danach die Gleichung in dein CAS ein Zeile 1!
Belege wie in Abbildung 1 Variablen a, b und c mit den vorgegebenen Werten a = 20x, b = 2x und c = 5 (Zeilen 4,5,6)

Abbildung 1 - Belege die Variablen a,b,c mit deinen Werten

Führe folgende Überprüfungen durch (Testverfahren):

1) Faktorisiere die linke Seite der Gleichung in Zeile 5 Faktorisiere den Term) und vergleiche die beiden Seiten der Gleichung.
2) Expandiere (ausmuliplizieren) die rechte Seite der Gleichung in Zeile 6 und vergleiche die beiden Seiten der Gleichung.

Weitere Möglichkeiten:

3) Subtrahiere von der linken Seite der Gleichung die rechte Seite (oder umgekehrt) - es entsteht 0. (soll das bleiben?)

Die Belegungen der gesuchten Variablen stimmen. Überprüfe das Beispiel 1. Wenn ein Fehler aufgetreten ist, dann mache zum falsch eingetragenen Wert eine Falschzeichen und schreibe darunter mit Farbstift die richtige Lösung. Schreibe die vollständige Formel in die Tabelle.

Danach werden die Beispiele 2 bis 6 selbständig händisch bearbeitet. Als Beispiel 7 soll eine selbst erzeugtes Beispiel erstellt werden und von einer Mitschülerin/einem Mitschüler bearbeit werden. Die Kontrolle soll für alle Beispiele mit Hilfe des CAS erfolgen.

Zusammenfassung der Testverfahren (Vergleichstechniken):

Diese sollen besprochen werden:

1) Ersetze und expandiere eine Seite der Gleichung
2) Substituiere (Ersetze) richtig und faktorisiere eine Seite der Gleichung
3) Subtrahiere von der linken Seite die rechte (oder umgekehrt) und es entsteht die Zahl 0

weitere Techniken, die von Schülern/innen kommen können:

4) Wie bei 1), 2) und 3), jedoch wird die ganze Gleichung faktorisiert oder expandiert
5) Nicht die Gleichung (oder Seiten der Gleichung) wird faktorisiert oder expandiert, sonder die linke und die rechte Seite als eigene Terme getrennt bearbeitet.
6) Linke Seite dividiert durch rechte Seite der Gleichung -> Ergebnis 1
7) Testen durch Einsetzen von Zahlen - Problem Allgemeingültigkeit

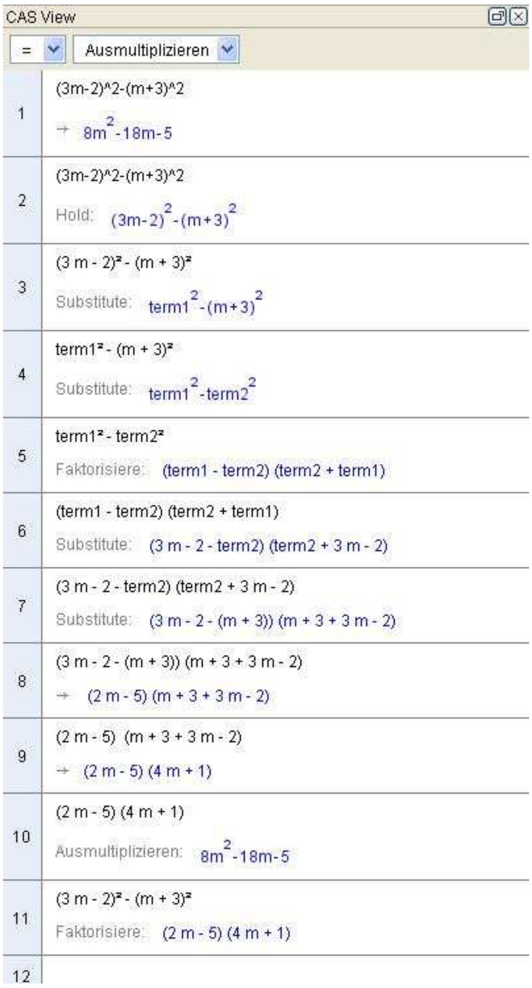
Danach wird das **Arbeitsblatt - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms** – bearbeitet werden. Dabei geht es um die Beantwortung der Frage:

Welcher der in der ersten Spalte gegebenen Terme ist das Quadrat eines Binoms (vollständiges Quadrat)? Ändere die Terme, die keine vollständigen Quadrate sind, so ab, dass Produkte und Quadrate von Binomen entstehen!

Es soll auch die fehlenden Teile in den Angaben erklärt werden und Richtigstellungen durchgeführt werden!

Anschließend wird ein komplexeres Beispiel, **Arbeitsblatt - Vertiefung der Anwendung von Formeln,** bearbeitet werden. Dabei steht die Aufforderung „Verwandle folgenden Term in eine Produkt“ im Zentrum der Bearbeitung:

$$(3m-2)^2-(m+3)^2=$$



Zuerst wird die Grundstruktur des Ausdrucks anschaulich gemacht (für 3x+1 wird term1 und für 2x-3 wird term2 eingesetzt), diese ist bekannt: a^2-b^2 (Zeile 3 und 4).

Danach wird der Term faktorisiert (Zeile 5)

Dann wird der Ausdruck wieder zurückeingesetzt (für term1=3x+1 und term2 =2x-3 - Zeile 6 und 7)

Es werden dann die Teilfaktoren unterlegt und mit = (Vereinfacht (Simplify) bearbeitet, dann entsteht der Ausdruck von Zeile 9 (Unterlegung mit Klammer – wenn nur en Teilausdruck in der Klammer unterlegt bekommt nach eine zusätzliche Klammer, das ist nicht falsch, aber unübersichtlich!).
Wir können also auch im Kopf die Formel anwenden also faktorisieren

Ein weiteres Beispiel soll ´händisch´ gelost und dann getestet werden.

Zusammenfassung

Diese Vorgangsweise soll neben den benannten Lerninhalten und Lernzielen auch als Vorbereitung für weitere Bearbeitungen von Termen, Vergleichen von Termen und Fehleranalyse verstanden werden.

Anhang

Arbeitsblätter
Arbeitsblatt - Formel Ergänzen
Arbeitsblatt - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms
Arbeitsblatt - Vertiefung der Anwendung von Formeln

Arbeitsblatt - Formeln ergänzen

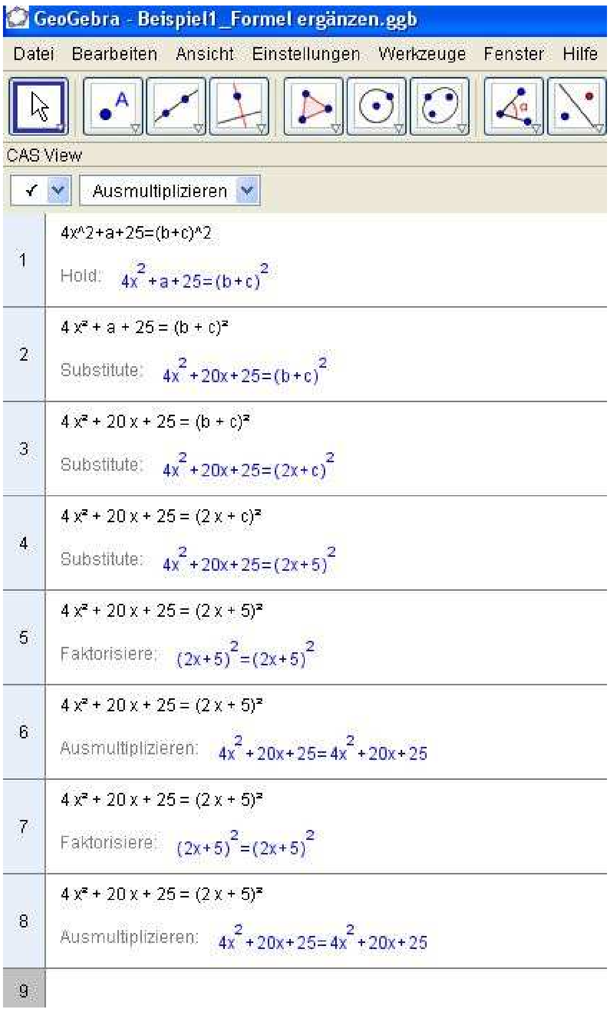
Vervollständige nach einer der drei folgenden Formeln:

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$
$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$
$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

Beispiel 1)

Versuche a, b und c zu bestimmen (Arbeite mit einem Bleistift - es könnten Fehler auftreten!)

Gegeben	Gesucht	Gesucht	Gesucht	Vollständige Formel
$4x^2 + a + 25 = (b + c)^2$	a =	b =	c =	



Gib danach die Gleichung in dein CAS ein Zeile 1! Belege wie in Abbildung 1 Variablen a, b und c mit den vorgegebenen Werten a = 20x, b = 2x und c = 5 (Zeilen 4, 5, 6)

Abbildung 1 - Belege die Variablen a, b, c mit deinen Werten

Führe folgende Überprüfungen durch (Testverfahren):

1) Faktorisiere die linke Seite der Gleichung in Zeile 5 Faktorisiere den Term) und vergleiche die beiden Seiten der Gleichung.
2) Expandiere (ausmuliplizieren) die rechte Seite der Gleichung in Zeile 6 und vergleiche die beiden Seiten der Gleichung.

Weitere Möglichkeiten:

3) Subtrahiere von der linken Seite der Gleichung die rechte Seite (oder umgekehrt) - es entsteht 0. (soll das bleiben?)

Die Belegungen der gesuchten Variablen für Beispiel 1 stimmen.
Wir haben also richtig eingesetzt.

Wenn ein Fehler aufgetreten ist, dann mache zum falsch eingetragenen Wert ein Falschzeichen und schreibe darunter mit Farbstift die richtige Lösung. Schreibe die vollständige Formel in die Tabelle.

Du hast damit verschiedene Testverfahren gelernt und kannst diese selbständig anwenden. **Bearbeite die weiteren Beispiele** selbständig und verwende bei der Überprüfung jeweils ein anderes Testverfahren. Einige Beispiele sind nicht leicht!

Eigenes Arbeitsblatt

Gegeben	Gesucht	Gesucht	Gesucht	Vollständige Formel
Beispiel 2) $25x^2 + a + 4y^2 = (b + c)^2$	a =	b =	c =	
Beispiel 3) $(u + v)^2 = 49a^2 + 42af + m$	m =	u =	v =	
Beispiel 4) $36 - 36u + e = (c - r)^2$	c =	e =	r =	
Beispiel 5) $a + 12cd + m = (2c + e)^2$	a =	e =	m =	
Beispiel 6) $4x^2 + 2xy + a = (b + c)^2$	a =	b =	c =	
Beispiel 7) $j - 4d^2 = (5s - r)(5s + r)$	r =	j =	--------	
Partnerbeispiel *)				

*) Erfinde ein Beispiel selbst und bitte deinen Tischnachbar/in, dieses zu bearbeiten - so habt ihr zwei Beispiele, die ihr dann gemeinsam testen könnt.

Arbeitsblatt - Welcher Term ist das Quadrat eines Binoms

Welcher der in der ersten Spalte gegebenen Terme ist das Quadrat eines Binoms (vollständiges Quadrat)?
Ändere die Terme, die keine vollständigen Quadrate sind, so ab, dass Quadrate von Binomen entstehen (Verwende einen Farbstift bei deiner Veränderung)!
Versuche zu erklären, welche Fehler gemacht wurden!
Schreibe die Terme (richtige oder veränderte Terme) als Quadrat eines Binoms in die letzten Spalte

Gegebener Term	voll-ständiges Quadrat ? Ja/Nein	Gesucht Glied 1 Glied 2	Gesucht doppeltes Produkt	Quadrat des Binoms
Beispiel 1) $16\ x^2 + 8\ a\ x + a^2$	JA	4 x a	8 a x	$(4\ x + a)^2$
Beispiel 2) $a^2 - a\ f + f^2$				
Beispiel 3) $r^2 + 4\ r$				
Beispiel 4) $16\ b^2 - 40\ b\ c + 25\ c^2$				
Beispiel 5) $a^2 + 64\ m^2$				
Beispiel 7) $81\ s^2 + 18\ s + 1$				
Beispiel 8) $x^2/4 - 2\ x + 4$				

Die zweite Spalte bezieht sich auf die Angabe in Spalte eins. In Spalte 3, 4 und 5 sollen bereits deine Veränderungen berücksichtigt sein!

Test nach der vollständigen Bearbeitung deine Ergebnisse mit dem CAS!

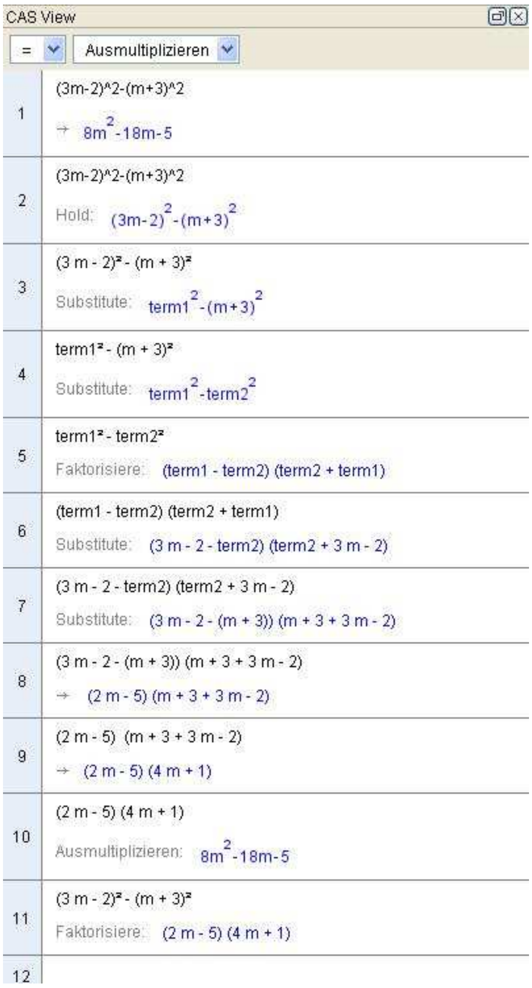
Arbeitsblatt - Vertiefung der Anwendung von Formeln

Nun können die gewonnenen Erkenntnisse auch bei komplexeren Beispielen angewendet werde. Manchmal sieht man die Anwendung nicht sofort ein. Dabei kann das CAS helfen.

$$(3m-2)^2-(m+3)^2=$$

Dieser Term lässt sich ausmultiplizieren (siehe Zeile 1).

Jedoch die Aufforderung: "Verwandle in ein Produkt" wird händisch nur schwer sofort richtig erkannt werden (Zeile 2).



CAS View

= | Ausmultiplizieren

1	(3m-2)^2-(m+3)^2	→ $8m^2-18m-5$
2	(3m-2)^2-(m+3)^2	Hold: $(3m-2)^2-(m+3)^2$
3	$(3m-2)^2-(m+3)^2$	Substitute: $term1^2-(m+3)^2$
4	$term1^2-(m+3)^2$	Substitute: $term1^2-term2^2$
5	$term1^2-term2^2$	Faktorisiere: (term1 - term2) (term2 + term1)
6	(term1 - term2) (term2 + term1)	Substitute: (3 m - 2 - term2) (term2 + 3 m - 2)
7	(3 m - 2 - term2) (term2 + 3 m - 2)	Substitute: (3 m - 2 - (m + 3)) (m + 3 + 3 m - 2)
8	(3 m - 2 - (m + 3)) (m + 3 + 3 m - 2)	→ (2 m - 5) (m + 3 + 3 m - 2)
9	(2 m - 5) (m + 3 + 3 m - 2)	→ (2 m - 5) (4 m + 1)
10	(2 m - 5) (4 m + 1)	Ausmultiplizieren: $8m^2-18m-5$
11	$(3m-2)^2-(m+3)^2$	Faktorisiere: (2 m - 5) (4 m + 1)
12		

Zuerst wird die Grundstruktur des Ausdrucks anschaulich gemacht (für 3x+1 wird term1 und für 2x-3 wird term2 eingesetzt), diese ist bekannt: a^2-b^2 (Zeile 3 und 4).

Danach wird der Term faktorisiert (Zeile 5).

Dann wird der Ausdruck wieder zurück eingesetzt (für term1=3x+1 und term2 =2x-3 - Zeile 6 und 7).

Es werden dann die Teilfaktoren unterlegt und mit = (Vereinfacht (Simplify) bearbeitet, dann entsteht der Ausdruck von Zeile 9 (Unterlegung mit Klammer – wenn nur en Teilausdruck in der Klammer unterlegt bekommt nach eine zusätzliche Klammer, das ist nicht falsch, aber unübersichtlich!).

Wir können also auch im Kopf die Formel anwenden - also faktorisieren.

Führe folgendes weitere Beispiel durch, indem du in ein Produkt verwandelst:

$$(3x+1)^2-(2x-3)^2=$$

Buchstaben- und Zahlensalat

Was hat Pascal mit dem Potenzieren eines Binoms zu tun?

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 01. April 2010

---

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Mit dem vorliegenden Arbeitsmaterial werden Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten, die beim Potenzieren eines Binoms entstehen, mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks erarbeitet, also der binomische Lehrsatz hergeleitet. Weiters wird das CAS dafür verwendet, dass die Entwicklung der Hochzahlen der beiden Summanden des Binoms erkannt wird und beschrieben werden kann.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	8. Schulstufe
Geschätzte Dauer	1 Unterrichtseinheit
Verwendete Materialien	Arbeitsblatt, GeoGebraCAS
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS
Schlagwörter Mathematik	Binomische Formel, Pascal'sches Dreieck, binomischer Lehrsatz
Schlagwörter GeoGebraCAS	Expand
Autor/in	Walter Klinger, Evelyn Stepancik
Download von Zusatzmaterialien	

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Sicherer Umgang mit Potenzen und Exponenten • Binomische Formeln
Technisches Vorwissen	• Befehl EXPAND kennen und anwenden können • Terme in ein CAS eingeben können

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Pascal'sches Dreieck	Kennenlernen des Pascal'schen Dreiecks durch Eintragen der durch das CAS generierten Potenzen von Binomen und erkennen eines Zusammenhanges der Koeffizienten (Vorzahlen) der dabei entstehenden Terme.
Binomischer Lehrsatz	Der binomische Formel (also für n = 2) soll wiederholt werden, und für weitere Hochzahlen die Entwicklung der Koeffizienten und der Terme untersucht werden. Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes soll für höhere n durchgeführt werden können.

1.5 Lernzielkontrolle

Anhand weiterer binomischer Formeln kann das Verständnis des binomischen Lehrsatzes und Pascal'schen Dreiecks überprüft werden.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Vor Beginn der Unterrichtseinheiten muss das Arbeitsblatt für alle Schüler/innen kopiert werden.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Mit dem Befehl EXPAND werden binomische Formeln ausgerechnet.

Diese Auslagerung in das CAS ermöglicht ein rasches angeben der Koeffizienten der Ergebnisse von $(a + b)^n$ und eine Einsicht in die Entwicklung der Potenzen von a und b.

Verwendete Befehle

Expand	Ausmultiplizieren

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
---	---

3 Didaktischer Hintergrund

Der Mehrwert des CAS Einsatzes liegt in der Auslagerung des Operativen, womit ein rascher Erhalt der Koeffizienten und das Erkennen von Zusammenhängen ermöglicht werden.

4 Einsatz im Unterricht

Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Erfassen der Aufgabenstellung – Worum geht´s?	Partner/innen-arbeit	Arbeitsblatt
Wiederholung	Wiederholung der Grundbegriffe Koeffizient, Variable, Term und Potenz	Plenum	

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Erarbeitungsphase	Ausmultiplizieren mit dem CAS. Herleitung der Zusammenhänge der Koeffizienten und Potenzen der Summanden der Binome. Anwendungen bei größeren n.	Partner/innen-arbeit	Arbeitsblatt
Zusammenfassung	Den Binomischen Lehrsatz für spezielle Hochzahlen beschreiben und konkret händisch angeben können	Partner/innen-arbeit	Aufgabe 4 Arbeitsblatt Seite 6 GeoGebra CAS
Lernzielkontrolle	Informationsfest-stellung	Einzelarbeit	
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	ähnliche Beispiele (auch mit komplizierteren Summanden durchführen und die Entwicklung von $(a - b)^n$ untersuchen	Einzel und Partner/innen-arbeit	
Hausübung	Beispiele zum Festigen und Durchführen verbal beschreiben		HÜ-Mappe bzw. -Heft

Anhang

Arbeitsblatt zum Downloaden unter http://rfdz-ph.noe.ac.at

BUCHSTABEN- UND ZAHLENSALAT

Was hat Pascal mit dem Potenzieren eines Binoms zu tun? Pascal'sches Dreieck

1. Gib in GeoGebraCAS den Ausdruck $(a + b)^n$ ein und berechne ihn für n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6und 6. Verwende den Befehl `Expand`.

2. Trage die erhaltenen Koeffizienten (das sind die Zahlen vor den Variablen) in das Dreieck ein!

n=0   1

n=1   1   1

n=2   1   2   1

n=3   1   3   3   1

n=4   1   4   _   _   _

n=5   1   _   _   _   _   _

n=6   1   _   _   _   _   _   _

3. Wie entwickeln sich die Koeffizienten für das nächste n aus dem Vorhergehenden ?

4. Gib die ausgerechneten Terme geordnet an! Was erkennst du beim Vergleichen der Exponenten (Hochzahlen) der Variablen?

$(a + b)^2$ = ……………………………………………………………………………………

$(a + b)^3$ = ……………………………………………………………………………………

$(a + b)^4$ = ……………………………………………………………………………………

5. Nun bist du perfekt ? Berechne nun händisch $(a + b)^7$ und $(a + b)^8$ und vergleiche dein Ergebnis mit den entsprechenden Ausgaben von GeoGebraCAS.

$(a + b)^7$ = ____

$(a + b)^8$ = ____

Die Mathematiker/innen bezeichnen diese Zusammenhänge mit dem Namen Binomischer Lehrsatz!

Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 21. April 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Mit Hilfe dieses Unterrichtsmaterials sollen die Verfahren der Gleichsetzungs-, Substitutions- und Additionsmethode zum Lösen eines Gleichungssystems unter Verwendung eines CAS vermittelt werden. Dabei sollen die Schüler/innen die Vorteile der einzelnen Verfahren beurteilen können und in einem konkreten Fall das jeweils am besten geeignete verwenden. Die auf rechnerischem Weg gefundene Lösung soll mit einer grafischen Lösung vergleichen werden.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	8. oder 9. Schulstufe
Geschätzte Dauer	2 Unterrichtseinheiten
Verwendete Materialien	siehe Anhang: Arbeitsanleitung 1, Arbeitsanleitung 2, Arbeitsanleitung 3, Aufgabenstellung, Lösungen
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS, Java
Schlagwörter Mathematik	Gleichungssystem, Gleichung, Gleichsetzungsmethode, Substitutionsmethode, Additionsmethode
Schlagwörter GeoGebraCAS	Löse (Solve), Ersetze (Substitute)

Autor/in	Andreas Lindner
Download von Zusatzmaterialien	

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen • Ersetzen von Variablen in einem Term • Zusammenhang zwischen linearer Gleichung mit 2 Variablen und Geradengleichung kennen
Technisches Vorwissen	• Grundlegende Fertigkeiten in der Bedienung von GeoGebra

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen	Die Schüler/innen sollen die verschiedenen Verfahren zur Lösung eines Gleichungssystems (Gleichsetzungs-, Substitutions- und Additionsmethode) beherrschen und in einem CAS anwenden können.
Geometrische Interpretation	Die Schüler/innen sollen ein Gleichungssystem grafisch lösen können und die Analogie zwischen der grafischen und der rechnerischen Lösung beschreiben können.

1.5 Lernzielkontrolle

Ein Vergleich der von den Schüler/innen ermittelten Lösungen mit dem Lösungsblatt ermöglicht eine rasche Kontrolle für die Lehrenden. Außerdem ist die Übereinstimmung der rechnerischen Lösung des Gleichungssystems mit der grafisch ermittelten Lösung eine unmittelbare Rückmeldung für alle Schüler/innen.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Vor Beginn der beiden Unterrichtseinheiten müssen die beiden Arbeitsanleitung und die Aufgabenstellung (siehe Anhang) für jede/n Schüler/in kopiert werden.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Lehrende sollten folgende Befehle und Funktionalitäten von GeoGebra beherrschen:

GeoGebra	**GeoGebraCAS**
Gerade erstellen	**`Löse`**`[Gleichung, Var]`
Schnitt von Geraden durchführen	**`Ersetze`**`[Ausdruck, Alt, Neu]`
Umschalten zwischen den Darstellungsformen einer Geradengleichung ($y = kx + d$ bzw. $ax + by = c$)	**`LinkeSeite[Gleichung]`** `bzw.` **`RechteSeite[Gleichung]`**
	Leertaste für die Übernahme der vorhergehenden Ausgabe; **)** für die vorhergehende Ausgabe in Klammern; **=** für die vorhergehende Eingabe.

Lehrende sollten über die Möglichkeit und die Bedeutung des Befehls `Löse2[Gleichung1, Gleichung2, var1, var2]` Bescheid wissen, auch wenn dieser Befehl in den Aufgabenstellungen keine Verwendung findet.

Verwendete Befehle

`Befehl`	Erklärung des Befehls
`Ersetze``[Ausdruck, Alt, Neu]` oder **`Substitute`**`[Expression, Old, New]`	Ersetzt in einem Ausdruck die Variable (Ausdruck) Alt durch einen Ausdruck Neu
`Löse``[Gleichung, Var]` oder **`Solve`**`[Equation, var]`	Löst die Gleichung nach der Variablen Var
`LinkeSeite``[Gleichung] bzw.` **`RechteSeite`**`[Gleichung]`	Gibt die linke bzw. rechte Seite einer Gleichung an.

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)

	Bewege
	Schneide zwei Objekte
	Vergrößere, Verkleinere
	Verschiebe Zeichenblatt

3 Didaktischer Hintergrund

Durch das Kennenlernen mehrerer Lösungsmethoden sollen die Schüler/innen Strategien entwickeln, welches Lösungsverfahren in welcher Situation, d. h. bei welchem Gleichungssystem, am besten angewendet werden kann.
Durch die Verwendung eines CAS werden Rechenfehler (nahezu) ausgeschlossen, wodurch die eigentliche Konzentration den angewandeten Methoden gelten kann.
Ziel dieser beider Unterrichtseinheiten ist des Kennenlernen unterschiedlicher Lösungsmethoden für das Lösen eines Gleichungssystems, deshalb sollte der Befehl `Solve2[…]`, der ein Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Variablen löst, nicht verwendet werden. Die Verwendung dieses Befehls als Black Box kann eventuell in einer späteren Phase von Nutzen sein.

Mögliche Fehlerquellen beim Einsatz von Technologie sollten im Unterricht auch thematisiert werden.
Als Beispiel sei das im Aufgabenteil zu lösende Gleichungssystem genannt:

$$x + 3y = 52$$
$$4x - y = 78$$

Beim grafischen Lösen dieses Gleichungssystems erscheinen beide Geraden in der Standardeinstellung der Zeichenfläche nicht im sichtbaren Bereich. Erst ein gezieltes Zoomen auf einen größeren Bereich zeigt die Geraden und ihren Schnittpunkt mit den Koordinaten (22|10).
Ohne ein grundsätzliches Wissen über die Lage von Geraden ist ein sinnvolles Lösen einer Aufgabe manchmal nicht möglich.
Ein kritisches Hinterfragen der Fehlermöglichkeiten beim Einsatz eines Mathematikprogramms sollte immer auch Bestandteil des Unterrichts sein.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Aufgabenstellung durch den Lehrer/die Lehrerin	Lehrervortrag	
Erarbeitungsphase	Erstellen des Arbeitsblattes 1 Erstellen des Arbeitsblattes 2 Erstellen des Arbeitsblattes 3	Einzelarbeit Einzelarbeit Einzelarbeit	Arbeitsanleitung 1 (siehe Anhang) Arbeitsanleitung 2 (siehe Anhang) Arbeitsanleitung 3 (siehe Anhang)
Zusammenfassung	Bearbeiten der Aufgabenstellung	Partnerarbeit	Aufgabenstellung
Lernzielkontrolle	Kontrolle der ausgefüllten Aufgabenstellungen	Lehrer/in und Selbstkontrolle	
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Vorschläge zur Differenzierung siehe unten	Einzel- oder Partnerarbeit	
Hausübung	Vorschläge zur HÜ siehe unten	Einzelarbeit	

4.2 Unterrichtsablauf

Einführung

Der Lehrende erklärt die Aufgabenstellung. Dazu kann eventuell ein fertiges Arbeitsblatt präsentiert werden, um eine genaue Zielvorgabe geben zu können.

Erarbeitungsphase

1. Unterrichtseinheit:

Die Schüler/innen erstellen in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 1, 2 und 3** (auf Papier, siehe Anhang) das jeweilige Arbeitsblatt. Die Lehrkraft gibt bei Bedarf Hilfestellung und unterstützt bei Problemen mit dem Handling des Programms.

Zusammenfassung

2. Unterrichtseinheit:
In der 2. Unterrichtseinheit bearbeiten die Schüler/innen in Partnerarbeit die Aufgaben, die im Arbeitsblatt **Aufgabenstellungen** (auf Papier, siehe Anhang) angegeben sind.

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Schüler/innen, die in der vorgegebenen Zeit bereits alle gestellten Aufgaben positiv erledigt haben, können zusätzliche Aufgaben bearbeiten.

Zusätzliche Aufgaben
Löse die folgenden Gleichungssysteme mit einer geeigneten Methode und stelle die Geraden mit ihrem Schnittpunkt grafisch dar.

(1) $1{,}5x + 6y = 16{,}5$	(2) $0{,}8x + 2y = 4$	(3) $4{,}5 = 2x + 3$
$x - y = 1$	$-1{,}2x + 2{,}4y = 0{,}48$	$5{,}6y = 13 - 1{,}8$

(Lösungen: (1) L = {(3 | 2)}; (2) L = {(2 | 1,2)}; (3) L = {(0,75 | 2)})

Als Alternative bietet sich auch ein **Tutorensystem** an, bei dem sehr gute Schüler/innen lernschwächere Klassenkollegen/innen unterstützen und ihnen bei ihrer Arbeit helfen.

Hausübung

Vorschläge zur Hausübung sind im Anhang unter „Hausübung" angeführt.

5 Anhang

Folgende Materialien stehen für die Schüler/innen bzw. Lehrer/innen zur Verfügung.

1) **Arbeitsanleitung 1** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Gleichsetzungsmethode"

2) **Arbeitsanleitung 2** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode)"

3) **Arbeitsanleitung 3** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Additionsmethode“

4) **Aufgabenstellung** zu „Lösen eines Gleichungssystems“

5) **Hausübungen**

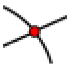
6) **Lösungen**

1) Arbeitsanleitung 1 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Gleichsetzungs-methode“

Löse das Gleichungssystem mit dem CAS

Gib die 1. Gleichung ein:	1	$2x + y = 5$
Gib die 2. Gleichung ein:	2	$x - 3y = 6$
Löse die 1. Gleichung nach der Variablen y:	3	`Löse[$1,y]`
Löse die 2. Gleichung nach der Variablen y:	4	`Löse[$2,y]`
Setze die beiden gefundenen Terme für y gleich:	5	`RechteSeite[$3]=RechteSeite[$4]`
und löse diese Gleichung nach x:	6	Löse[$5, x]
Setze mit dem Ergebnis für x in die erste (gegebene) Gleichung ein:	7	Ersetze[$1, x, 3]
und berechne y:	8	Löse[$7, y]
Gib die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.		

Grafische Lösung

- Zeichne die beiden Geraden
  g: $2x + y = 5$ und h: $x - 3y = 6$
- Ermittle ihren Schnittpunkt S mit dem Werkzeug „`Schneide zwei Objekte`“ 
- Vergleiche die rechnerische mit der grafisch ermittelten Lösung.

2) Arbeitsanleitung 2 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Einsetzungsmethode (Substitutionsmethode)“

Löse das Gleichungssystem mit dem CAS

Gib die 1. Gleichung ein:	1	-2x + 5y = 8
Gib die 2. Gleichung ein:	2	x + 3y = 7
Löse die 1. Gleichung nach der Variablen y:	3	`Löse[$1,y]`
Setze mit dem erhaltenen Ausdruck für y in die 2 Gleichung ein:	4	`Ersetze[$2, y, RechteSeite[$3]]`
und löse diese Gleichung nach x:	5	Löse[$4, x]
Setze mit dem Ergebnis für x in die erste (gegebene) Gleichung ein:	6	Ersetze[$3, x, RechteSeite[$5]]
Vereinfache das Ergebnis (falls notwendig)	7	Leertaste, Return
Gib die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.		

Grafische Lösung

- Zeichne die beiden Geraden
  g: -2x + 5y = 8 und h: x + 3y = 7
- Ermittle ihren Schnittpunkt S mit dem Werkzeug „`Schneide zwei Objekte`“
- Vergleiche die rechnerische mit der grafisch ermittelten Lösung.

3) Arbeitsanleitung 3 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Lösen eines Gleichungssystems mit der Additionsmethode“

Löse das Gleichungssystem mit dem CAS

Gib die 1. Gleichung ein:	1	4x + 5y = 7
Gib die 2. Gleichung ein:	2	x - 2y = -8
Multipliziere die 2. Gleichung mit 4, damit in beiden Gleichungen die Anzahl der x übereinstimmen:	3	`(x - 2 y = -8) 4` Tastenfolge:), Leertaste, 4 und Multipliziere (DropDown-Feld)
Ziehe die 2. Gleichung von der 1. Gleichung ab:	4	`$1-$3`
und löse diese Gleichung nach y:	5	Löse[$4, y]
Setze mit dem Ergebnis für y in die erste (gegebene) Gleichung ein:	6	Ersetze[$1, y, RechteSeite[$5]]
und berechne x:	7	Löse[$6, x]
Gib die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.		

Grafische Lösung

- Zeichne die beiden Geraden
  g: 4x + 5y = 7 und h: x - 2y = -8
- Ermittle ihren Schnittpunkt S mit dem Werkzeug „`Schneide zwei Objekte`“
- Vergleiche die rechnerische mit der grafisch ermittelten Lösung.

4) Aufgabenstellung zu „Lösen eines Gleichungssystems“

Bearbeite mit deinem/r Partner/Partnerin die folgenden Aufgaben.

1) Löse die folgenden Gleichungssysteme.
Welches Verfahren ist dafür am besten geeignet?
Löse das Gleichungssystem auch grafisch.

a) $-2x + 3y = 3$
$3x = 9$

b) $y = 0{,}5x + 3$
$4x + y = -6$

c) $x - 3y = -2$
$x + 2y = 8$

2) Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h. Stelle die beiden Geraden und deren Schnittpunkt auch grafisch dar.

g: $x - 2y = -1$ h: $x + 2y = 7$

3) Zeichne die beiden Geraden im Geometriefenster und ermittle grafisch den Schnittpunkt.

$x + 3y = 52$
$4x – y = 78$

Überlege, wo der Fehler liegen könnte, wenn keine Geraden angezeigt werden.

5) Hausübungen

1) Löse das Gleichungssysteme mit der Gleichsetzungsmethode

a) $3x - y = 5$
$2x + 3y = 7$

b) $-4x + 9y = -19$
$2x + 3y = 2$

2) Löse das Gleichungssysteme mit der Substitutionsmethode

a) $y = 1/3\,x + 4/3$
$3x + 4y = -12$

b) $3x + 4y = 13$
$2x + y = 17$

3) Löse das Gleichungssysteme mit der Additionsmethode

a) $x + 2y = 5$
$-3x + 4y = -5$

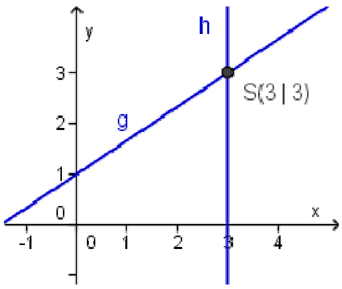
b) $2x + y = 8$
$x + 4y = -17$

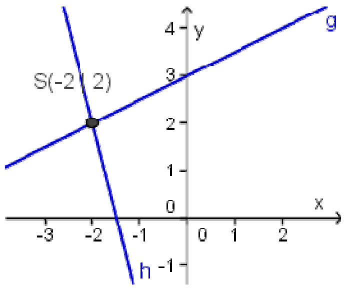
6) Lösungen: Aufgabenstellungen

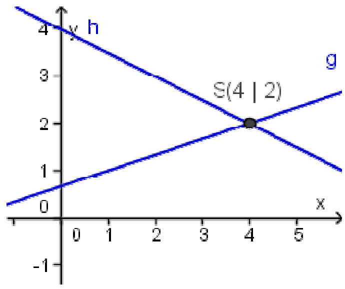
1a) L = {(3 | 3)} Substitutionsmethode

b) L = {(-2 | 2)} Substitutionsmethode

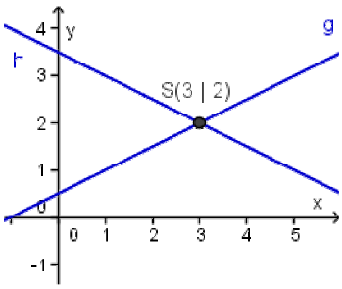
c) L = {(4 | 2)} Additionsmethode







2) S(3 | 2)



3) Der Schnittpunkt S(22 | 10) außerhalb des standardmäßig dargestellten Bereichs.
Du musst durch gezieltes Zoomen (mit dem Scrollrad oder mit den Werkzeugen bzw.) den geeigneten Bereich des Koordinatensystems anzeigen.

Mit *Strg - linker Maustaste* oder dem Werkzeug kannst du das Zeichenblatt in die gewünschte Position verschieben.

Lösungen: Hausübungen

1) a) L = {(2 | 1)} b) L = { (2,5 | -1)}

2) a) L = { (-4 | 0)} b) L = { (11 | -5)}

3) a) L = {(3 | 1)} b) L = {(7 | -6)}

Ziele beim Umformen von Gleichungen

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 21. April 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Beim Lösen von Gleichungen ist besonders darauf zu achten, dass Schüler/innen den Äquivalenzumformungen ein besonderes Augenmerk schenken und die Ziele, die mit den Umformungen erreicht werden, auch formuliert werden können. Diese Umformungen führen zu neuen äquivalenten Gleichungen, die ein möglichst rasches Finden der Lösungen von Gleichungen ermöglichen.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	5. Schulstufe
Geschätzte Dauer	Eine Unterrichtsstunde
Verwendete Materialien	Ein Arbeitsblatt
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS auf PC oder Notebook
Schlagwörter Mathematik	Gleichung, Äquivalenzumformungen
Schlagwörter GeoGebraCAS	Äquivalenzumformungen durchführen, Vereinfachen
Autor/in	Walter Klinger, Andreas Lindner
Download von Zusatzmaterialien	-----------

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Grundkompetenzen im Umgang mit Termen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) • Was heißt Lösen einer Gleichung? • Äquivalenzumformungen kennen • Einfachste Formen von Gleichungen angeben und interpretieren können • Aussagen und Aussageformen unterscheiden können
Technisches Vorwissen	• Elementare Bedienung von GeoGebraCAS

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Termumformung	Umformungen bzw. Vereinfachungen auf einer Seite einer Gleichung durchführen können.
Lösen von Gleichungen	Ziele des Gleichungsumformens angeben können.
Äquivalenzumformungen bei Gleichungen	• Ziele angeben können, die durch einzelne Äquivalenzumformungen erreicht werden sollen. • Auswirkungen von verschiedenen Äquivalenzumformungen auf dieselbe Gleichung formulieren können. • Entscheidungen für eine bestimmte Umformung begründen können. • Die Umformung auch händisch durchführen können.
Äquivalente Gleichungen	Einfachere äquivalente Gleichungen, die zu einfacheren Formen führen, erzeugen können

1.5 Lernzielkontrolle

Ähnliche Beispielen händisch und mit GeoGebraCAS lösen können und mündlich oder schriftlich die Ziele der Umformungen angeben können.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Arbeitsblatt kopieren oder zum Download vorbereiten. Jede Schülerin/jeder Schüler braucht ein eigenes Notebook oder einen Computer im EDV-Raum.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Eingabe von Gleichungen in GeoGebraCAS,
Eingabe von Äquivalenzumformungen in GeoGebraCAS,
Vereinfachen von Termen und Gleichungen,
Eventuell Ausmultiplizieren.

Verwendete Befehle

`Multipliziere``[Ausdruck]`	Multipliziert Ausdrücke bzw. Zahlen aus.
`Lösche``[a]`	Löscht die Variable a

Kontextmenü GeoGebraCAS (rechter Mausklick auf Zeilennummer)

Lösche Zeile n	Löscht die Zeile n

3 Didaktischer Hintergrund

Anhand einer ausgewählten Aufgabenstellung soll der Lernprozess der Schüler/innen bei der Entscheidung für einzelne Äquivalenzumformungen durch die richtigen Rechenvorgänge des CAS derartig unterstützt werden, dass die Zielsetzung und die Begründung im Vordergrund stehen. „Ungeeignete“ Umformungen (sodass die Gleichung komplizierter wird oder das Ziel nicht erreicht wird) können sofort erkannt werden und dadurch neue Strategien und Zielsetzungen erarbeitet werden.
Das CAS dient nur als Feedbackinstrument für die Lernenden. Dabei kann auch die im Kopf erfolgten Rechnung (genannt: händische Rechnung) sofort nach seiner Richtigkeit hinterfragt werden.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Wiederholung Gleichungen	Lehrer-/Schülergespräch	
Erarbeitungsphase	Erste mögliche Äquivalenzumformungen angeben können. Ziele, die dadurch erreicht werden sollen, formulieren können. Diese ersten Umformungen durchführen und überprüfen, ob die jeweiligen Ziele erreicht wurden.	Dreifenstertechnik mit GeoGebraCAS	Arbeitsblatt
Zusammenfassung	Verschiedene Ziele verbal angeben können und nach ihrer „Sinnhaftigkeit" für die Lösung der Gleichung bewerten. Entscheidung für den eigenen Lösungsweg finden.	Plenumsgespräch und schriftliche Zusammenfassung	Selbst erstellte Mitschrift
Lernzielkontrolle	Neuerliche Anwendung mit selbständiger Beschreibung der Ziele	Einzelarbeit – Partnerarbeit zum Vergleichen und Diskussion	
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Ähnliche Beispiele durchführen		

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Hausübung	Bei ausgewählten Gleichungen wird die schriftliche Angabe der Ziele die durch Äquivalenzumformungen erreicht werden verlangt	Einzelarbeit	Hü-Mappe bzw. -Heft

4.2 Unterrichtsablauf

Einführung

Wiederholung: Was heißt Lösen einer Gleichung?
Wiederholung: Welche Umformungen sind beim Lösen von Gleichungen erlaubt (Genaue Beschreibung der Äquivalenzumformungen).
Eventuell die Grundlagen beim Arbeiten mit Termen besprechen (Addition und Subtraktion von Termen. Multiplikation und Division von Termen. Besonders das Distributivgesetz, da beide Seiten einer Gleichung von der Umformung betroffen sind.

Erarbeitungsphase

Erhebung der Vorschläge von Schüler/innen für die erste beiden ersten Umformung der angegebenen Gleichung $\frac{x}{5}+4=\frac{2x+5}{2}-\frac{x}{2}$ und Testen mit GeoGebraCAS. Im Plenum werden danach die ersten Umformungen verglichen und eventuell geeignete erste Umformungen, die noch nicht gewählt wurden in Spalte 3 eingetragen. Die Ziele sollen genau formuliert werden und die Schüler/innen sollen über diese Ziele sprechen und sie begründen.
Danach sollen die jeweiligen „Wege" weiter bearbeitet werden und die äquivalenten einfachsten Formen hergeleitet werden.
Die Anzahl der jeweiligen Umformungen soll gezählt und eingetragen werden.
Jede Schülerin/jeder Schüler soll aufschreiben, für welche erste Umformung und damit für welchen weiteren Weg sie/er sich entscheidet.

Zusammenfassung

Als Zusammenfassung soll (Heft, Portfolio, Arbeitsblatt) vermerkt

werden, dass es mehrere sinnvolle erste Umformungen gibt und dass die Ziele unterschiedlich sind.
Z. B.:
Welches Ziel möchte ich damit erreichen?
(1) Alle Ausdrücke mit der gesuchten Variablen sollen auf einer Seite stehen.
(2) Es sollen bei der Gleichung nur Brüche mit demselben Nenner auftreten.
(3) Die Terme mit Nenner 2 sollen zusammengefasst werden.
(4) Alle konstanten Terme sollen auf einer Seite der Gleichung stehen.
(5) …

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Übungen für erste Umformungen.
Übungen, bei denen die äquivalenten Gleichungen gegeben sind und nach der Umformung gefragt wird. Dabei sollen auch Gleichungen auftreten, die nicht äquivalent sind, also nicht durch eine Äquivalenzumformung auseinander hervorgegangen sind.

Hausübung

Beispiele, bei denen zusätzlich das Ziel der ersten Umformung formuliert werden soll. Verschiedene Anwendungen, Differenzierungen und Vertiefungen (siehe oben)

Hinweis: Beispiele

Beispiel 1
Gib an welche Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden.
Teste deine Meinung mit GeoGebraCAS! Stelle gegebenenfalls richtig.

a) $37x + 25 = 21x - 7 \quad |\ldots$

$x = -2$

b) $(2\cdot x + 3)^2 = 3\cdot x - 9 + 4\cdot x^2 \quad |\ldots$

$x = 3$

c) $3 - \frac{a}{5} = \frac{2a-3}{2} \quad | \ldots$

$a = \frac{15}{4}$

d) $4 - \frac{1}{y} = 5 + \frac{2}{y} \quad | \ldots$

$y = -1$

Lösungen: a) richtig; b) x = -2; c) richtig; d) y = -3

Beispiel 2
Bestimme die einfachste Form der Gleichung und gib die ***Lösungsmenge*** für
(1) G = N und (2) G = R an.
Gib an, welche der Eigenschaften für die jeweiligen Gleichungen gilt: eindeutig lösbar, allgemeingültig oder nicht lösbar!

a) $\frac{x}{2}+3=\frac{5+x}{2}-4$ b) $\frac{2}{x}+1=5-\frac{10}{x}$

c) $\frac{5x}{3}+3=\frac{4x+1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{5}{2}$ d) $\frac{3}{x}+2,5=\frac{4}{x}+1$

Lösungen:

a) nicht lösbar	b)	c) allgemeingültig	d)
L_1 = { }	L_1 = {3}	L_1 = N	L_1 = { }
L_2 = { }	L_2 = {3}	L_2 = R	L_2 ={⅔}

5 Anhang

Arbeitsblatt
(Lösung: x = 5)

Lösungsvorschlag

Arbeitsblatt:

Viele Wege führen zu einer Lösung? Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Gib in den ersten beiden Spalten eine deiner Meinung nach sinnvolle Äquivalenzumformung an (zeichne einen Strich neben der Gleichung und trage ein) und schreibe darunter die nach der Umformung erhaltene Gleichung.
Erzeuge drei CAS-Fenster und überprüfe deine Umformung durch GeoGebraCAS, bevor du weitermachst.
Trage das Ziel der gewählten Umformung als vollständigen Satz in das Kästchen darunter ein.
Löse dann durch weitere Umformungen die Gleichungen und gib die einfachste (äquivalente) Form der Gleichung an.
Wir besprechen danach gemeinsam weitere mögliche Umformungen, und du kannst danach die Spalte 3 dafür verwenden.

$\frac{x}{5}+4=\frac{2x+5}{2}-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{5}+4=\frac{2x+5}{2}-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{5}+4=\frac{2x+5}{2}-\frac{x}{2}$
Ziel der 1. Umformung:	Ziel der 1. Umformung:	Ziel der 1. Umformung:
Einfachste Form:	Einfachste Form:	Einfachste Form:
Anzahl der nötigen Äquivalenzumformungen ________	Anzahl der nötigen Äquivalenzumformungen ________	Anzahl der nötigen Äquivalenzumformungen ________

Für welchen Weg würdest du dich entscheiden und warum?

Beschreibe:

Lösungsvorschlag

Löse die Gleichung mit dem CAS

		Eingabe	Ausgabe
Gib die Gleichung ein:	1	x/5+4=(2x+5)/2-x/2 Eingabe mit „Prüfe Ergebnis ✓“ (DropDown-Feld)	$\frac{x}{5}+4=\frac{2x+5}{2}-\frac{x}{2}$
Linke und rechte Seite der Gleichung auf jeweils einen Nenner bringen:	2	Leertaste, Return	$\frac{x+20}{5}=\frac{x+5}{2}$
Linke und rechte Seite der Gleichung auf den gemeinsamen Nenner 10 bringen (mit 10 multiplizieren):	3	) Leertaste 10 ((x+20)/5 = (x+5)/2) 10	2(x+20) = 5(x+5)
Linke und rechte Seite der Gleichung ausmultiplizieren:	4	Leertaste und Multipliziere (DropDown-Feld	2x+40 = 5x+25
Subtrahieren auf beiden Seiten 5x:	5	) Leertaste -5x	40-3x = 25
Subtrahieren auf beiden Seiten 40:	6	) Leertaste -40	-3x = -15
Dividiere durch (-3):	7	) / (-3)	x = 5
Gib die Lösungsmenge der Gleichung an.			

Lineare Funktionen

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 19/ April 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Über diese Arbeitsunterlage für die SchülerInnen wird der Begriff der linearen Funktion an Hand einiger angewandter Aufgaben, die zu linearen Modellen führen eingeführt bzw. gefestigt.
Als Gegenbeispiele werden auch zwei nichtlineare Funktionen als Modellfunktionen verwendet.
Wert gelegt wird auf die Bildung und Interpretation der Umkehrfunktion – sofern dies möglich ist.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	8 oder 9, für HAK 10
Geschätzte Dauer	2 – 3 Stunden
Verwendete Materialien	Arbeitsblätter
Technische Voraussetzungen	GeoGebra
Schlagwörter Mathematik	Funktionsbegriff, lineare Funktion, Umkehrfunktion, Wertetabelle, Graph einer Funktion
Schlagwörter GeoGebraCAS	Funktionensgraphen, elementares Arbeiten in der Tabellenansicht, elementarer Umgang im CAS
Autor/in	Josef Böhm

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Funktionsbegriff • Wertetabelle • Umkehrfunktion
Technisches Vorwissen	• Punkte und Gerade zeichnen • Funktion definieren • Einssatz von Schiebereglern

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
lineare Funktion	einfache lineare Modelle aus Textvorgaben bilden können, Fragestellungen zur Angabe mit Hilfe des Modells beantworten können
Umkehrfunktion	Umkehrbarkeit feststellen können und die Umkehrfunktion angeben können; auch mit unbekannten Umkehrfunktionen formal umgehen können.
Anstieg, Abschnitt	Die Parameter k und d der linearen Funktion und deren Bedeutung für das Modell und für den Graph kennen

1.5 Lernzielkontrolle

Der Lehrer gibt anderes Modell zur linearen Funktion als Lernzielkontrolle.

Die Schüler werden angehalten ein eigenes Modell aus ihrer Erfahrungswelt zu entwerfen.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Handout ausdrucken oder zum Download bereit stellen.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

alle Ansichten von GeoGebra-CAS elementar bedienen können.

Verwendete Befehle

`Solve`	Lösen einer Gleichung

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Schieberegler

3 Didaktischer Hintergrund

Der didaktische Mehrwert ist eine Mehrzahl von Anwendungen der linearen Funktion (mit Gegenbeispielen), die in unterschiedlichen Repräsentationsformen behandelt werden können.
Die Umkehrfunktion (-relation) kann mit Hilfe des CAS leicht bestimmt werden.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Sammlung von Tarifen Wortmodell bilden	Brain Storming	
Erarbeitungsphase	Durcharbeiten des Arbeitsblattes	paarweise, zT als Hausübung	Arbeitsblatt
Zusammenfassung	wird im Arbeitsblatt vorbereitet	erst Einzelarbeit, dann mit der Klasse ausformulieren	Arbeitsblatt

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Lernzielkontrolle	ein oder zwei Modelle	einzeln	Aufgabe vom Lehrer/Lehrerin
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Suche nach weiteren Funktionen und/oder Funktionstypen – zT nur beschreibend	Gruppenarbeit (Gebiete vorgeben, wie zB: Physik, Natur, Technik, ...)	
Hausübung	nach Bedarf	Einzelarbeit	LehrerIn

4.2 Unterrichtsablauf

Erarbeitungsphase

Sollte sich nach der Klassenstruktur richten. Grundsätzlich sollte es reichen, dass der Lehrer/die Lehrerin als Moderator auftritt. Neue Möglichkeiten – wie zB der Schieberegler oder das Übertragen von Tabellenwerten in eine Punktliste – werden vom Lehrer oder von findigen SchülerInnen am Lehrerrechner vorgeführt.

Zusammenfassung

Die zusammenfassenden Ergebnisse werden gemeinsam festgehalten

Hausübung

Zwei oder drei Modelle können auch als selbständige HÜ ausgeführt werden. Sie werden in der Schule präsentiert.

5 Anhang

Arbeitsunterlage „Lineare Funktion“

Lineare Funktion

1 Für eine Leihmaschine wird eine fixe Grundgebühr von 6,50 €.- und eine Gebühr für jede Maschinenstunde in der Höhe von 6 €.- verlangt.

a) Wie hoch sind die Kosten, wenn man sich die Maschine für 1, 3, 5, oder 10 ½ Stunden ausleiht?

Zeit	Kosten

Übertrage die Daten in ein geeignetes Koordinatensystem:

Fällt an der Lage der Punkte etwas auf?

b) Versuche, mit Hilfe der Grafik zu antworten:

Wie hoch ist die Rechnung bei 8 Stunden? ....

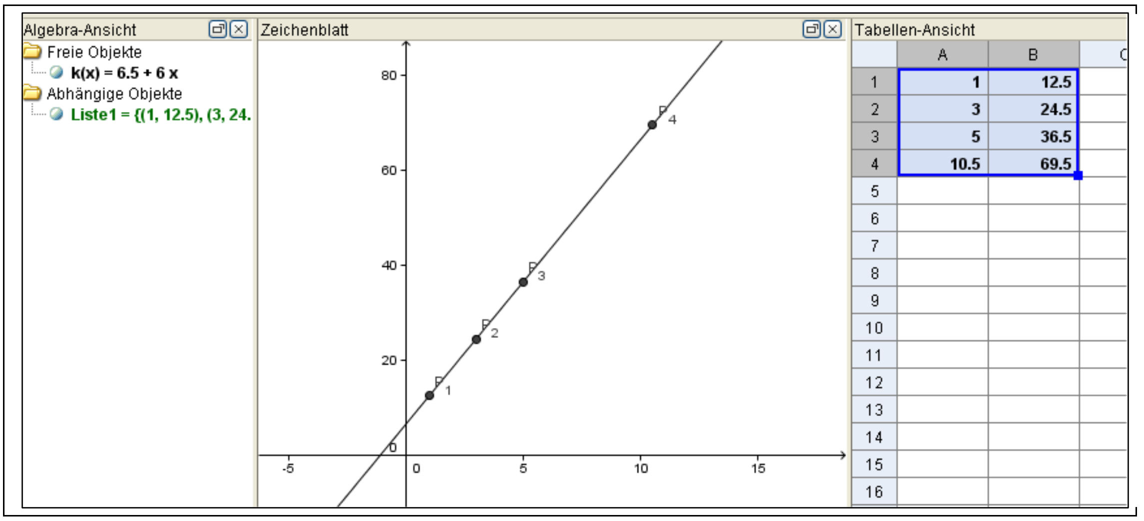
Wie viele Stunden kann man sich um 36 € leisten? ....

c) Wie lautet eine Formel für die Kosten K für x Leihstunden: ....

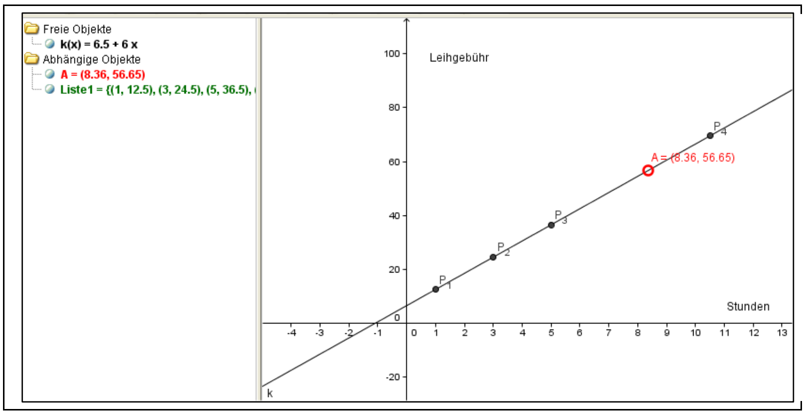
d) Verwende die Formel, um die Fragen aus b) zu beantworten:

e) Öffne GeoGebra und übertrage die Daten aus der Wertetabelle in die Tabellen-Ansicht.
Stelle die Punkte in einem Streudiagramm dar (Passe das Koordinatensystem geeignet an.)
Hinweis: Vielleicht gelingt es Dir, die Zahl in Zelle B1 als eine Formel aus dem Zelleninhalt von A1 zu generieren und die Zellen B2 bis B4 durch Kopieren zu füllen.

f) Die in c) gefundene Formel stellt eine Funktion/Relation ??? zwischen den Werten für x und *K* dar. Definiere diese Formel als Funktion k(x) in der Geometrie-Ansicht. Sie erscheint dann in der Algebra-Ansicht.



g) Nun richte einen Punkt ein, der auf dem Graph von *k*(x) bewegt werden kann. Das könnte dann so aussehen. Unter den Eigenschaften des Punktes (Rechtsklick auf den Punkt) kannst Du die Gestalt des Punktes festlegen. Außerdem lasse Dir „Name&Wert" anzeigen.



Mit der Maus kannst Du nun den Punkt A den Graph von *k*(x) abfahren und für jede Anzahl von Leihstunden die zugehörigen Kosten ablesen.

h) Es handelt sich um eine (Funktion/Relation?) ……………………………………………, weil ………………………………………………………...

i) Beantworte graphisch die folgenden Fragen:

Wie hoch sind die Kosten für:

4 ¼ Stunden: ....

6 Stunden: ....

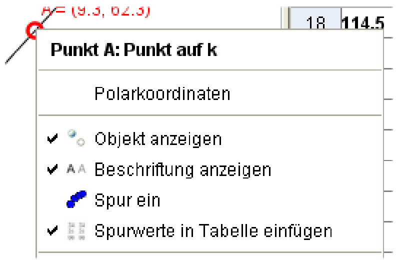
16 ½ Stunden: ....

j)

Erstelle in der Algebra-Ansicht eine Wertetabelle für 0 ≤ x ≤ 20 mit dem Abstand von einer Stunde.
Dann für 0 ≤ x ≤ 6 mit dem Abstand von einer Viertelstunde.

C	D
1	12.5
2	18.5
3	24.5
4	30.5
5	36.5
6	42.5
7	48.5
8	54.5
9	60.5
10	66.5
11	72.5

k) Du kannst auch manuell eine Wertetabelle erstellen, indem Du unter den Eigenschaften des Punktes A die Option „Spurwerte in Tabelle einfügen“ aktivierst:



l) Ist diese Funktion umkehrbar? ……………………………………..

Begründe Deine Antwort:

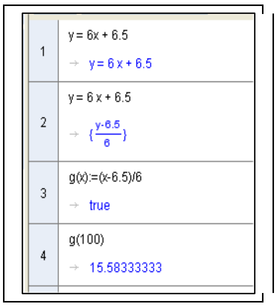
m) Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion?

……………………………….

Wozu dient die Umkehrfunktion?

Erfinde zumindest eine Aufgabe, für dir Du die Umkehrfunktion verwenden kannst.

n) Du kannst die Umkehrfunktion auch in der CAS-Ansicht berechnen lassen.



Die Umkehrfunktion wird automatisch in die Algebra-Ansicht übernommen und auch in der Geometrie-Ansicht dargestellt.

Warum erscheint hier der Graph der Umkehrfunktion nicht als Spiegelbild an der 45°-Geraden?

Welches Problem wird in Zeile 4 gelöst?

o) Letzte Fragen: wie wird sich der Graph verändern, wenn

p1) Die Grundgebühr steigt (fällt)?

p2) Die Leihgebühr/Stunde steigt (fällt)?

Illustriere Deine Antwort mit Hilfe zweier geeigneter Beispiele:

2 Jemand verleiht privat den Betrag von 5000€ und erhält für jedes Monat 0,75% an Zinsen.

a) Was bekommt er zurück, wenn die Schuld nach 3, nach 6, nach 24 Monaten zurückgezahlt wird?

Zeit	Betrag

Übertrage die Daten in ein geeignetes Koordinatensystem:

Fällt an der Lage der Punkte etwas auf?

b) Versuche, mit Hilfe der Grafik zu antworten:

Was bekommt er nach 10 bzw. nach 15 Monaten? ……………………......
Wie lange war das Kapital ausgeliehen, wenn 5600€ zurückgezahlt wurden? ....

c) Wie lautet die Formel für die Höhe der Rückzahlung nach x Monaten?

d) Verwende die Formel, um die Fragen aus b) zu beantworten:

e) Die gefundene Formel ……………………… stellt eine Funktion/Relation???? zwischen den Werten x und ……………………..
dar. Definiere die entsprechende Funktion.

f) Übertrage die Daten aus der Wertetabelle mit dem Funktionsgraphen mit einem geeigneten Koordinatensystem nach GeoGebra. Skizziere hier das Streudiagramm mit dem Funktionsgraph:

Es handelt sich hier um eine .... (Funktion oder Relation?), weil ....

Der Graph der .... ist ....

g) Beantworte mit Hilfe der Grafik die folgenden Fragen:

Höhe der Rückzahlung nach 8 ½ Monaten:

2 Monaten:

3 Jahren und 3 Monaten:

h) Erstelle in der Tabellenansicht eine Tabelle mit einem Monatsabstand und vergleiche die Werte mit den Antworten aus g)

Wie lautet die Tabelle für das 6. Halbjahr?

i) Ist diese Funktion umkehrbar? ....

Begründe die Antwort: ....

j) Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion:

....

Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion in ein eigenes Koordinatensystem.

Wozu dient die Umkehrfunktion?

k) Erzeuge die folgende Tabelle (die Rückzahlungsbeträge sollen bis 7000 € reichen).

Tabellen-Ansicht

	A	B
1	**Rückzahlung**	**Laufzeit**
2	**5000**	**0**
3	**5100**	**2.6667**
4	**5200**	**5.3333**
5	**5300**	**8**
6	**5400**	**10.6667**
7	**5500**	**13.3333**
8	**5600**	**16**

l) Unter welchen Voraussetzungen wird der Graph der Funktion parallel nach oben verschoben?

Was muss geschehen, dass die Gerade steiler verläuft?

Ist es auch denkbar, dass die Gerade fällt?

3 Jemand legt den Betrag von 5000 € auf ein Konto und erhält für jedes Jahr - derzeit unrealistische - 8% Zinsen. Wir wollen aber realistischerweise annehmen, dass Zinseszinsen verrechnet werden. Was bedeutet das Wort „Zinseszinsen“?

a) Wie viel liegt nach 1, 2, 3, 5, 10 Jahren am Konto?

Zeit	Betrag

Übertrage die Daten in ein geeignetes Koordinatensystem:

Fällt an der Lage der Punkte etwas auf?

b) Versuche, mit Hilfe der Grafik zu antworten: ....
Was bekommt er nach 8, bzw. nach 20 Jahren? ....
Wie lange war das Kapital ausgeliehen, wenn er 10000 € abheben konnte? ....

c) Wie lautet eine Formel für Rückzahlung nach x Monaten: ....

d) Verwende die Formel, um die Fragen aus b) zu beantworten:

e) Übertrage die Daten aus der Wertetabelle in ein geeignetes Koordinatensystem.

f) Die gefundene Formel .... stellt eine Funktion/Relation???? zwischen den Werten x und .... dar. Verwende diese Formel wieder, um eine entsprechende Zinseszinsfunktion zu erzeugen. Nenne die Funktion zz(x) und stelle sie auch in der Geometrie-Ansicht dar.

Skizziere das Streudiagramm der Datenpunkte aus a) mit dem Graph von zz(x) (**mit einem ordentlichen Koordinatensystem**!!)

Es handelt sich hier um eine .... (Funktion oder Relation?), weil

....

Der Graph der .... ist ....

g) Beantworte zuerst graphisch, dann mit Hilfe der Funktion zz(x) die folgenden Fragen:

Kontostand nach 9 Jahren:
4,5 Jahren:
35 Jahren:

h) Erstelle eine geeignete Tabelle und vergleiche die Werte mit den Antworten aus g)

Wie lautet die Tabelle für die ersten 5 Jahre (Halbjahresabstand)?

i) Ist diese Funktion umkehrbar? Begründe die Antwort:

j) Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion? (Die Umkehrfunktion ist Dir eigentlich unbekannt. Ermittle sie mit dem CAS, ohne sie vorerst näher zu hinterfragen. Du wirst von diesem wichtigen Funktionstyp noch vieles hören und lernen.)

CAS liefert als Lösung der Umkehrfunktion {}. Noch ein kleines Problem

Wozu dient die Umkehrfunktion?

Erzeuge einen geeigneten Plot der Umkehrfunktion und beantworte die folgenden Fragen:

Wann beträgt der Kontostand 8000 € ?
10000 € ?
20000 € ?
40000 € ?
80000 € ?

Der Graph der Funktion zz(x) ist keine Gerade, daher stellt sie auch keine **lineare Funktion** dar.

Wie ändert sich nach Deiner Meinung der Graph, wenn eine höhere Verzinsung gewährt wird?

Wie ändert sich der Graph, wenn das Kapital größer/kleiner wird?

k) Graphische Ermittlung der – noch unbekannten – Umkehrfunktion:

Ich möchte die ersten 12 Jahre beschreiben. Die Spalten A und B beschreiben die Funktion. Kopiere nun die Spalte A in die Spalte C. Natürlich sind nun die Inhalte von B und C die Koordinaten von Punkten der Umkehrfunktion. Warum?

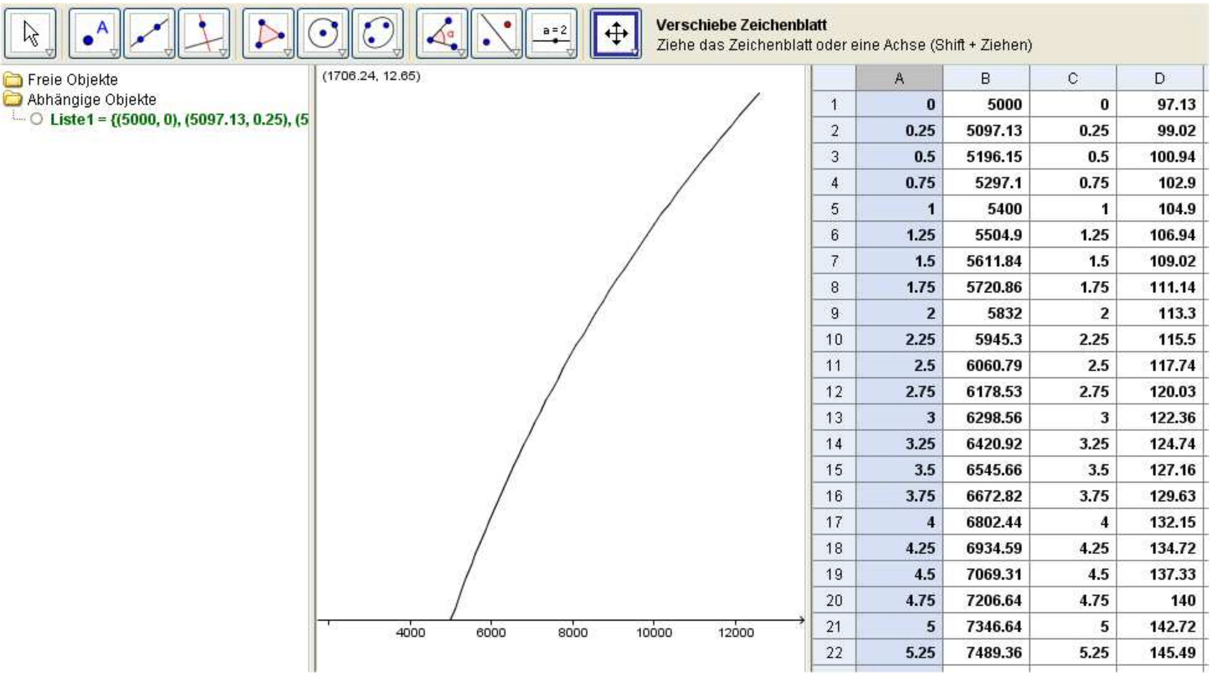
In den generellen Einstellungen solltest Du im Menüpunkt „Objektname anzeigen“ die Option „Keine neuen Objekte“ wählen. Außerdem ist unter „Runden“ die Einstellung 2 Dezimalstellen sinnvoll.

Markiere nun mit der Maus die Zellen B1:C49, Rechtsklick in den markierten Bereich und wähle die Option „Liste von Punkten erzeugen“. Diese Liste wird Dir in der Algebra-Ansicht angezeigt, aber in der Geometrie-Ansicht musst Du erst passende Fenstereinstellungen wählen.

Rechter Mausklick auf die freie Zeichenfläche, dann „Zeichenblatt“ und Du kannst den Zeichenbereich für die x- und y-Werte eingeben. Lasse Dich dabei von den Tabellenwerten leiten. Nun solltest Du bereits eine Punktreihe erkennen – aber noch keine geschlossene „Kurve“.

Zu diesem Zweck musst Du zwei benachbarte Punkte durch eine Strecke verbinden. Schreibe in die Zelle D1 die Formel: = Strecke[(B1,C1),(B2,C2)] und kopiere sie bis zur Zelle D48. Nun wirst Du den geschlossenen Streckenzug erkennen können. Die restliche Arbeit besteht aus notwendigen Formatierungen. Markiere den Bereich der Punkte und Strecken mit der Maus, dann Rechtsklick und Du gelangst in ein „Eigenschaften“-Fenster, in dem Du schalten und walten kannst (Darstellung der Punkte, Farbe und Stärke der Verbindungsstrecken usw.)

Die Darstellung könnte dann etwa so aussehen:



	A	B	C	D
1	0	5000	0	97.13
2	0.25	5097.13	0.25	99.02
3	0.5	5196.15	0.5	100.94
4	0.75	5297.1	0.75	102.9
5	1	5400	1	104.9
6	1.25	5504.9	1.25	106.94
7	1.5	5611.84	1.5	109.02
8	1.75	5720.86	1.75	111.14
9	2	5832	2	113.3
10	2.25	5945.3	2.25	115.5
11	2.5	6060.79	2.5	117.74
12	2.75	6178.53	2.75	120.03
13	3	6298.56	3	122.36
14	3.25	6420.92	3.25	124.74
15	3.5	6545.66	3.5	127.16
16	3.75	6672.82	3.75	129.63
17	4	6802.44	4	132.15
18	4.25	6934.59	4.25	134.72
19	4.5	7069.31	4.5	137.33
20	4.75	7206.64	4.75	140
21	5	7346.64	5	142.72
22	5.25	7489.36	5.25	145.49

Nun könntest Du den Graph der in j) ermittelten Umkehrfunktion dazu zeichnen. Was erwartest Du?

Zusatzaufgabe:

Kannst Du eine wesentlich allgemeinere Funktion EW(......) erzeugen, die bei einem Aufruf den Endwert (EW!!) eines beliebigen Kapitals, für eine beliebige Laufzeit für jeden möglichen Zinsfuß ausgibt, zB.:

```
ew(5000, 5.5, 7)
```

liefert den Endwert eines Kapitals von 5000 € nach 5 ½ Jahren bei einer Verzinsung von 7%.

```
7254.05
```

4 Ein Produzent möchte die Produktion eines neuen Erzeugnisses aufnehmen. Er kalkuliert, dass ihn die Produktion zuerst einmal 6000 € kostet, bevor er noch eine Einheit hergestellt hat (Fixkosten, produktionsunabhängige Kosten, Stillstandskosten). Jedes einzelne Stück kostet dann in der Produktion 5,70 €.

a) Was kostet die Herstellung von 100, 200, 600, 1500 Stück?

Menge	Kosten

Übertrage die Daten in ein geeignetes Koordinatensystem:

b) Wie lautet die Formel und dann die Funktion für die Produktionskosten von x Stück:

c) Versuche, mit Hilfe der Grafik zu antworten:
Was kosten 500 Stück, 1000 Stück? ....
Bestätige die graphische Antwort mit Hilfe der Funktion (oder mit einer Tabelle).

Es handelt sich hier um eine .... (Funktion oder Relation?), weil ....

Der Graph der .... ist ....

d) Beantworte graphisch die folgenden Fragen:

Kosten für 750 Stück:

1000 Stück:

1200 Stück:

Wie lautet die Tabelle für die Produktionsmengen zwischen 1000 und 2000 Stück in Abständen von 100:

e) Wie wird sich der Graph ändern, wenn sich die festen Kosten von 6000 € verändern?

f) Wie wird sich der Graph verändern, wenn sich die variablen Stückkosten (hier 5,70 €) verändern?

g) Ist diese Funktion umkehrbar? ....

Begründe die Antwort: …...

h) Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion: …...............................

Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion in das Diagramm in Aufgabe a) ein.

Was beschreibt die Umkehrfunktion?

i) Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion: …..........................

j) In der Betriebswirtschaft wichtig ist in diesem Zusammenhang die *Durchschnittskostenfunktion.* Sie beschreibt die Kosten pro Stück unter Berücksichtigung der Fixkosten. Erstelle die Wertetabelle für die Durchschnittskosten für $10 \leq x\ 200$ in Zehnerschritten und den Graph der Durchschnittskostenfunktion für $0 < x \leq 1000$.

5 Eine Betriebsanlage hat den Anschaffungswert von Euro 36 000.-. Man kann jährlich einen Wertverlust von 10% des Anschaffungswertes geltend machen. (gleichmäßige oder lineare Abschreibung)

a) Welchen Wert hat die Anlage nach 2, 5 und nach 7 Jahren?

Zeit	Buchwert

Übertrage die Daten in ein geeignetes Koordinatensystem:

Beschreibe die Lage der Punkte!

b) Wie lautet eine Formel für den Wert nach x Jahren: ……………………………………………………………

Gibt es auch da wieder eine Funktion (Abschreibungsfunktion)? Was ist die unabhängige, bzw. die abhängige Variable?

c) Versuche, mit Hilfe der Grafik zu antworten: Was ist die Anlage nach 6, bzw. nach 9 Jahren wert? ....

d) Verwende die Funktion, um die Fragen aus b) zu beantworten:

e) Übertrage die Daten aus der Wertetabelle und den Funktionsgraphen ins Koordinatensystem.

f) Die gefundene Formel .... stellt eine Funktion/Relation???? zwischen den Werten x und ………......... dar.

Es handelt sich hier um eine .... (Funktion oder Relation?), weil ....

Der Graph der .... ist ....

g) Beantworte graphisch die folgenden Fragen:

Wert nach 1 Jahr:
4 ½ Jahren:
12 Jahren

h) Erstelle eine geeignete Tabelle und vergleiche die Werte mit den Antworten aus g)

Wie lautet die Tabelle für die letzten 5 Jahre?

i) Ist diese Funktion umkehrbar? ....
Begründe die Antwort:
....

j) Beantworte mit einem geeigneten Werkzeug die folgenden Fragen:
Wann fällt der Wert der Anlage unter 150 000 €?
50 000 €?

6 Für eine Straßenbaumaschine (Grader) können Techniker den Zusammenhang zwischen seiner Geschwindigkeit *x* [km/h] im 1.Gang und seiner Zugkraft *y* [N] durch die Formel: $y(x) = 6650 + 760\,x - 156\,x^2$ ausdrücken.

a) Welche Zugkraft hat die Maschine bei 0,5km/h, 1km/h, 2km/h, 3km/h, 5km/h?

Geschw.	Kraft

Übertrage die Daten in ein geeignetes Koordinatensystem:

Beschreibe die Lage der Punkte!

Skizziere den Graph (mit einem ordentlichen Koordinatensystem!!)

Es handelt sich hier um eine .... (Funktion oder Relation?), weil ....

Der Graph der .... ist ....

b) Beantworte graphisch die folgenden Fragen:

Kraft bei 0,8 km/h:

1,5 km/h:

Bei welcher Geschwindigkeit kann die Maschine die größte Kraft aufbringen?

c) Erstelle eine geeignete Tabelle und vergleiche die Werte mit den Antworten aus b)

Wie lautet die Tabelle für die Geschwindigkeiten zwischen 1km/h und 2km/h mit einer Schrittweite von 100m/h?

d) Ist diese Funktion umkehrbar? ....
Begründe die Antwort: ....

e) Ermittle den Graph der Umkehrrelation nach der Anleitung im Beispiel 3.
Wozu kann hier die Umkehrfunktion(-relation) dienen?

f) Beantworte mit einem geeigneten Werkzeug die folgenden Fragen:
Mit welcher Geschwindigkeit beträgt die Zugkraft 7500N?
Mit welcher Geschwindigkeit beträgt die Zugkraft 7000N?
Mit welcher Geschwindigkeit beträgt die Zugkraft 5000N?

g) Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion (- relation): ....

Kann das CAS bei der Beantwortung helfen?

Zusammenfassung

Unter den durchgeführten Beispielen hatten vier als Graph eine Gerade. Notiere die „Formeln“, bzw. die Funktionsterme aus diesen vier Anwendungen.

Notiere die beiden anderen Funktionsterme.

Was haben die Funktionsterme, die zu Geraden als Graphen führen, gemeinsam:

Die gemeinsame Bauart lässt sich formulieren als:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + d}$$

Ergänze die Tabelle:

Funktionsterm	k	d
Beisp. 1		
Beisp. 2		
Beisp. 4		
Beisp. 5		

Welche Bedeutung hat die Größe k?

Wie wirkt sich die Größe k auf die Lage der Geraden aus?

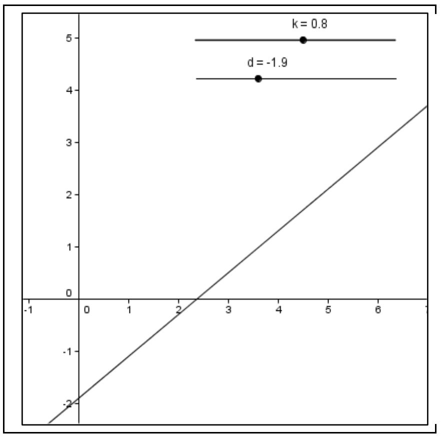
Welche Bedeutung hat die Größe d?

Was geschieht mit der Geraden, wenn man d verändert?

Man nennt k den .... der Geraden, d ist der ....

Erzeuge in der Geometrie-Ansicht zwei Schieberegler für *k* und *d*.
Definiere die Funktion *y* = *k* x + *d*

Der Einsatz der Schieberegler kann helfen, Deine Antworten von oben zu präzisieren.



Ergänze die folgenden Sätze:

Wenn man am Graph einer linearen Funktion von jeder beliebigen Stelle x immer den gleichen Abstand in x-Richtung geht, dann ändert sich der y-Wert ……………………………………………………………………………………

(a) immer um einen anderen Wert

(b) immer um den gleichen Wert

(c) überhaupt nicht

Wenn man am Graph einer linearen Funktion von einer beliebigen Stelle x einen bestimmten Abstand in x-Richtung geht, dann ist die Änderung des y-Werts immer ……………………………………………………………………

(a) proportional zu diesem Abstand

(b) proportional zum x-Wert

(c) gleich wie der gewählte Abstand

Eine letzte Frage zum Verständnis:

Eine Gerade verläuft durch die beiden Punkte A(10|120) und B(25|180). Kannst Du aus diesen Daten den Wert für *k* errechnen? (Kopfrechnung!!)

nochmals für: A(12|56) und B(20|12): k = ………………….

A(-5,35|-0,67) und B(1,25|2,13) k = ………………….

und nun allgemein: $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ k = ………………….

Buchstaben- und Zahlensalat

Was hat Pascal mit den Binomialkoeffizienten zu tun?

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 07. März 2010

---

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Mit dem vorliegenden Arbeitsmaterial wird der Zusammenhang zwischen dem Pascal'schen Dreieck und den Binomialkoeffizienten hergestellt sowie der binomische Lehrsatz hergeleitet und angewendet. Die Bedeutung des Binomialkoeffizienten im Zusammenhang mit kombinatorischen Aspekten wird spielerisch erarbeitet und dient als Vorbereitung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	10. Schulstufe
Geschätzte Dauer	2 Unterrichtseinheiten
Verwendete Materialien	Arbeitsblatt, GeoGebraCAS
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS
Schlagwörter Mathematik	Binomische Formeln, Pascal'sches Dreieck, Binomialkoeffizient, binomischer Lehrsatz
Schlagwörter GeoGebraCAS	Expand, Faktorielle, Funktion definieren, Liste von Werten erzeugen
Autor/in	Irma Bierbaumer, Walter Klinger, Evelyn Stepancik
Download von Zusatzmaterialien	

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Sicherer Umgang mit Potenzen und Exponenten • Binomische Formeln • Pascal'sches Dreieck • Fakultät • Binomialkoeffizient
Technisches Vorwissen	• Befehl EXPAND kennen und anwenden können • n! berechnen können • Bruchterme eingeben können • Funktionen definieren können • Startwert, Endwert und Schrittweite kennen

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Pascal'sches Dreieck	Mithilfe des Pascal'schen Dreiecks die Koeffizienten binomischer Formeln berechnen können und binomische Formeln ausrechnen können
Binomischer Lehrsatz	Die Herleitung des binomischen Lehrsatzes nachvollziehen und den Lehrsatz an Binomen anwenden können.
Binomialkoeffizient	Die Bedeutung des Binomialkoeffizienten bei Auswahlverfahren kennen lernen.

1.5 Lernzielkontrolle

Anhand weiterer binomischer Formeln kann das Verständnis des binomischen Lehrsatzes und Pascal'schen Dreiecks überprüft werden. Anhand einfacher Beispiele zur Auswahl von k aus n Elementen kann der kombinatorische Aspekt vertieft werden.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Vor Beginn der Unterrichtseinheiten müssen die Arbeitsblätter für alle Schüler/innen kopiert werden.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Mit dem Befehl EXPAND werden binomische Formeln ausgerechnet.
Die Berechnung des Binomialkoeffizienten mit GeoGebraCAS führt zur Auslagerung des operativen Bereiches an das CAS und ermöglicht das rasche Vergleichen der Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten der Ergebnisse von $(a + b)^n$. Das Erzeugen einer Liste von Binomialkoeffizienten mittels des Befehls TABLE entspricht einer Verallgemeinerung und Auslagerung der Berechnung der einzelnen Binomialkoeffizienten.

Verwendete Befehle

`Expand`	Ausmultiplizieren
`Table(Term,Variable,Startwert,Endwert,Schrittweite)`	Erzeugt eine Liste von Werte

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
---	---

3 Didaktischer Hintergrund

Der Mehrwert des CAS Einsatzes liegt in der Auslagerung des Operativen, womit ein rascher Koeffizientenvergleich und das Erkennen von Zusammenhängen ermöglicht werden. Der Schwerpunkt kann somit auf das Erkennen der verschiednen Anwendungsbereiche des Binomialkoeffizienten gelegt werden.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Von der Anordnung der Variablen a und b	Partner/innenarbeit	Aufgabe 1 Arbeitsblatt Seite 1 und 2
Wiederholung	Wiederholung des Pascal'schen Dreiecks	Einzelarbeit	Aufgabe 2 Arbeitsblatt Seite 3 GeoGebra CAS
Erarbeitungsphase	Herleitung des binomischen Lehrsatzes	Partner/innenarbeit	Aufgabe 3 Arbeitsblatt Seite 4 und 5 GeoGebra CAS
Zusammenfassung	Zusammenhang zwischen der Anorndung der Variablen a und b und dem Binomialkoeffizienten	Partner/innenarbeit	Aufgabe 4 Arbeitsblatt Seite 6 GeoGebra CAS

5 Anhang

Arbeitsblätter zum Downloaden unter http://rfdz-ph.noe.ac.at

Buchstaben- und Zahlensalat

Was hat Pascal mit den Binomialkoeffizienten zu tun?

Aufgabe 1 – Von der Anordnung der Variablen a und b

Das Anwenden von binomischen Formeln entspricht dem Ausmultiplizieren von Binomen. D.h.

$(a + b)^0 = 1$ weil $x^0=1$

$(a + b)^1 = a + b$ es gibt ein a und ein b

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variablen a und b zwei leere Plätze zu füllen? Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variable a und b drei leere Plätze zu füllen? Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Variable a und b vier leere Plätze zu füllen?
Gib alle Möglichkeiten mit unterschiedlichen Reihenfolgen von a und b an!

2. Drücke diese Ergebnisse mit Hochzahlen aus!

3. Gib die verschiedenen Terme an!
Wie oft tritt jeder dieser Terme auf?

4. Ergänze nun $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) =$

Aufgabe 2 – Wiederholung Pascal'sches Dreieck

1. Gib in GeoGebraCAS den Ausdruck $(a + b)^n$ ein und berechne ihn für n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Verwende den Befehl `Expand`.

2. Trage die Koeffizienten in das Dreieck ein!

n=0	1
n=1	1 1
n=2	1 2 1
n=3	1 3 3 1
n=4	1 4 _ _ _
n=5	1 _ _ _ _ _
n=6	1 _ _ _ _ _ _

3. Vergleiche die Koeffizienten des Pascal'schen Dreiecks mit den Koeffizienten der Ausdrücke $(a + b)^n$. Was erkennst du?

4. Was kannst du bei den Exponenten der Variablen erkennen?

5. Berechne nun händisch $(a + b)^7$ und $(a + b)^8$ und vergleiche dein Ergebnis mit den entsprechenden Ausgaben von GeoGebraCAS.

$(a + b)^7 =$ ____

$(a + b)^8 =$ ____

Aufgabe 3 – Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird berechnet mit $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Du kannst in GeoGebraCAS den Bruch genau in dieser Schreibweise eingeben.

1. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten
$\binom{2}{0}=$ ___, $\binom{2}{1}=$ ___ und $\binom{2}{2}=$ ___.
Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von $(a + b)^2$.
Was fällt dir auf?

2. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten
$\binom{3}{0}=$ ___, $\binom{3}{1}=$ ___, $\binom{3}{2}=$ ___ und $\binom{3}{3}$.
Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von $(a + b)^3$.
Was fällt dir auf?

3. Berechne mit GeoGebraCAS die Binomialkoeffizienten
$\binom{4}{0}=$ ___, $\binom{4}{1}=$ ___, $\binom{4}{2}=$ ___, $\binom{4}{3}=$ ___ und $\binom{4}{4}$.
Vergleiche die errechneten Binomialkoeffizienten mit den Koeffizienten von $(a + b)^4$.
Was fällt dir auf?

4. Gib $(a + b)^5$, $(a + b)^6$ und $(a + b)^7$ mithilfe der entsprechenden Binomialkoeffizienten an!

$(a + b)^5 =$ ____

$(a + b)^6 =$ ____

$(a + b)^7 =$ ____

5. Gib $(a + b)^n$ mithilfe der entsprechenden Binomialkoeffizienten an!

$(a + b)^n =$ ____

Kannst du jetzt auch die Exponenten in Abhängigkeit von n angeben?

$(a + b)^n =$ ____

Diese Formel zur Berechnung von $(a + b)^n$ wird binomischer Lehrsatz genannt!

6. Für große n ist die Berechnung der einzelnen Binomialkoeffizienten auch mit einem CAS aufwendig.
Du kannst dir jedoch auf folgende Weise eine Liste der Binomialkoeffizienten abhängig von der Wahl deines Wertes für n erzeugen.

Zur Berechnung der Liste der Binomialkoeffizienten gehst du so vor:

a. Definiere n. z. B.: `n:=10`

b. Definiere eine Funktion zur Berechnung des Binomialkoeffizienten.

z. B.: $\mathtt{bk(k):=}\dfrac{\mathtt{n!}}{\mathtt{k!\cdot(n-k)!}}$

c. Mit dem Befehl `Table(bk(i),i,0,n,1)`[1] erhältst du die Liste der Binomialkoeffizienten $\binom{10}{k}$ für k = 0, 1, 2, …, 10

d. Gib mithilfe dieser Liste $(a + b)^{10}$ an und überprüfe dein Ergebnis durch Berechnung von $(a + b)^{10}$ mit GeoGebraCAS!

$(a + b)^{10}$ = ____

7. Berechne mit GeoGebraCAS die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 15.

Gib $(a + b)^{15}$ mithilfe der errechneten Binomialkoeffizienten an und überprüfe dein Ergebnis durch Berechnung von $(a + b)^{15}$ mit GeoGebraCAS!

[1] `Table(Term,Variable,Startwert, Endwert,Schrittweite)`

Aufgabe 4 – Zusammenhang zwischen der Anordnung der Variablen a und b und dem Binomialkoeffizienten

1. In der *Aufgabe 1* hast du untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf zwei leeren Plätzen angeordnet werden können.

Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 2.
Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.
Was fällt dir auf?

2. In der *Aufgabe 1* hast du auch untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf drei leeren Plätzen angeordnet werden können.

Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 3.
Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.
Was fällt dir auf?

3. In der *Aufgabe 1* hast du auch untersucht, auf wie viele Arten die zwei Variablen a und b auf vier leeren Plätzen angeordnet werden können.

Gib die auftretenden Möglichkeiten und die Anzahl ihres Auftretens an!

Berechne analog zur *Aufgabe 3* die Liste der Binomialkoeffizienten für n = 4.
Vergleiche die Ergebnisse mit den gezählten Anordnungen der Variablen a und b.
Was fällt dir auf?

4. Formuliere eine allgemeine Vorschrift, mit der du berechnen kannst, auf wie viele Arten k Variablen auf n leeren Plätzen angeordnet werden können!

Grenzwert einer Folge

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 21. April 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Innerhalb von zwei Unterrichtseinheiten sollen die Schüler/innen zwei Arbeitsblätter mit GeoGebra erstellen, die das Verhalten von Folgen visualisieren, und die Eigenschaften von 10 Folgen hinsichtlich Konvergenz untersuchen.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	10. Schulstufe
Geschätzte Dauer	2 Unterrichtseinheiten
Verwendete Materialien	siehe Anhang: Arbeitsanleitung 1, Arbeitsanleitung 2, Aufgabenstellung, Lösungen
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS, Java
Schlagwörter Mathematik	Folgen, Grenzwert, Limes, ε-Umgebung
Schlagwörter GeoGebraCAS	Limit
Autor/in	Andreas Lindner
Download von Zusatzmaterialien	

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Explizite Darstellung einer Folge • Eigenschaften von Folgen • ε-Umgebung • Begriffe Konvergenz, Divergenz

Technisches Vorwissen	• Grundlegende Fertigkeiten in der Bedienung von GeoGebra

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Explizites Darstellen von Folgen	Schüler/innen sollen Zahlenfolgen eindimensional auf der Zahlengeraden und zweidimensional im Koordinatensystem darstellen können und die Analogie zu Funktionen erklären können.
Untersuchen von Folgen auf Konvergenz	Schüler/innen sollen erkennen, ob und ab welchem Index n sich die Folgenglieder einem Grenzwert nähern.
Intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert	Schüler/innen sollen aus der grafischen Darstellung einer Folge erkennen können, ob sie konvergiert, und eine Formulierung für den Grenzwert einer Folge angeben können.

1.5 Lernzielkontrolle

Eine Möglichkeit zu überprüfen, ob die Lernenden die Lernziele erreicht haben, ist die Abgabe und das Überprüfung der ausgefüllten Aufgabenstellungen.

Weiters kann in der nächsten Unterrichtseinheit eine schriftliche **Lernzielkontrolle** (siehe Anhang) erfolgen.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Vor Beginn der beiden Unterrichtseinheiten müssen die beiden Arbeitsanleitung und die Aufgabenstellung (siehe Anhang) für jede/n Schüler/in kopiert werden.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Lehrende sollten folgende Befehle und Funktionalitäten von GeoGebra beherrschen:

GeoGebra	<u>GeoGebraCAS</u>
Punkte , Strecken, Gerade erstellen	**Grenzwert**[Ausdruck, Var, Wert] Limit[Expression, Var, Value]
Eigenschaften von Objekten wie Farbe, Größe,... ändern	Infinity – Unendlichkeit (unendlich)
Listen erstellen	
Schieberegler erstellen	
Texte erstellen	
Ansichten verändern, Zoomen	

Verwendete Befehle

Befehl	Erklärung des Befehls
Grenzwert[Ausdruck, Var, Wert] Limit[Expression, Var, Value]	berechnet den Limes der Folge

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege
A	Neuer Punkt
	Strecke
a = 2	Schieberegler
ABC	Text einfügen

3 Didaktischer Hintergrund

Schüler/innen sollen einen intuitiven Zugang zum Begriff Grenzwert bekommen. Durch das Darstellen mehrerer Folgen auf der Zahlengerade und im Koordinatensystem erhalten die Schüler/innen eine Vorstellung, ob eine Folge konvergiert oder divergiert, je nachdem, ob die Punkte sich mit größer werdendem n an einen Grenzwert annähern oder nicht.
Durch das Bewegen eines Punktes können Schüler/innen außerdem

auf einfache Weise feststellen, ab welchem Index n ein Folgenglied innerhalb einer ε-Umgebung liegt. Das dazu notwendige algebraische Lösen der Ungleichung $|a(n)-b| < \varepsilon$ kann in einer späteren Phase behandelt werden.
Durch die Verwendung eines CAS ist es für Schüler/innen möglich, in kurzer Zeit eine relativ große Anzahl von Folgen zu untersuchen. Dabei können im Vergleich zu einer händischen Bearbeitung auch solche Folgen betrachtet werden, bei denen nach dem Berechnen der ersten paar Folgenglieder der weitere Verlauf noch nicht genau eingeschätzt werden kann.
Die Zusammenarbeit in Form einer Partnerarbeit unterstützt dabei das „Sprechen über mathematische Inhalte".

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Aufgabenstellung durch den Lehrer/die Lehrerin	Lehrervortrag	
Erarbeitungsphase	1a) **Gruppe A**: Erstellen des Arbeitsblattes 1 1b) **Gruppe B**: Erstellen des Arbeitsblattes 2 2) Untersuchen der Konvergenz/Divergenz von 10 Folgen	Einzelarbeit Einzelarbeit Partnerarbeit	Arbeitsanleitung 1 (siehe Anhang) Arbeitsanleitung 2 (siehe Anhang) Aufgabenstellung (siehe Anhang)
Zusammenfassung	Vergleich und Diskussion der Ergebnisse	Präsentation	Lösung (siehe Anhang)
Lernzielkontrolle	Kontrolle der ausgefüllten Aufgabenstellungen Schriftliche Lernzielkontrolle	Lehrer/in Einzelarbeit	 Lernzielkontrolle (siehe Anhang)

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Vorschläge zur Differenzierung siehe unten	Einzel- oder Partnerarbeit	
Hausübung	Vorschläge zur HÜ siehe unten	Einzelarbeit	

4.2 Unterrichtsablauf

Einführung

Der Lehrende erklärt die Aufgabenstellung. Dazu kann eventuell ein fertiges Arbeitsblatt präsentiert werden, um eine genaue Zielvorgabe geben zu können.

Erarbeitungsphase

1. Unterrichtseinheit:

Eine Hälfte der Klasse (Gruppe A) erstellt in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 1** (auf Papier, siehe Anhang) das **Arbeitsblatt (GeoGebra-Konstruktion) „Grenzwert einer Folge auf der Zahlengerade“.**
Die andere Hälfte der Klasse (Gruppe B) erstellt in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 2** (auf Papier, siehe Anhang) das **Arbeitsblatt (GeoGebra-Konstruktion) „Grenzwert einer Folge im Koordinatensystem“.**

2. Unterrichtseinheit:

In dieser Unterrichtsstunde bilden jeweils ein Mitglied der Gruppe A und ein Mitglied der Gruppe B ein Team. Sie tauschen sich über die in der 1. Unterrichtseinheit erstellten Arbeitsblätter aus und vergleichen die beiden Darstellungsformen einer Folge.
Anschließend untersuchen sie die Konvergenz bzw. Divergenz von 10 Folgen. Weiters bestimmen sie einen Index n, ab welchem sich der Punkt (a(n), 0) auf der Zahlengeraden bzw. der Punkt (n, a(n)) im Koordinatensystem innerhalb der ε-Umgebung um den Grenzwert befindet.

Die detaillierten Arbeitsaufträge sind im Anhang unter **Aufgabenstellung** angegeben.

Alternative:
Falls Schüler/innen es nicht schaffen, in der vorgegebenen Zeit das jeweilige **Arbeitsblatt (GeoGebra-Konstruktion)** zu erstellen, können sie mit den zur Verfügung gestellten Lösungsdateien in der 2. Unterrichtseinheit die Aufgabenstellungen bearbeiten.

Zusammenfassung

Innerhalb von zwei Unterrichtseinheiten sollen die Schüler/innen zwei Arbeitsblätter mit GeoGebra erstellen, die das Verhalten von Folgen visualisieren, und die Eigenschaften von 10 Folgen hinsichtlich Konvergenz untersuchen.

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Vertiefung – Innere Differenzierung
Gute Schüler/innen, die vorzeitig die Aufgaben richtig gelöst haben, können zusätzlich folgende Verbesserungen und Erweiterungen des Arbeitsblattes anbringen.

- Erstellen eines Vierecks, das das „ε-Band" mit einer Farbe hinterlegt.
- Einfügen eines Textes „$|a_n - b| < \varepsilon$; außerhalb der ε-Umgebung", der nur angezeigt wird unter der Bedingung, dass $|a_n - b| > \varepsilon$ ist bzw. eines Textes „$|a_n - b| < \varepsilon$; innerhalb der ε-Umgebung", der nur angezeigt wird unter der Bedingung, dass $|a(n) - b| < \varepsilon$ ist.
- Formulieren weitere Angaben für Folgen, die auf Konvergenz/Divergenz untersucht werden sollen.

Hausübung

Weitere Folgen auf Konvergenz/Divergenz entsprechend der Aufgabenstellung aus der 2. Unterrichtseinheit untersuchen:

1) $a(n) = 4 \cdot (-1)^n$

2) $a(n) = \frac{3}{n^2} - 7$

3) $a(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$

4) $a(n) = 45 \cdot (1 - 0{,}3^n)$

5 Anhang

Folgende Materialien stehen für die Schüler/innen bzw. Lehrer/innen zur Verfügung.

1) **Arbeitsanleitung 1** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge auf der Zahlengerade"

2) **Arbeitsanleitung 2** zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer

Folge im Koordinatensystem“

3) **Aufgabenstellung** zu „Grenzwert einer Folge“

4) **Lösungen** zu „Grenzwert einer Folge“

5) **Lernzielkontrolle**

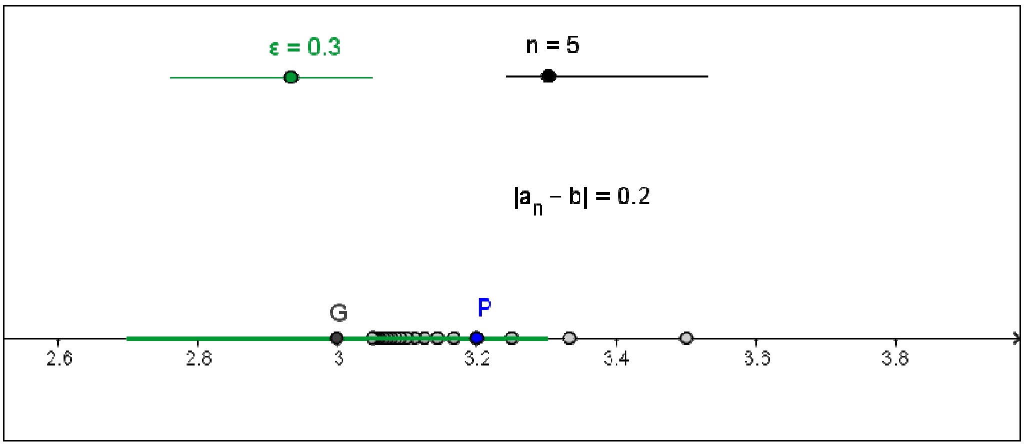
Arbeitsanleitung 1 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge auf der Zahlengerade“

- Definiere im CAS-Fenster die Folge a(k) mit z. B. a(k) = 3+1/k und blende den angezeigten Graphen (eigentlich der Funktion) aus. Diese Definition der Folge hat den Vorteil, dass du für eine andere Folge nur diesen einen Term in der 1. Zeile im CAS-Fenster ändern musst.
- Erstelle im Algebra-Fenster eine Liste mit den ersten 20 Punkten (a(k), 0) auf der Zahlengeraden:
  Folge[(a(k), 0), k, 1, 20]; Formatierung: Farbe z. B. hellgrau
- Erstelle zwei Schiebereglern für n im Bereich von 1 bis 20 (Schrittweite 1) und ε im Bereich von 0 bis 0.5 (Schrittweite 0.01).
- Zeichne einen Punkt P=(a(n), 0); Formatierung: Farbe z. B. blau
- Berechne im CAS-Fenster den Grenzwert der Folge mit b:=Grenzwert[a(k), k, Infinity]
- Zeichne die ε-Umgebung:

G=(b, 0)	Dieser Punkt zeigt den Grenzwert an.
A=(b-ε, 0), B=(b+ε, 0)	Punkte A, B
Strecke c von A nach B	Diese Strecke zeigt die ε-Umgebung an.

  Blende die beiden Punkte A und B aus und formatiere die Strecke c z. B. grün.
- Erstelle einen dynamischem Text, der den Betrag der Differenz von Folgenglied zum Grenzwert anzeigt: "| a_n – b | = "+(Abstand[P, G])

Das Geometrie-Fenster sollte ungefähr das folgende Aussehen haben.



Hinweis: Achte bei allen Folgen auf die richtige Größe des angezeigten Koordinatensystems.
Zoomen kannst du mit dem Scrollrad oder mit dem Werkzeug *Verschiebe Zeichenblatt*. Die Skalierung der einzelnen Achsen kannst du durch Ziehen der Achsen mit *Strg - linke*

Maustaste verändern.

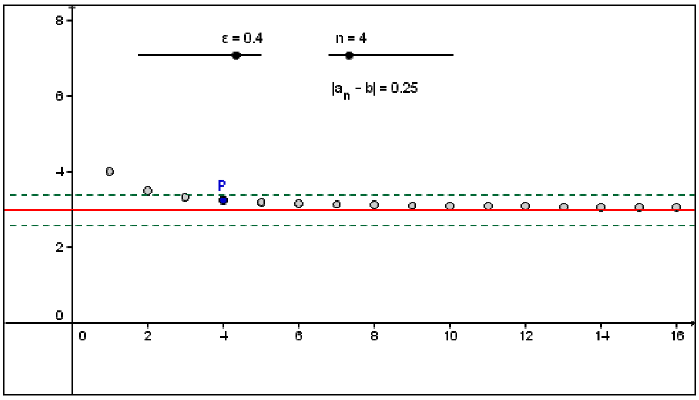
Arbeitsanleitung 2 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge im Koordinatensystem“

- Definiere im CAS-Fenster die Folge a(k) mit z. B. a(k) = 3+1/k und blende den angezeigten Graphen (eigentlich der Funktion) aus. Diese Definition der Folge hat den Vorteil, dass du für eine andere Folge nur diesen einen Term in der 1. Zeile im CAS-Fenster ändern musst.
- Erstelle im Algebra-Fenster eine Liste mit den ersten 20 Punkten (k, a(k)): Folge[(k, a(k)), k, 1, 20]; Formatierung: Farbe z. B. hellgrau
- Erstelle zwei Schiebereglern für n im Bereich von 1 bis 20 (Schrittweite 1) und ε im Bereich von 0 bis 0.5 (Schrittweite 0.01)
- Zeichne einen Punkt P=(n, a(n)), Formatierung: Farbe z. B. blau
- Berechne im CAS-Fenster den Grenzwert der Folge mit b:=Grenzwert[a(k), k, Infinity]
- Zeichne drei Geraden zur Darstellung der ε-Umgebung:

Gerade 1: y = b	Diese Gerade zeigt den Grenzwert an.
Gerade 2: y = b + ε	Diese Gerade zeigt den oberen Rand des „ε-Bandes“ an.
Gerade 3: y = b – ε	Diese Gerade zeigt den unteren Rand des „ε-Bandes“ an.

  Formatiere die drei Geraden färbig.
- Erstelle einen dynamischem Text, der den Betrag der Differenz von Folgenglied zum Grenzwert anzeigt: "|a_n – b| = " + (abs(y(P) - b))

Das Geometrie-Fenster sollte ungefähr das folgende Aussehen haben.



<u>Hinweis</u>: Achte bei allen Folgen auf die richtige Größe des angezeigten Koordinatensystems.
Zoomen kannst du mit dem Scrollrad oder mit dem Werkzeug ✥ *Verschiebe Zeichenblatt*. Die Skalierung der einzelnen Achsen kannst du durch Ziehen der Achsen mit *Strg - linke Maustaste* verändern.

Aufgabenstellung zu „Grenzwert einer Folge“

Untersuche die in der Liste angegebenen Folgen auf ihre Konvergenz bzw. Divergenz.
Halte schriftlich fest, welche Folge konvergiert und begründe deine Entscheidung.
Ab welchem Index n befindet sich der Punkt (a(n), 0) bzw. (n, a(n)) innerhalb der „ε-Umgebung“?

Folge	konvergent/ divergent	Limes	Begründung	Index n
(1) $a(n)=3+\frac{1}{n}$ $\varepsilon = 0{,}30$				
(2) $a(n)=\frac{2+3n}{1+n}$ $\varepsilon = 0{,}25$				
(3) $a(n)=\sin(n)$ $\varepsilon = 0{,}10$				
(4) $a(n)=\frac{5-2n}{12n-n^2}$ $\varepsilon = 0{,}40$				
(5) $a(n)=\frac{\sqrt{n}}{1{,}2-\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0{,}45$				
(6) $a(n)=(-1)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$				
(7) $a(n)=-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$				
(8) $a(n)=\sqrt{\frac{3n+1}{n}}$ $\varepsilon = 0{,}05$				
(9) $a(n)=10+\frac{2+n}{n-3}$ $\varepsilon = 0{,}50$				
(10) $a(n)=\frac{3}{n}+0{,}5n$ $\varepsilon = 0{,}15$				

Lösungen zu „Grenzwert einer Folge“

Folge	konvergent/ divergent	Limes	Begründung	Index n
(1) $a(n)=3+\frac{1}{n}$ $\varepsilon = 0{,}30$	konvergent	3		n = 4
(2) $a(n)=\frac{2+3n}{1+n}$ $\varepsilon = 0{,}25$	konvergent	3		n = 4
(3) $a(n)=\sin(n)$ $\varepsilon = 0{,}10$	divergent		Folgenglieder nehmen Werte zwischen +1 und -1 an.	
(4) $a(n)=\frac{5-2n}{12n-n^2}$ $\varepsilon = 0{,}40$	konvergent	0		n = 17
(5) $a(n)=\frac{\sqrt{n}}{1{,}2-\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0{,}45$	konvergent	-1		n = 15
(6) $a(n)=(-1)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$	divergent		Folgenglieder springen zwischen +1 und -1	
(7) $a(n)=-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$	konvergent	0		n = 4
(8) $a(n)=\sqrt{\frac{3n+1}{n}}$ $\varepsilon = 0{,}05$	konvergent	$\sqrt{3}$		n = 6
(9) $a(n)=10+\frac{2+n}{n-3}$ $\varepsilon = 0{,}50$	konvergent	11		n = 14
(10) $a(n)=\frac{3}{n}+0{,}5n$ $\varepsilon = 0{,}15$	divergent		Folgen ist ab n = 3 streng monoton wachsend	

Lernzielkontrolle

Untersuche die Folgen auf ihre Konvergenz bzw. Divergenz.
Halte schriftlich fest, welche Folge konvergiert oder divergiert und begründe deine Entscheidung.

(1) $a(n) = 2 - \frac{1+3n}{4+n}$

(2) $a(n) = 3 \cdot (-1)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

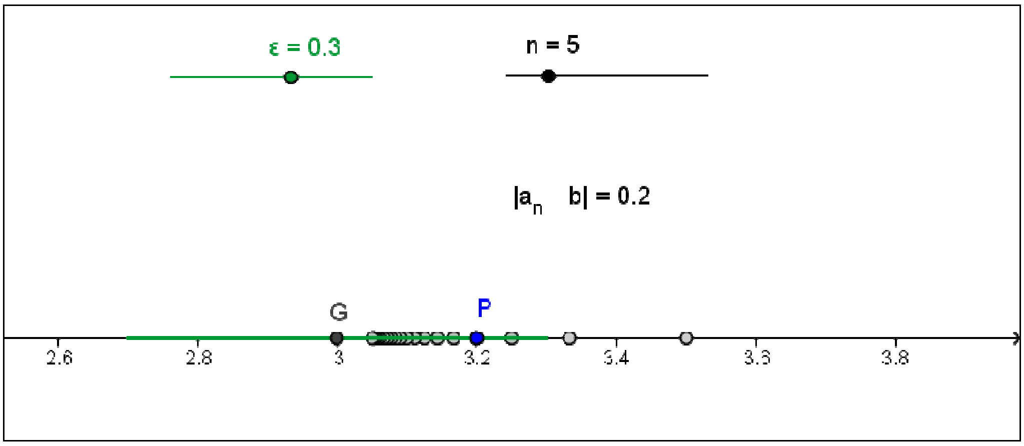
Arbeitsanleitung 1 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge auf der Zahlengerade“

- Definiere im CAS-Fenster die Folge a(k) mit z. B. a(k) = 3+1/k und blende den angezeigten Graphen (eigentlich der Funktion) aus. Diese Definition der Folge hat den Vorteil, dass du für eine andere Folge nur diesen einen Term in der 1. Zeile im CAS-Fenster ändern musst.
- Erstelle im Algebra-Fenster eine Liste mit den ersten 20 Punkten (a(k), 0) auf der Zahlengeraden:
  Folge[(a(k), 0), k, 1, 20]; Formatierung: Farbe z. B. hellgrau
- Erstelle zwei Schiebereglern für n im Bereich von 1 bis 20 (Schrittweite 1) und ε im Bereich von 0 bis 0.5 (Schrittweite 0.01).
- Zeichne einen Punkt P=(a(n), 0); Formatierung: Farbe z. B. blau
- Berechne im CAS-Fenster den Grenzwert der Folge mit b:=Grenzwert[a(k), k, Infinity]
- Zeichne die ε-Umgebung:

G=(b, 0)	Dieser Punkt zeigt den Grenzwert an.
A=(b-ε, 0), B=(b+ε, 0)	Punkte A, B
Strecke c von A nach B	Diese Strecke zeigt die ε-Umgebung an.

  Blende die beiden Punkte A und B aus und formatiere die Strecke c z. B. grün.
- Erstelle einen dynamischem Text, der den Betrag der Differenz von Folgenglied zum Grenzwert anzeigt: "|a_n – b| = "+(Abstand[P, G])

Das Geometrie-Fenster sollte ungefähr das folgende Aussehen haben.



Hinweis: Achte bei allen Folgen auf die richtige Größe des angezeigten Koordinatensystems.
Zoomen kannst du mit dem Scrollrad oder mit dem Werkzeug *Verschiebe Zeichenblatt*. Die Skalierung der einzelnen Achsen kannst du durch Ziehen der Achsen mit *Strg - linke Maustaste* verändern.

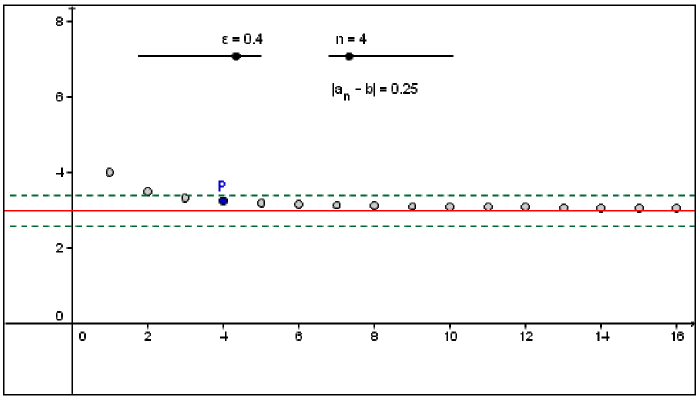
Arbeitsanleitung 2 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Grenzwert einer Folge im Koordinatensystem“

- Definiere im CAS-Fenster die Folge a(k) mit z. B. a(k) = 3+1/k und blende den angezeigten Graphen (eigentlich der Funktion) aus. Diese Definition der Folge hat den Vorteil, dass du für eine andere Folge nur diesen einen Term in der 1. Zeile im CAS-Fenster ändern musst.
- Erstelle im Algebra-Fenster eine Liste mit den ersten 20 Punkten (k, a(k)): Folge[(k, a(k)), k, 1, 20]; Formatierung: Farbe z. B. hellgrau
- Erstelle zwei Schiebereglern für n im Bereich von 1 bis 20 (Schrittweite 1) und ε im Bereich von 0 bis 0.5 (Schrittweite 0.01)
- Zeichne einen Punkt P=(n, a(n)), Formatierung: Farbe z. B. blau
- Berechne im CAS-Fenster den Grenzwert der Folge mit b:=Grenzwert[a(k), k, Infinity]
- Zeichne drei Geraden zur Darstellung der ε-Umgebung:

Gerade 1: y = b	Diese Gerade zeigt den Grenzwert an.
Gerade 2: y = b + ε	Diese Gerade zeigt den oberen Rand des „ε-Bandes“ an.
Gerade 3: y = b – ε	Diese Gerade zeigt den unteren Rand des „ε-Bandes“ an.

  Formatiere die drei Geraden färbig.
- Erstelle einen dynamischem Text, der den Betrag der Differenz von Folgenglied zum Grenzwert anzeigt: "|a_n – b| = " + (abs(y(P) - b))

Das Geometrie-Fenster sollte ungefähr das folgende Aussehen haben.



<u>Hinweis</u>: Achte bei allen Folgen auf die richtige Größe des angezeigten Koordinatensystems.
Zoomen kannst du mit dem Scrollrad oder mit dem Werkzeug *Verschiebe Zeichenblatt*. Die Skalierung der einzelnen Achsen kannst du durch Ziehen der Achsen mit *Strg - linke Maustaste* verändern.

Aufgabenstellung zu „Grenzwert einer Folge“

Untersuche die in der Liste angegebenen Folgen auf ihre Konvergenz bzw. Divergenz.
Halte schriftlich fest, welche Folge konvergiert und begründe deine Entscheidung.
Ab welchem Index n befindet sich der Punkt (a(n), 0) bzw. (n, a(n)) innerhalb der „ε-Umgebung“?

Folge	konvergent/ divergent	Limes	Begründung	Index n
(1) $a(n) = 3 + \frac{1}{n}$ $\varepsilon = 0{,}30$				
(2) $a(n) = \frac{2+3n}{1+n}$ $\varepsilon = 0{,}25$				
(3) $a(n) = \sin(n)$ $\varepsilon = 0{,}10$				
(4) $a(n) = \frac{5-2n}{12n-n^2}$ $\varepsilon = 0{,}40$				
(5) $a(n) = \frac{\sqrt{n}}{1{,}2-\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0{,}45$				
(6) $a(n) = (-1)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$				
(7) $a(n) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$				
(8) $a(n) = \sqrt{\frac{3n+1}{n}}$ $\varepsilon = 0{,}05$				
(9) $a(n) = 10 + \frac{2+n}{n-3}$ $\varepsilon = 0{,}50$				
(10) $a(n) = \frac{3}{n} + 0{,}5n$ $\varepsilon = 0{,}15$				

Lösungen zu „Grenzwert einer Folge“

Folge	konvergent/ divergent	Limes	Begründung	Index n
(1) $a(n) = 3 + \frac{1}{n}$ $\varepsilon = 0{,}30$	konvergent	3		n = 4
(2) $a(n) = \frac{2+3n}{1+n}$ $\varepsilon = 0{,}25$	konvergent	3		n = 4
(3) $a(n) = \sin(n)$ $\varepsilon = 0{,}10$	divergent		Folgenglieder nehmen Werte zwischen +1 und -1 an.	
(4) $a(n) = \frac{5-2n}{12n-n^2}$ $\varepsilon = 0{,}40$	konvergent	0		n = 17
(5) $a(n) = \frac{\sqrt{n}}{1{,}2-\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0{,}45$	konvergent	-1		n = 15
(6) $a(n) = (-1)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$	divergent		Folgenglieder springen zwischen +1 und -1	
(7) $a(n) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\varepsilon = 0{,}30$	konvergent	0		n = 4
(8) $a(n) = \sqrt{\frac{3n+1}{n}}$ $\varepsilon = 0{,}05$	konvergent	$\sqrt{3}$		n = 6
(9) $a(n) = 10 + \frac{2+n}{n-3}$ $\varepsilon = 0{,}50$	konvergent	11		n = 14
(10) $a(n) = \frac{3}{n} + 0{,}5n$ $\varepsilon = 0{,}15$	divergent		Folgen ist ab n = 3 streng monoton wachsend	

Lernzielkontrolle

Untersuche die Folgen auf ihre Konvergenz bzw. Divergenz.
Halte schriftlich fest, welche Folge konvergiert oder divergiert und begründe deine Entscheidung.

(1) $a(n) = 2 - \frac{1+3n}{4+n}$

(2) $a(n) = 3 \cdot (-1)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Matrizenrechnung am Beispiel linearer Gleichungssystemer

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 08/ April 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe der Matrizenrechnung.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	10
Geschätzte Dauer	1 - 2 UE
Verwendete Materialien	Schulbuch 6. Klasse AHS, GeoGebra CAS, Internet-Arbeitsblätter
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS, Java
Schlagwörter Mathematik	Matrizenrechnung, lineare Gleichungen, lineare Gleichungssysteme
Schlagwörter GeoGebraCAS	Matrix, Inverse, (Solve)

Autor/in	Alfred Nussbaumer (überarbeitet von Heidi Metzger-Schuhäker und Peter Hofbauer)
Download von Zusatzmaterialien	http://thema-mathematik.at

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Grundlagen der Matrizenrechnung: Grundrechenarten, inverse Matrix • Systeme linearer Gleichungen
Technisches Vorwissen	• Eingabe von linearen Gleichungen, Koeffizienten und Variablen

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Darstellung linearer Gleichungssysteme mit Matrizen	• Die Normalform eines linearen Gleichungssystems bilden können • Die Koeffizientenmatrix angeben können • Die Unbekannten und die Konstanten als n x 1 – Matrizen (Spaltenvektoren) anschreiben können.
Lösen eines linearen Gleichungssystems	Die Lösung mit Hilfe passender Matrizenoperationen finden können

1.5 Lernzielkontrolle

Lösen von Gleichungssystemen mit GeoGebraCAS, Kontrolle durch selbstständiges Vergleichen mit Lösungen.

Ausblick: Anwenden auf Berechnungen der analytischen Geometrie.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

- Vor Beginn der Unterrichtseinheit müssen die Anleitungen und Aufgaben den Schülern/innen zur Verfügung gestellt werden (elektronisch oder in Papierform).
- Wiederholung der Grundlagen zu linearen Gleichungssystemen und Matrizenrechnung.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Lehrende sollten folgende Befehle und Funktionalitäten von GeoGebraCAS beherrschen:

Verwendete Befehle

`Inverse[M]`	Berechnet die inverse Matrix von M
`M*N`	Multiplikation zweier Matrizen M und N

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege

3 Didaktischer Hintergrund

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen treten beispielsweise in Zusammenhang mit Aufgaben zur analytischen Geometrie des Raumes auf. Während der Schüler/die Schülerin die Koeffizienten und die Normalform des linearen Gleichungssystems aus der gestellten Aufgabe entwickeln und aufstellen muss, soll das Lösen des linearen Gleichungssystems durch das Werkzeug GeoGebraCAS ausgeführt werden.

Ausblick: Beim Berechnen des Schnittpunktes von Geraden und Ebenen oder beim Berechnen des Schnittpunkts von drei Ebenen soll der Schüler/die Schülerin die neu erlernten Methoden sicher anwenden können.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	**Inhalt**	**Sozial- / Aktionsform**	**Materialien**
Einführung	Wiederholung: Gleichung, lineare Gleichung, lineares Gleichungssystem, Matrizenrechnung	Partnerarbeit / individuelle Beschäftigung Lehrervortrag	Arbeitsblatt (WH), Online-Aufgaben-stellungen
Erarbeitungsphase	Matrizen aufstellen	Individuelle Beschäftigung	Arbeitsblatt /Online-Aufgaben-stellung
	Matrizenoperationen vertiefen	Lehrervortrag	

Phase	**Inhalt**	**Sozial- / Aktionsform**	**Materialien**
	Lösung eines linearen Gleichungs-systems mit Matrizen	Lehrervortrag	
	Anwenden	Partnerarbeit	
Zusammenfassung	Matrix – Gleichungssystem – Lösungsformel	Individuelle Beschäftigung	Eigene Dokumenta tion/Port-folio
Lernzielkontrolle	Musteraufgaben lösen	Partnerarbeit	Arbeitsblatt /Online-Aufgaben-stellung
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Lineare Gleichungs-systeme mit 4 und mehr Unbekannten	Gruppenarbeit	
Hausübung	Lineare Gleichungs-systeme mit 3 Unbe-kannten lösen, Zusammenfassung und Dokumentation	Individuelle Beschäftigung	Eigene Dokumenta tion/Port-folio

5 Anhang

http://thema-mathematik.at – 6. Klasse, Analytische Geometrie des Raumes – Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

http://thema-mathematik.at – Mathematik mit GeoGebra

Matrizenrechnung mit GeoGebraCAS

Wir multiplizieren Matrizen:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 32 & -3 \end{pmatrix}$$

1	A: ={{1,2},{4,5}} → {{1,2},{4,5}}
2	B: ={{3,-2},{4,1}} → {{3,-2},{4,1}}
3	A*B → {{11,0},{32,-3}}

Erkenntnis: Multiplizieren wir eine nxn–Matrix mit einer nxn–Matrix, so erhalten wir wieder eine nxn–Matrix!

Allgemein: Die Multiplikation einer mxn–Matrix mit einer nxp–Matrix liefert als Ergebnis eine mxp–Matrix.

Wir bestimmen inverse Matrizen:

Bestimme die <u>inverse Matrix</u> A^{-1} zu A mit GeoGebraCAS.

Ergebnis:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1	A: ={{1,2},{4,5}} → {{1,2},{4,5}}
2	N: =Inverse[A] → $\{\{\frac{-5}{3},\frac{2}{3}\},\{\frac{4}{3},\frac{-1}{3}\}\}$
3	A*N → {{1,0},{0,1}}
4	N*A → {{1,0},{0,1}}

Wir untersuchen die Produkte A . A^{-1} und A^{-1} . A.

Ergebnis: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diese besondere Matrix heißt <u>Einheitsmatrix I</u>. Sie spielt bei der Matrizen-multiplikation die gleiche Rolle wie die Zahl 1 bei der Multiplikation mit reellen Zahlen.

A ·I = A und I ·A = A

Überprüfe dies mit GeoGebraCAS!

Wir multiplizieren Matrizen mit Vektoren

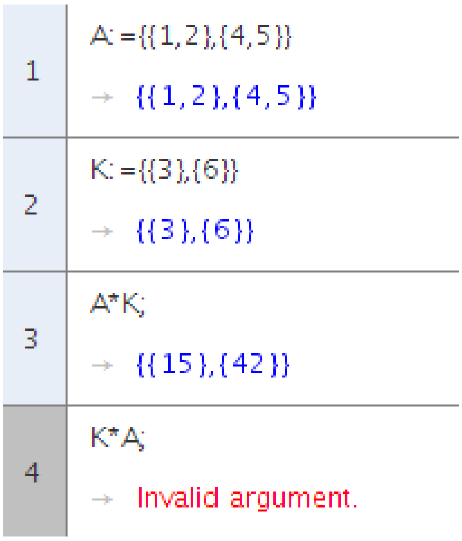
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$A \cdot K = \begin{pmatrix} 15 \\ 42 \end{pmatrix}$$

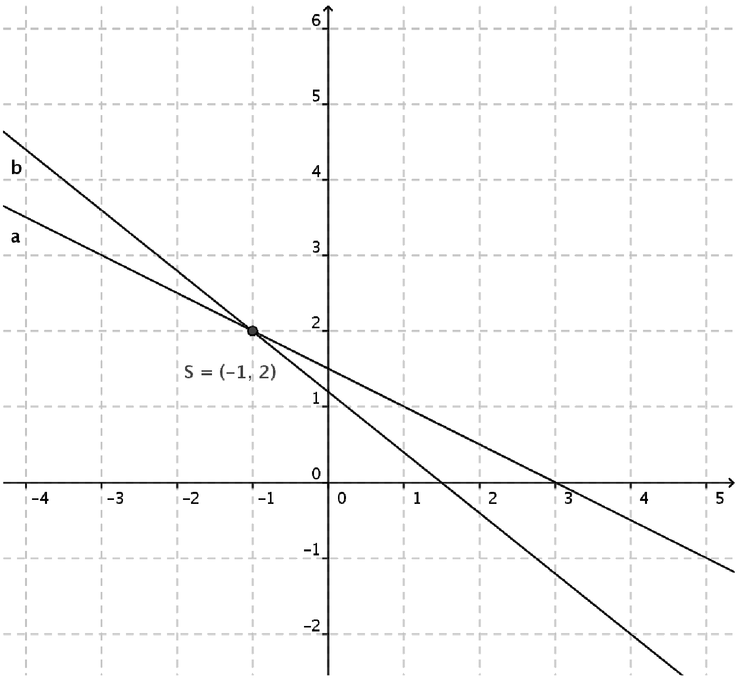
K · A ist nicht definiert!

Bei der Matrizenmultiplikation kommt es auf die Reihenfolge an. Wir unterscheiden "Linksmultiplikation" und "Rechtsmultiplikation"



Einführung

Löse das lineare Gleichungssystem mit GeoGebra:
$x + 2y = 3$
$4x + 5y = 6$



Du findest die Lösung des linearen Gleichungssystems als Schnittpunkt zweier Geraden: S (–1 | 2)

Betrachte nur die Koeffizienten des Gleichungssystems, dann kannst du diese als 2x2–Matrix auffassen und anschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der 1. Zeile entsprechen dabei den Koeffizienten der 1. Gleichung des Gleichungssystems, die Elemente in der 2. Zeile jenen der 2. Gleichung.

Aus den beiden Konstanten der rechten Seite des Gleichungssystems kannst du einen eigenen Spaltenvektor (2 x 1 – Matrix) bilden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erarbeitungsphase

1. Matrizen aufstellen

Stelle aus dem folgenden linearen Gleichungssystem die Koeffizientenmatrix und den Spaltenvektor der Konstanten (Konstantenvektor) auf:

3x – 2y = 7
4x + y = 13

Ebenso für das Gleichungssystem
–x + 8y = 0
5x – 2y = 3

2. Was bedeutet das für Gleichungssysteme?

Wir schreiben das lineare Gleichungssystem

x + 2y = 3

4x + 5y = 6

mit Hilfe der Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ an:

A · V = K

Um den Vektor V mit den beiden Unbekannten x und y zu bestimmen, multiplizieren wir links mit der inversen Matrix A^{-1}:

$A^{-1} \cdot A \cdot V = A^{-1} \cdot K$

$I \cdot V = A^{-1} \cdot K$

Ergebnis: $V = A^{-1} \cdot K$, der Vektor V mit den beiden Unbekannten x und y ist die Links-multiplikation der inversen Koeffizienten-matrix mit dem Konstantenvektor.

Lösung: x = –1, y = 2

1	A:={{1,2},{4,5}} → {{1,2},{4,5}}
2	K:={{3},{6}} → {{3},{6}}
3	Inverse[A]*K; → {{-1},{2}}

3. Wende dieses Verfahren auch auf lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen an!

$x + 2y - 3z = 1$
$x - y - z = 7$
$x + y - 2z = 0$ $(x = -10, y = -8, z = -9)$

$5x - y + 2z = 0$
$x - 2y + z = 0$
$3x + 2y - z = -4$ $(x = -1, y = 1, z = 3)$

Weitere Aufgaben:
http://thema-mathematik.at/tmwiki/doku.php?id=tmwiki:lingleichsys6

Zusammenfassung

Löse lineare Gleichungssysteme, indem du die inverse Koeffizientenmatrix mit dem Konstantenvektor multiplizierst:

$A \cdot V = K$

$V = A^{-1} \cdot K$

Dieses Verfahren kannst du auch auf lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten anwenden.

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Löse das Gleichungssystem von vier linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{llllll} x & & & -7t & = 3 \\ & y & & +3t & = 2 \\ & & z & -5t & = 5 \\ 4x & -15y & +28z & & = -91 \end{array}$$

$(x = -4, y = 5, z = 0, t = -1)$

Löse Aufgabenstellungen aus der analytischen Geometrie des Raumes:

Beispiel: Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts der drei Ebenen
ε_1: $x + 2y - 3z = 4$
ε_2: $5x + 6y + 7z = 8$
ε_3: $9x + 10y + 11z = 12$

Beispiel: Bestimme die Koordinaten für den Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Ebene ε:

$$g: X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ε: 2x + y – z = 3

Hinweis: Gib die Geradengleichung als System von drei linearen Gleichungen an:

$$\begin{array}{llllll} x & & & -t & = 1 \\ & y & & +t & = 0 \\ & & z & & = 2 \end{array}$$

Hausübung

Beispiel: Löse die linearen Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten, indem du Matrizen bildest. Rechne mit GeoGebraCAS!

3x – y + z = 5
2x – 2y + z = -3
x – y + z = 1

2x + 3y – 2z = 14
2x + y – 7 = -1
3x – 4y + 3z = 1

Beispiel: Bestimme die Koordinaten für den Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Ebene ε:

$$g: X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ε: x + y + z = –5

Beispiel: Fasse für die obigen Aufgaben alle Arbeitsschritte mit GeoGebraCAS zusammen, füge die wichtigsten Screenshots ein und lade diese Beschreibung in ein Wiki / in einem Weblog / im e-Learning-System / … hoch !

Radioaktiver Zerfall

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 08/ April 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Der radioaktive Zerfall ist ein Standardbeispiel für die Anwendung der Exponentialfunktion. Mit Hilfe dieses physikalischen Beispiels lässt sich das Verhalten von exponentiellen Vorgängen einfach und nachhaltig verstehen beziehungsweise vertiefen. Neben theoretischen Grundlagen (Halbwertszeit, etc.), kann das Verhalten der Exponentialfunktion auch praktisch mit Hilfe von Schiebereglern untersucht werden.
Die Materialien sind im Mathematikunterricht sowie im Physikunterricht (naturwissenschaftlicher Zweig) einsetzbar.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	6.Klasse AHS, 10.Schulstufe, SEK 2
Geschätzte Dauer	2-3 Einheiten
Verwendete Materialien	Arbeitsblatt, Lösungsblatt, html-Datei
Technische Voraussetzungen	GeoGebra CAS
Schlagwörter Mathematik	Exponentialfunktion
Schlagwörter GeoGebraCAS	Lösen von Gleichungen
Autor/in	Matthias Kittel
Download von Zusatzmaterialien	---

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Definition: Exponentialfunktion • Definition: Logarithmusfunktion • Lösen von Exponentialgleichungen
Technisches Vorwissen	• Verwendung GeoGebra inklusive Tabellenansicht und CAS

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Radioaktiver Zerfall	Wissen um Arten der Strahlenbelastung, Wissen über den Begriff Halbwertszeit, Exponentialgleichungen lösen können, Interpretieren können von Exponentialfunktionen in mathematischer und anwendungsorientierter Sicht, Simulieren können von exponentiellen Vorgängen

1.5 Lernzielkontrolle

Den Aufgabenblatt liegt ein Lösungsblatt bei, in dem die Ergebnisse und Rechengänge der Aufgaben angeschrieben sind. Die Ergebnisse der händisch gerechneten Aufgaben lassen sich mit dem GeoGebra CAS durch die Schüler/innen selbstständig überprüfen.
Zur durchzuführenden Konstruktion der Schüler/innen ist eine Konstruktionsanleitung und Screen-Shots im Lösungsblatt angegeben. Zu allen gestellten Fragen finden sich die Antworten im Lösungsblatt.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Vor der ersten Einheit ist das Aufgabenblatt (2 Seiten) zu kopieren und dann an die Schüler auszuteilen. Die zu verwendende html-Datei soll den Schüler zugänglich gemacht werden (Schülerfestplatte, etc.). Nach Beendigung der Ausarbeitung der Aufgaben, ist den Schülern das Lösungsblatt auszuhändigen (3 Seiten). Alternativ können auch alle

Dateien über eine Lernplattform zur Verfügung gestellt werden (Lösungsblatt erst später). Eventuell können Würfel und Münzen zur Verfügung gestellt werden bzw. die Schüler über das Mitbringen von Münzen informiert werden.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

In den Aufgaben werden das Zeichenblatt, die Tabellenansicht und die CAS-Ansicht verwendet. In allen drei Bereichen sollten die Lehrenden über Grundkenntnisse verfügen.

Verwendete Befehle

`Befehl`	Erklärung des Befehls (siehe Beispiel unten)
`Vereinfache`	Vereinfacht den ausgewählten Term
`Löse`	Löst eine gegebene Gleichung

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege
	Schneide zwei Objekte
	Neuer Punkt
	Senkrechte Gerade
	Verschiebe Zeichenblatt

3 Didaktischer Hintergrund

Um z.B. Halbwertszeiten vergleichen oder die C-14-Methode anwenden zu können, ist ein nicht zu unterschätzender Rechenaufwand zu treiben, der mit Hilfe des GeoGebra CAS erheblich reduziert werden kann. Immer wieder auftretende Umformungen können so schneller abgewickelt

werden, und dadurch mehr Zeit auf die mathematischen-physikalischen Grundlagen und Interpretationen verwendet werden.
Beim Lösen der Exponentialgleichungen können mit Hilfe des GeoGebra CAS unterschiedliche Lösungsstrategien getestet werden.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Aufgabenvorstellung	Lehrer/in-Schüler/in-Gespräch	-----
Erarbeitungsphase	Bearbeitung der Aufgaben	EA oder PA	Arbeitsblatt
Lernzielkontrolle	Überprüfung der Ergebnisse und der Rechengänge	EA oder PA	Lösungsblatt
Hausübung	Festigung des Erlernten	EA	Schulbuch

4.2 Unterrichtsablauf

Einführung

Der/Die Lehrer/in stellt die Aufgaben vor, nach dem im Unterricht das verlangte mathematische Vorwissen erarbeitet wurde. Alle Angbaen befinden sich auf dem Arbeitsblatt.

Erarbeitungsphase

Die Schüler/innen führen alle am Arbeitsblatt angegeben Aufträge mit Hilfe von GeoGebra CAS durch.

Lernzielkontrolle

Alle Ergebnisse, Rechenschritte und Konstruktionsanleitungen sind im Lösungsblatt ersichtliche. Mit Hilfe dieser Informationen ist es möglich, dass die Schüler/innen in Einzel- oder Partnerarbeit die Richtigkeit ihrer Arbeit überprüfen können.

Hausübung

Durch das Erarbeiten der Aufgaben des Arbeitsblattes sind die Schüler/innen in der Lage alle gängigen Aufgaben im Bereich des Radioaktiven Zerfalles und Exponentialfunktion zu lösen. Zur Festigung und Wiederholung bieten sich Beispiele aus dem jeweiligen Schulbuch an.

5 Anhang

pdf-Datei arbeitsblatt_rad_zerfall.pdf [261 kb]
pdf-Datei arbeitsblatt_rad_zerfall_loes.pdf [380 kb]
html-Datei rad_zerfall.html [5 kb]

allgemeine Informationen

Für das Zerfallsgesetz gilt der Zusammenhang $N(t)=N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$, wobei t die Zeit, $N(t)$ die Anzahl der Kerne zum Zeitpunkt t, N_0 die Anzahl der Kerne zum Zeitpunkt $t=0$ (also zu Beginn des Zerfalls) und λ eine materialabhängige Konstante darstellt. Oft wird vor dem λ ein Minus in der Formel angeschrieben, um darauf hinzuweisen, dass es sich um eine Abnahme handelt. Mit obig angegebener Formel kann jedoch auch ein Wachstum berechnet werden. Das Vorzeichen des Parameters λ gibt an, ob es sich um eine Abnahme oder ein Wachstum handelt (positiv … Wachstum, negativ … Abnahme).

Definition Halbwertszeit
Der Zeitraum, in dem eine (meist exponentiell) abfallende Größe auf die Hälfte ihres Anfangswertes abgesunken ist. Die physikalische Halbwertszeit ist die für jedes Isotop eines radioaktiven Elementes charakteristische Zeitdauer, in der von einer ursprünglichen vorhandenen Anzahl radioaktiver Kerne bzw. instabilen Elementarteilchen die Hälfte zerfallen ist.[1]
Unten stehende Tabelle gibt die Verteilung der alltäglichen Strahlenbelastung eines Menschen an. Etwas mehr als ein Drittel der Strahlenbelastung ist künstlichen Ursprungs, also von Menschen verursacht.

natürliche Strahlenbelastung		
Einatmen von Radon	27,1 Prozent	Radon ist ein radioaktives Edelgas, das in Gestein eingeschlossen ist
kosmische Strahlung	8,0 Prozent	Strahlung vor allem von der Sonne, allerdings auch von Sternen und anderen Galaxien
sonstige natürliche Strahlung	22,0 Prozent	z.B.: Zerfall anderer natürlich vorkommender radioaktiver Elemente
künstliche Strahlenbelastung		
medizinische Anwendungen	41,1 Prozent	vor allem Röntgenstrahlung
Folgen des Tschernobylunfalls	0,6 Prozent	Explosion des Kernkraftwerkes Tschernobyl in der heutigen Ukraine im Jahre 1986
Kernkraftwerke (Normalbetrieb)	0,3 Prozent	trotz Abschirmung setzten Atomkraftwerke kleine Dosen an Strahlung frei
Atombombenversuche	0,3 Prozent	vor allem die Versuche der USA (Arizona), Frankreichs (Bikiniatoll) und der ehemaligen UdSSR (Sibirien)
sonstige künstliche Strahlung	0,6 Prozent	z.B.: Strahlung von lumineszierenden Ziffern auf alten Analoguhren

[1] Der Brockhaus in fünf Bänden, Band 2

Aufgaben

1 Nimm die zur Verfügung gestellte Datei *rad_zerfall_0.1.html* und variiere die Werte für N_0 und λ mit Hilfe der Schieberegler! Wovon hängt die Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffes ab? Welcher Wert ist für die Halbwertszeit nicht maßgebend?

2 Wie viele Kerne sind nach 2 Halbwertszeiten noch übrig? Nach wie vielen Halbwertszeiten sind nur mehr 0,1953125 Prozent des Ausgangsmaterials übrig?

3 Jod-131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Berechne den Parameter λ (Basiszeiteinheit 1 Tag und 1 Jahr) in der Zerfallsgleichung auf 4 Nachkommastellen! Überprüfe Dein Ergebnis mittels dem **GeoGebra**-CAS.

4 Von Kobalt-60 ist nach 3,88 Jahren 40% des Ausgangsmaterials zerfallen. Wie groß ist die Halbwertszeit dieses Isotops? Überprüfe Dein Ergebnis mittels dem **GeoGebra**-CAS.

5 Von 24000 Cäsium-137-Kernen sind nach einer bestimmten Zeit t 21771 Kerne zerfallen. Die Halbwertszeit des Isotops beträgt 2,1 Jahre. Berechne t! Überprüfe Deine Rechnung mittels einer geometrischen Konstruktion. Zu diesem Zweck ist die x-Koordinate (die Zeit) jenes Punktes zu bestimmen, an dem nur mehr die übrig geblieben Kerne vorhanden sind. Alle notwendigen Aktionen innerhalb des **GeoGebra**-Zeichenblattes der html-Datei sind in der Werkzeugleiste angegeben.

6 Warum ist es bei diesen Zerfallsbeispielen nicht sinnvoll die jeweiligen negativen Achsen anzeigen zu lassen? Was spricht physikalisch dagegen? Was ist eigentlich von der Aussage, „Es sind noch 17,4 Kerne übrig.“, zu halten? Ist das eine physikalisch sinnvolle Antwort?

7 Simuliere den radioaktiven Zerfall mittels von Münzwürfen oder mit Hilfe von Würfeln. Je mehr Münzen oder Würfel verwendet werden, desto aussagekräftiger ist das Ergebnis, da beim radioaktiven Zerfall meistens sehr viele Teilchen betrachtet werden. Am einfachsten ist es, alle Versuche innerhalb der Klasse zusammen zu zählen.

Wurfversuch	Münzen mit Zahl
0	104
1	49
2	23
3	10
4	6

Zähl alle Münzen und wirf sie in die Luft. Alle Münzen die *Zahl* zeigen verwendest Du weiter, alle die *Kopf* zeigen, legst Du beiseite. Dann wiederholst Du diese Prozedur so lange, bis keine Münze mehr *Zahl* zeigt. Trage Deine Ergebnisse in eine **GeoGebra**-Tabelle ein (ein Beispiel siehst Du rechts, wichtig ist die erste Zeile – zum Zeitpunkt 0 alle Münzen, die Du verwendest) und erzeuge eine Liste von Punkten, die Du mit Strecken verbindest.
Zeichne danach die Funktion $f(x)=a\cdot e^{-0{,}693147181\cdot x}$ in dasselbe Zeichenblatt ein, wobei a für die Gesamtzahl aller verwendeten Münzen steht. Fällt Dir etwas auf? Die Aufgabe lässt sich auch mit Würfeln durchführen. Würfle mit allen Würfeln. Jene Würfel die eine Augenzahl von *6* anzeigen legst Du beiseite, die anderen verwendest Du weiter, bis kein Würfel mehr eine *6* zeigt. Allerdings ist hier die Funktion $f(x)=a\cdot e^{-0{,}182321557\cdot x}$ zu verwenden. Warum?

Lösungen

1 Die Halbwertszeit ist nicht von der Anzahl der Ausgangskerne abhängig, sondern allein von der Materialkonstante λ .

2 Nach 2 Halbwertszeiten sind noch 25 Prozent des Ausgangsmaterial übrig.

$$\frac{100}{2^n}=0{,}1953125$$
$$\frac{100}{0{,}1953125}=2^n$$
$$512=2^n$$
$$n=\frac{\ln 512}{\ln 2}=9$$

Nach 9 Halbwertszeiten sind noch 0,1953125 Prozent des Ausgangsmaterials vorhanden.

3

$$N(t)=N_0\cdot e^{\lambda\cdot t}$$
$$0{,}5\cdot N_0=N_0\cdot e^{\lambda\cdot t}$$
$$0{,}5=e^{\lambda\cdot t}$$
$$\ln 0{,}5=8\cdot\lambda$$
$$\lambda=\frac{\ln 0{,}5}{8}=-0{,}08664\,\mathrm{d}^{-1}$$

(in Tagen)

$$N(t)=N_0\cdot e^{\lambda\cdot t},\quad 8\,\mathrm{d}=0{,}02192\,\mathrm{a}$$
$$0{,}5\cdot N_0=N_0\cdot e^{\lambda\cdot 0{,}02192}$$
$$0{,}5=e^{\lambda\cdot 0{,}02192}$$
$$\ln 0{,}5=\lambda\cdot 0{,}02192$$
$$\lambda=\frac{\ln 0{,}5}{0{,}02192}=-31{,}662\,\mathrm{a}^{-1}$$

(in Jahren)

4 Wenn 40% des Ausgangsmaterials zerfallen ist, sind noch 60% von diesem Material vorhanden.

$$0{,}6\cdot N_0=N_0\cdot e^{\lambda\cdot 3{,}88}$$
$$0{,}6=e^{\lambda\cdot 3{,}88}$$
$$\ln 0{,}6=\lambda\cdot 3{,}88$$
$$\lambda=\frac{\ln 0{,}6}{3{,}88}=-0{,}13166\,\mathrm{a}^{-1}$$

Berechnung der Halbwertszeit:

$$0{,}5\cdot N_0=N_0\cdot e^{-0{,}13166\cdot t}$$
$$0{,}5=e^{-0{,}13166\cdot t}$$
$$\ln 0{,}5=-0{,}13166\cdot t$$
$$t=\frac{\ln 0{,}5}{-0{,}13166}=5{,}265\,\mathrm{a}$$

5 Wenn von 24000 Kernen 21771 zerfallen sind, bleiben noch 2229 über.

$$0{,}5\cdot N_0=N_0\cdot e^{\lambda\cdot 2{,}1}$$
$$0{,}5=e^{\lambda\cdot 2{,}1}$$
$$\ln 0{,}5=2{,}1\cdot\lambda$$
$$\lambda=\frac{\ln 0{,}5}{2{,}1}=-0{,}33007\,\mathrm{a}^{-1}$$

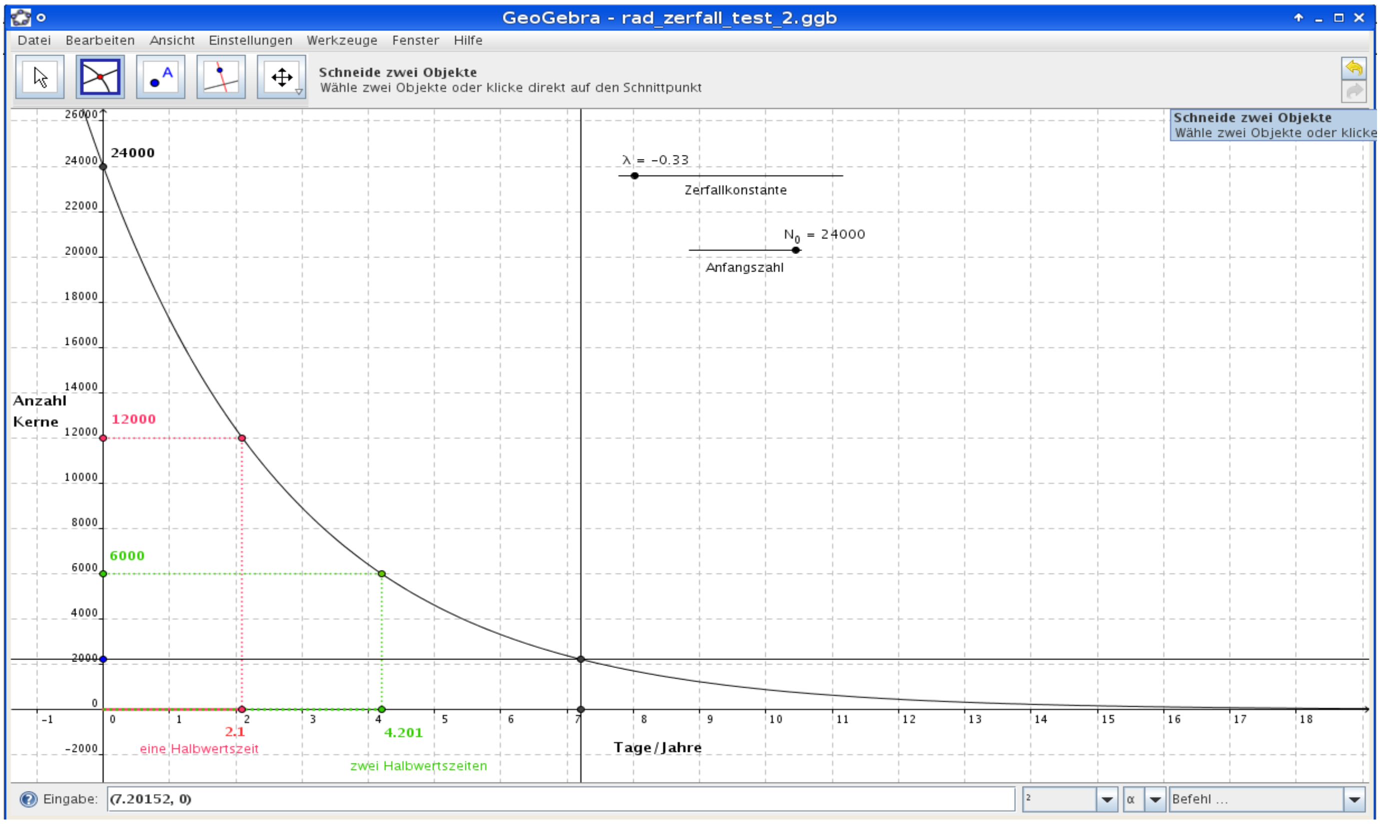
$\rightarrow$

$$2229=24000\cdot e^{-0{,}33007\cdot t}$$
$$0{,}092875=e^{-0{,}33007\cdot t}$$
$$\ln 0{,}092875=-0{,}33007\cdot t$$
$$t=7{,}2\,\mathrm{a}$$

Konstruktionsanleitung:

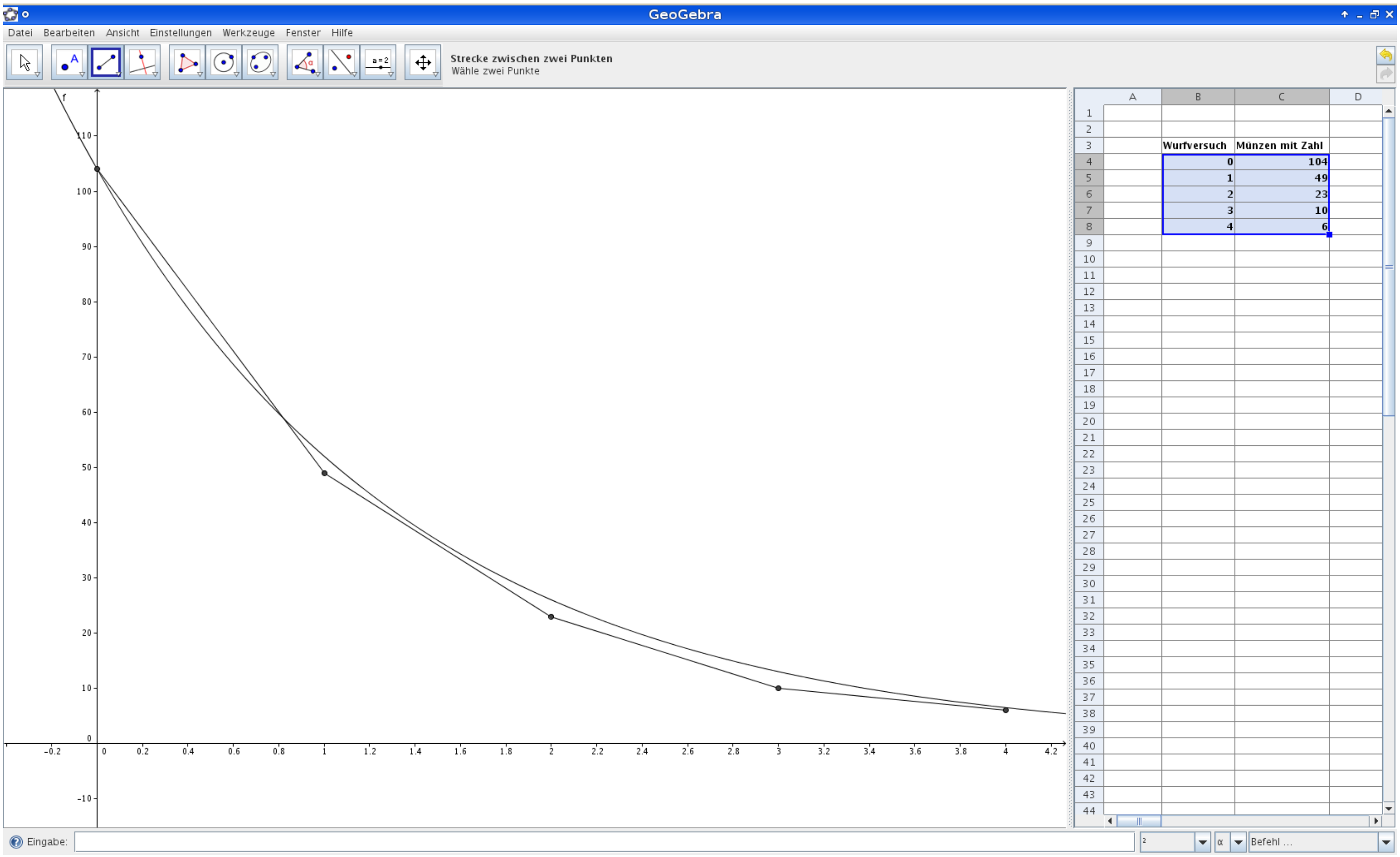
1 … Eingabe $P(0|2229)$
2 … Normale auf die y-Achse durch den Punkt P
3 … Schneiden der Normale mit der Funktion
4 … Normale auf die x-Achse durch den Schnittpunkt
5 … Normale mit der x-Achse schneiden
6 … Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse in die Eingabezeile kopieren

Graphik zur Konstruktion:



6 Negative Achsen sind beim radioaktiven Zerfall nicht sinnvoll, da weder eine negative Zeit, noch eine negative Teilchenanzahl existiert. Aussagen wie 17,4 Kerne sind ebenfalls nicht sinnvoll, da für Kerne nur natürliche Zahlen erlaubt sind. Bei Betrachtungen von radioaktiven Kernen geht man immer von einer sehr großen Anzahl aus. Bei diesen riesigen Zahlen ist das mathematische Modell mittels der Exponentialfunktion zielführend. Bei sehr geringen Anzahlen von zerfallenden Kernen ist das Modell nicht mehr anwendbar.

7 Beim Münzwurf gibt es eine *Halbwertszeit* von **einem** Wurf, beim Würfel sind es ungefähr **vier** Würfe, also kann man einen exponentiellen Abfall auf diese Weise simulieren. Der erzeugte Graph sieht einer Exponentialfunktion ähnlich. Ein Graph könnte so aussehen:



Die Gleichung für den Münzwurf erhält man über $f(x)=a\cdot e^{(\ln(1/2))}=a\cdot e^{-0{,}693147181}$, für das Würfelbeispiel aus $f(x)=a\cdot e^{(\ln(5/6))}=a\cdot e^{-0{,}182321557}$.

Rekursive Folgen

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 07. März 2010

1 Überblick

Zusammenfassung

Innerhalb von zwei Unterrichtseinheiten sollen die Schüler/innen vier Arbeitsblätter mit GeoGebra erstellen, die das Verhalten von rekursiven Folgen visualisieren und das Verhalten von rekursiven Folgen hinsichtlich Konvergenz untersuchen.

Kurzinformation

Schulstufe	10. Schulstufe
Geschätzte Dauer	2 Unterrichtseinheiten
Verwendete Materialien	siehe Anhang: Arbeitsanleitung 1-4, Aufgabenstellung, Lösungen, Datei CobWeb.ggb
Technische Voraussetzungen	GeoGebraCAS, Java
Schlagwörter Mathematik	Folgen, Iteration, Grenzwert
Schlagwörter GeoGebraCAS	Iteration
Autor/in	Josef Lechner
Download von Zusatzmaterialien	

Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Begriff der Folge • Folgen in Termdarstellung • Grenzwert einer Folge
Technisches Vorwissen	• Grundlegende Fertigkeiten in der Benutzung von GeoGebra

Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Begriff der rekursive Folge. Schrittweise Auswertung einer rekursiven Folge	Schüler/innen sollen den Begriff einer rekursiv definierten Folge im Geogebra-CAS erarbeiten indem sie schrittweise eine Iterationsgleichung ausführen.
Explizites Darstellen von rekursiven Folgen. Auswertung mit Tabellenkalkulation	Der Prozess der Iteration soll in die Geogebra-TK übertragen. Schüler/innen sollen rekursive Zahlenfolgen (analog zu Funktionen) als n-a_n-Diagramm darstellen können.
Darstellen von rekursiven Folgen als Spinnwebdiagramm	Schüler/innen sollen rekursive Zahlenfolgen in einem a_n-a_{n+1}-Diagramm darstellen können.
Untersuchen von rekursiven Folgen auf Konvergenz	Schüler/innen sollen erkennen, ob sich die Folgenglieder einer rekursiven Folge einem Grenzwert nähern.

Lernzielkontrolle

Eine Möglichkeit zu überprüfen, ob die Lernenden die Lernziele erreicht haben, ist die Abgabe und die Überprüfung der ausgefüllten Aufgabenstellungen.

Weiters kann in der nächsten Unterrichtseinheit eine schriftliche **Lernzielkontrolle** (siehe Anhang) erfolgen.

2 Vorbereitung der Lehrenden

Vorbereitung des Unterrichts

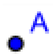
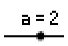
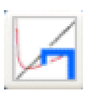
Vor Beginn der beiden Unterrichtseinheiten müssen die Arbeitsanleitung und die Aufgabenstellung (siehe Anhang) für jede/n Schüler/in kopiert werden.

Verwendung des GeoGebraCAS

Lehrende sollten folgende Befehle und Funktionalitäten von GeoGebra beherrschen:

GeoGebra	**GeoGebraCAS**
Eigenschaften von Objekten wie Farbe, Größe,... ändern	Definitionen von Funktionen
Mit Tabellenkalkulation arbeiten, kopieren in Tabellenkalkulation	Dynamischer Bezug mittels $
Listen erstellen aus Tabellenkalkul.	Lösen von Gleichungen
Schieberegler erstellen	
Ansichten verändern, Zoomen	

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege
	Neuer Punkt
	Schieberegler
ABC	Text einfügen
	Stufe (CobWebStep.ggt)

3 Didaktischer Hintergrund

Schüler/innen sollen einen intuitiven Zugang zum Begriff der rekursiven Folge bekommen. Durch das schrittweise (in der CAS-View), das automatisierte Auswerten (durch den Befehl Iterationliste) sowie durch die Verwendung der Tabellenkalkulation sollen mehrere Zugänge zum Thema rekursive Folgen erarbeitet werden. Weiters sollen die Schülerinnen und Schüler zwei wichtige Darstellungsformen für rekursive Folgen kennenlernen: die Darstellung im n-a_n-Diagramm und die Darstellung im a_n-a_{n+1}-Diagramm (Spinnwebdiagramm).

Durch das Erstellen und Arbeiten mit derartigen Darstellungen erhalten die Schülerinnen und Schüler eine Experimentierumgebung, mit der sie den Einfluss des Startwertes auf den Verlauf der rekursiven Folge und v.a. die Frage, ob diese konvergiert oder divergiert, untersuchen können. Oft ist bei rekursiven Folgen die Konvergenz davon abhängig, in welchem Bereich die Startwerte liegen. Auch derartige Untersuchungen lassen sich durchführen.
Durch die Verwendung eines CAS ist es für Schüler/innen möglich, in kurzer Zeit eine relativ große Anzahl von Folgen zu untersuchen. Dabei können im Vergleich zu einer händischen Bearbeitung auch solche Folgen betrachtet werden, bei denen nach dem Berechnen der ersten paar Folgenglieder der weitere Verlauf noch nicht genau eingeschätzt werden kann.
Die Zusammenarbeit in Form einer Partnerarbeit unterstützt dabei das „Sprechen über mathematische Inhalte“.

4 Einsatz im Unterricht

Verlaufsplan

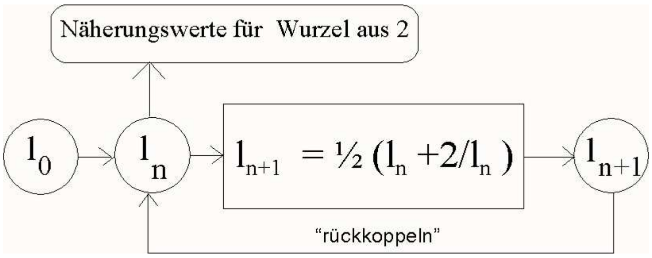
Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Aufgabenstellung durch den Lehrer/die Lehrerin	Lehrervortrag	

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Erarbeitungsphase	(1) Schrittweises Auswerten einer rekursiven Folge. Erarbeiten einer analogen Folge (2) Gruppe A: Erstellen das Arbeitsblattes2 Gruppe B: Erstellen des Arbeitsblattes 3 Zusammenfassung und Kurzpräsenstation der Ergebnisse (3) Erarbeitung der Besonderheiten bei der Konvergenz von rekursiven Folgen	Einzelarbeit Partnerarbeit Einzelarbeit Lehrervortrag Einzelarbeit	Arbeitsanleitung 1 (siehe Anhang) Arbeitsanleitung 2 (siehe Anhang) Arbeitsanleitung 3 (siehe Anhang) Arbeitsanleitung 4 (siehe Anhang)
Zusammenfassung	Vergleich und Diskussion der Ergebnisse		Lösung (siehe Anhang)
Lernzielkontrolle	Kontrolle der ausgefüllten Aufgabenstellungen Schriftliche Lernzielkontrolle	Lehrer/in Einzelarbeit	Lernzielkontrolle (siehe Anhang)
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Vorschläge zur Differenzierung siehe unten	Einzel- oder Partnerarbeit	
Hausübung	Vorschläge zur HÜ siehe unten	Einzelarbeit	

Unterrichtsablauf

Einführung

Der/Die Lehrende erklärt die Aufgabenstellung. Dazu wird insbesondere die Idee der Iteration am Beispiel des Heron'schen Verfahrens präsentiert. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass jede rekursive Folge über eine Iteration ausgewertet wird. D.h. das Ergebnis eines Schrittes ist wieder der Startwert für den nächsten Schritt (die Iteration ist damit eine „zyklische Maschine" , Abb.) .



(1) Das nächste Folgenglied wird nach der Vorschrift Next(l) := ½(l+2/l) berechnet.

(2) Das Ergebnis dieser Berechnung wird wieder als Argument in Next(l) eingesetzt und damit ein neues Next(l) berechnet usf.

Erarbeitungsphase

1. Unterrichtseinheit:

Die Klasse wertet schrittweise nach der **Arbeitsanleitung 1** (auf Papier, siehe Anhang) die Heron'sche Folge für Wurzel 2 aus. Wenn dies geklappt hat, überlegen sich die Schüler/innen in Partnerarbeit, wie die entsprechenden rekursiven Folgen für Wurzel 3, 5 oder 7 aussehen (Zusatzaufgabe 1) und ermitteln anschließend wieder die entsprechenden Näherungswerte.

2. Unterrichtseinheit:

Eine Hälfte der Klasse (Gruppe A) erstellt in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 2** (auf Papier, siehe Anhang) das **Arbeitsblatt 2 „Rekursive Folge mit Tabellenkalkulation".**

Die andere Hälfte der Klasse (Gruppe B) erstellt in Einzelarbeit am PC nach der schriftlichen **Arbeitsanleitung 3** (auf Papier, siehe Anhang) das **Arbeitsblatt 3 „Rekursive Folge mit graphischer Auswertung“.**

Eventuell können beide Gruppen (sofern Zeit bleibt) auch beide Darstellungsformen ausführen.

Jeweils ein Sprecher/Sprecherin stellt das Ergebnis der gesamten Klasse vor.

3. Unterrichtseinheit:

Nun soll unter Anleitung des Lehrers/der Lehrerin überlegt werden, wie der Grenzwert einer rekursiven Folge bestimmt werden kann. Wenn das Verfahren bekannt ist, kann mit Hilfe des CAS die entsprechende Gleichung gelöst werden (die Lösung führr zum Fixpunkt – Schnittpunkt zwischen der Iterationsfunktion Next(x) und der 1. Mediane). Auch dies kann noch gezeigt werden.

Die detaillierten Arbeitsaufträge sind im Anhang unter **Aufgabenstellung** angegeben.

Zusammenfassung

Innerhalb von zwei Unterrichtseinheiten sollen die Schüler/innen vier Arbeitsblätter mit GeoGebra erstellen, die das Verhalten von rekursiven Folgen visualisieren, und die Eigenschaften von rekursiven Folgen hinsichtlich Konvergenz untersuchen.

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

Vertiefung – Innere Differenzierung

Gute Schüler/innen, die vorzeitig die Aufgaben richtig gelöst haben, können zusätzlich folgende Verbesserungen und Erweiterungen des Arbeitsblattes anbringen.

- Bearbeiten der Zusatzaufgabe 2 (Arbeitsblatt 1).
- Durchführung des Beweises, dass der Grenzwert wirklich existiert.
- Formulieren weiterer Angaben für Folgen, die auf Konvergenz/Divergenz untersucht werden sollen.

MEDIENVIELFALTS-INSTITUT
[MATHEMATIK/INFORMATIK]

Hausübung

Weitere Folgen auf Konvergenz/Divergenz entsprechend der Aufgabenstellung aus der 2. Unterrichtseinheit untersuchen:

Aufgabe 3, 5 und 7 aus dem Anhang „Aufgabenstellung zu rekursiven Folgen".

5 Anhang

Folgende Materialien stehen für die Schüler/innen bzw. Lehrer/innen zur Verfügung.

1) **Arbeitsanleitung 1** zum Erstellen eines Arbeitsblatts (GeoGebraCAS) „Schrittweises Ausführen einer Iteration"

2) **Arbeitsanleitung 2** zum Erstellen eines Arbeitsblatts (GeoGebraTK, Geogebra-Zeichenblatt) „Rekursive Folge mit Tabellenkalkulation"

3) **Arbeitsanleitung 3** zum Erstellen eines Arbeitsblatts (GeoGebraZeichenblatt) „Rekursive Folge mit graphischer Auswertung"

4) **Arbeitsanleitung 4** zum Erstellen eines Arbeitsblatts (GeoGebraCAS) „Konvergenz einer rekursive Folge"

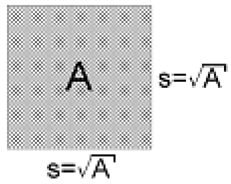
3) **Aufgabenstellung** zu „Rekursive Folgen"

4) **Lösungen** zu „Rekursive Folgen"

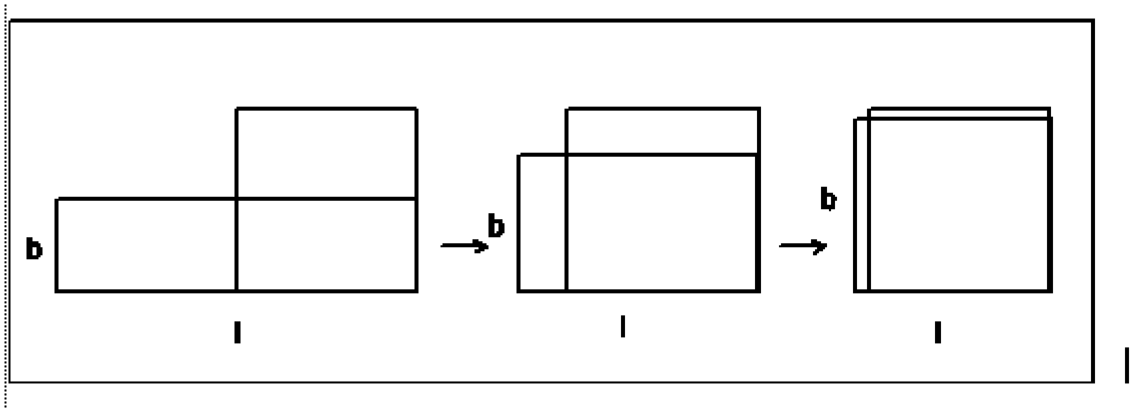
5) **Lernzielkontrolle**

Arbeitsanleitung 1 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Schrittweises Ausführen der Iteration“

Wir wollen die Wurzel aus A bestimmen. Dazu machen wir ein Rechteck mit Flächeninhalt A einem Quadrat immer ähnlicher:



Wir wählen dazu für das erste Rechteck eine beliebige Seitenlänge l_0. Die zugehörige Breite ergibt sich dann zu $b_0 = \frac{A}{l_0}$. Mit Hilfe des arithmetischen Mittels aus Länge Breite erhalten wir für das nächste Rechteck ein neues $l_1 = \frac{1}{2}(l_0 + \frac{A}{l_0})$.



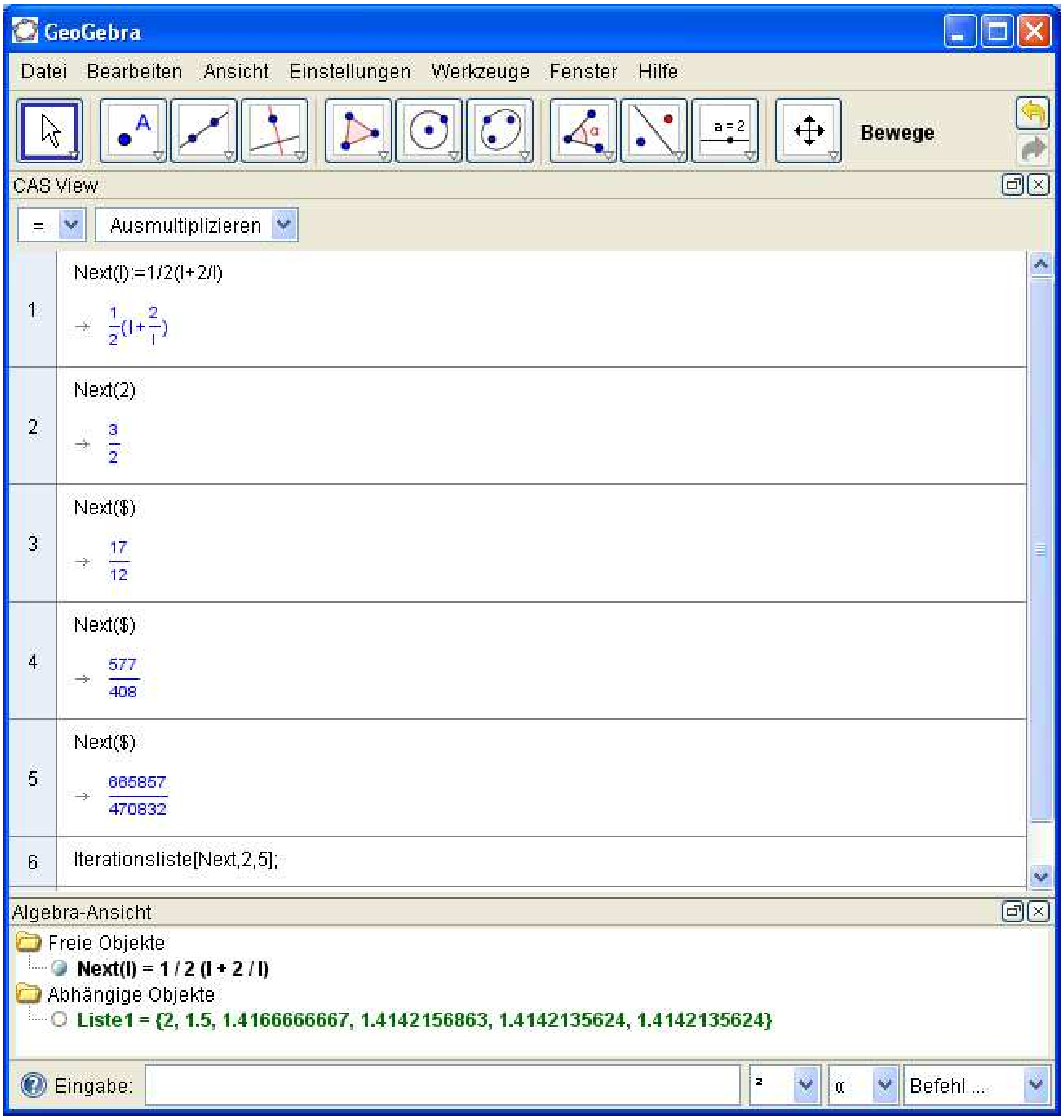
Um mit diesem – so genannten Heron’schen Verfahren (auch bekannt unter Babylonischem Wurzelziehen) – die Wurzel aus 2 berechnen zu können müssen wir also A = 2 setzen und mit einem geeigneten Startwert beginnen.

Führe nun dieses Verfahren zur Bestimmung von Wurzeln mit GeogebraCAS aus:

- Definiere die Folge Next(l) mit Next(l) := ½(l+2/l)
- Führe schrittweise die Iteration aus indem du Next(2) und anschließend stets Next($) berechnest. Du erhältst immer bessere Näherungswerte für Wurzel aus 2.
- Du kannst die Iteration auch auf einmal ausführen, wenn du den Befehl Iterationsliste[Next,2,5]; verwendest. Dabei werden mit der Iterationsvorschrift Next(l) mit 2 als Startwert 5 Iterationsschritte berechnet.
  Hinweis: Das (numerische) Ergebnis erhältst du als Liste im

Algebrafenster. Stelle dazu im Menüpunkt „Runden“ die Anzahl der Nachkommastellen entsprechend hoch ein!

Dein CAS-Fenster (bzw. Algebra-Fenster) sollte ungefähr das folgende Aussehen haben.



Zusatz-Aufgaben:

A1: Berechne mit dem Heron'schen Verfahren nun auch die ersten fünf Näherungswerte für

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$ und
c) $\sqrt{7}$!

A2: Berechne mit dem Heron'schen Verfahren die ersten fünf Näherungwerte für $\sqrt{10}$.

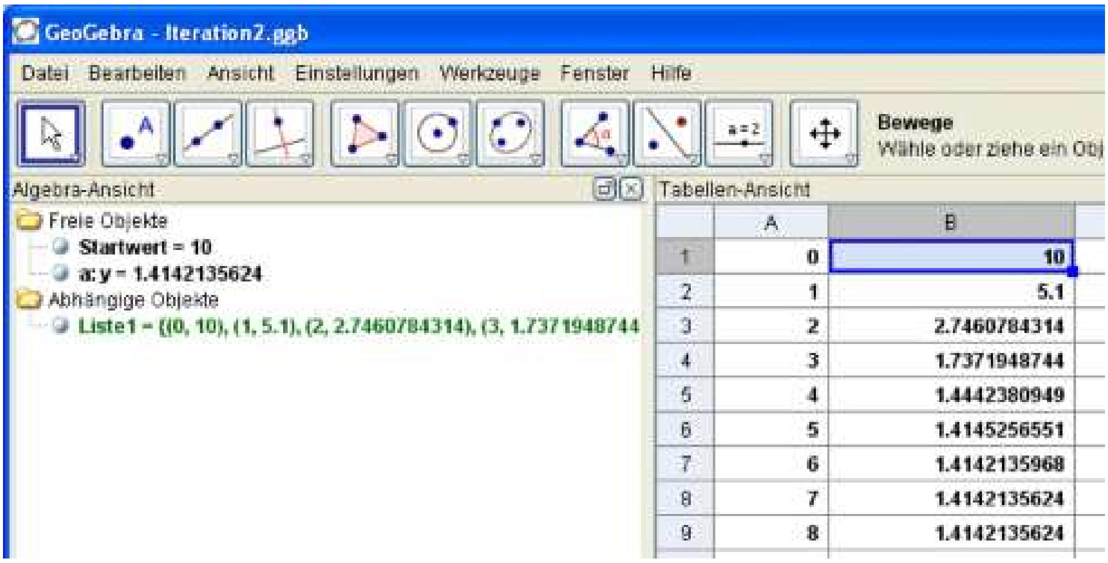
a) Schreibe die Iterationsvorschrift an!
b) Führe das Verfahren mit zwei verschiedenen selbstgewählten Startwerten aus! Was lässt sich über den Einfluss der Startwerte sagen?

Arbeitsanleitung 2 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Rekursive Folge mit der Tabellenkalkulation“

- Definiere einen Startwert für deine Iteration z. B. Startwert:=10
- Erstelle in der Tabellen-Ansicht die Startzeile. Trage dazu in A1 den Wert 0 und in B1 die zuvor definierte Variable „Startwert“ ein.
- Erstelle nun die zweite Zeile so, dass sie sich für das anschließende Kopieren eignet: Trage dazu in A2 ein „= A1+1“ und in B2 den Iterationsterm „=1/2*(B1+2/B1)“.
- Markiere nun die zweite Zeile und kopiere ca. 10 Zeilen nach unten.

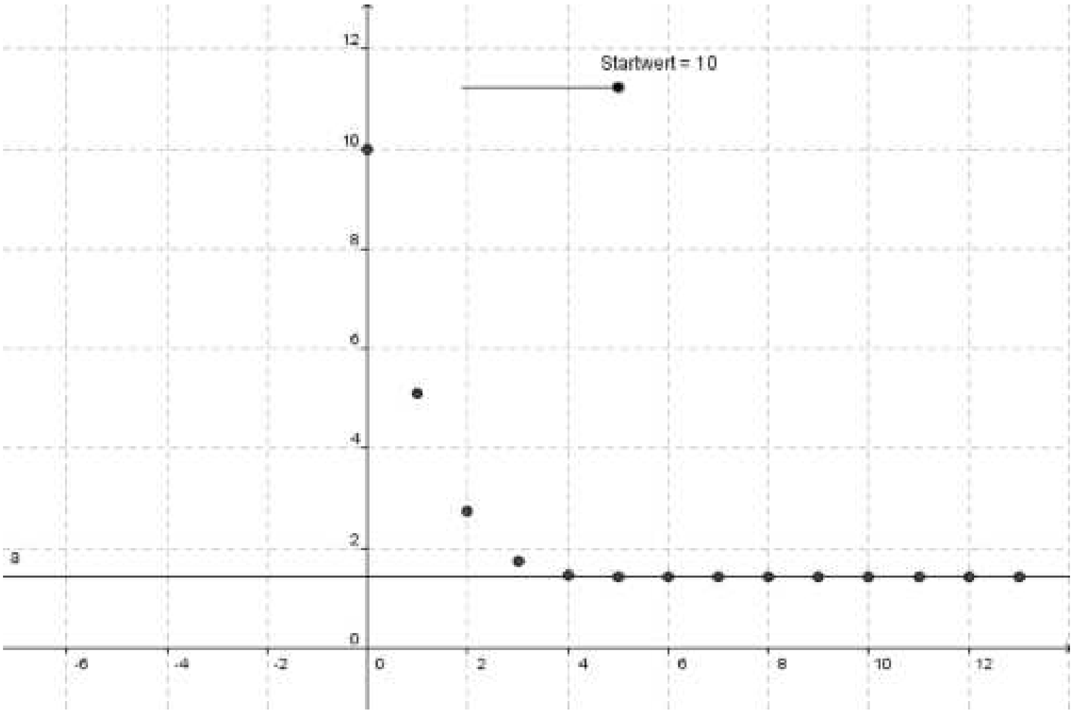
Du siehst, dass das Verfahren sehr schnell gegen Wurzel aus 2 konvergiert.

Das Geometrie-Fenster sollte ungefähr das folgende Aussehen haben.



Nun kannst du auch sehr schnell eine graphische zweidimensionale Darstellung (n-a_n-Diagramm) der rekursiven Folge erhalten .

- Markiere dazu den Bereich mit deinen Werte (Spalte A und B) und wähle aus dem Kontextmenü (rechte Maustaste) „Liste von Punkten erzeugen“ aus.
- Wenn du nun das Zeichenfenster einblendest, siehst du die gewünschte zweidimensionale Darstellung der Folge.
- Wenn du den Startwert sichtbar schaltest, kannst du über den Schieberegler den Einfluss des Startwertes auf die Geschwindigkeit der Konvergenz untersuchen.

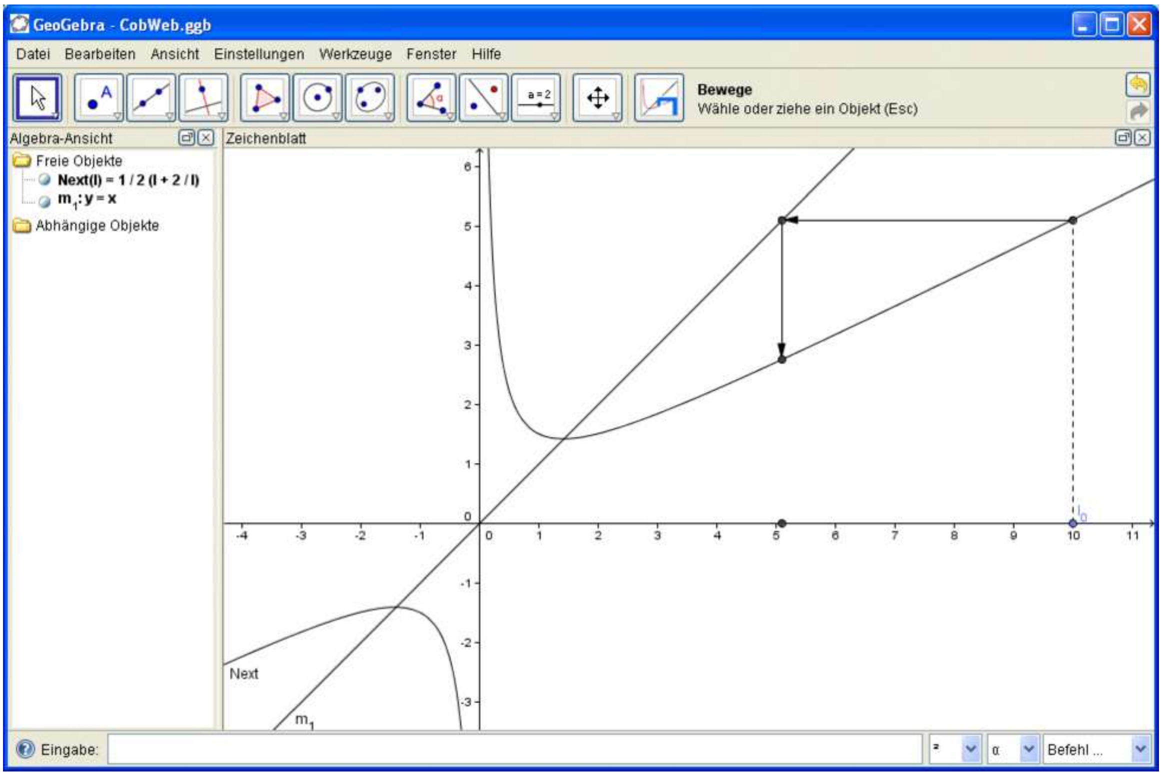


<u>Hinweis</u>: Achte bei allen Folgen auf die richtige Größe des angezeigten Koordinatensystems.
Zoomen kannst du mit dem Scrollrad oder mit dem Werkzeug *Verschiebe Zeichenblatt*. Die Skalierung der einzelnen Achsen kannst du durch Ziehen der Achsen mit *Strg - linke Maustaste* verändern.

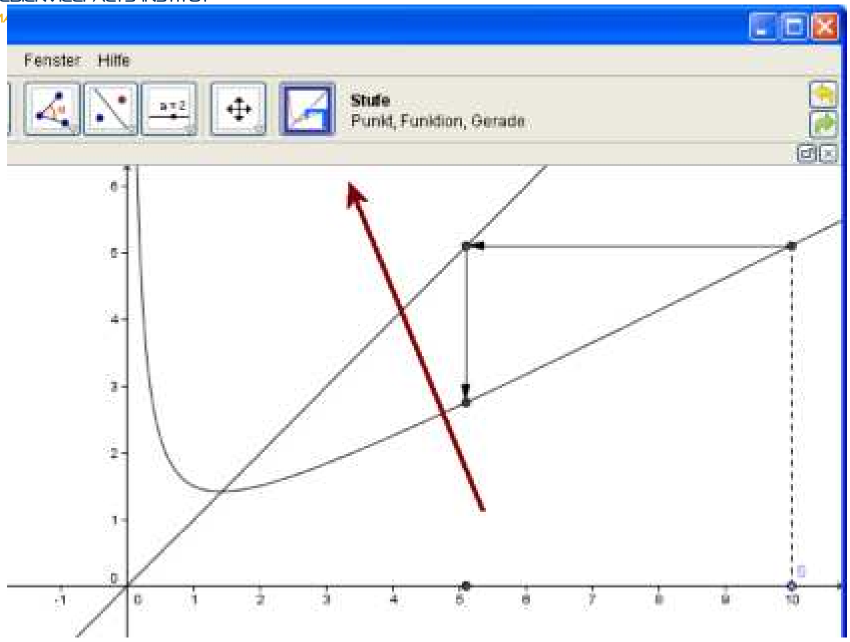
Arbeitsanleitung 3 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Rekursive Folge mit graphischer Auswertung (Spinnwebdiagramm)"

Nun soll eine neue Darstellungsform für rekursive Folgen erarbeitet werden. Diese Darstellungsform wird meist Spinnweb- (oder CobWeb) Diagramm genannt. Die Idee dahinter besteht in der graphischen Auswertung des Iterationsterms Next(l). Dieser Iterationsterm wird dabei als Funktion aufgefasst. Wird der Startwert l_0 eingesetzt, so erhält man den Wert l_1, wenn man an der Stelle l_0 die Ordinate ermittelt. Mit Hilfe der 1. Mediane (y=x) kann man sich dann geometrisch die Position von l_1 ermitteln.

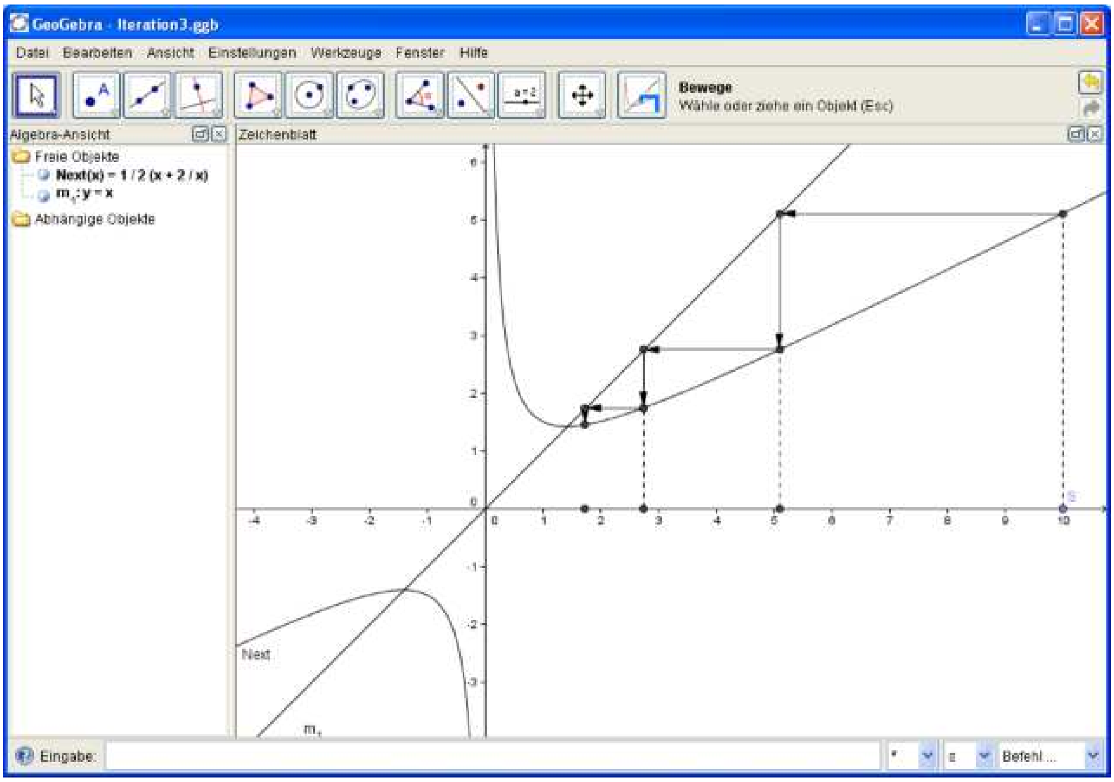
- Lade die Datei CobWeb.ggb. Diese besitzt einen zusätzlichen Button (ganz rechts) mit einer Stufe als Symbol.
- Experimentiere mit dem Startwert und überlege, wie graphisch die Position des nächsten Folgenwertes ermittelt wir.



Nun wollen wir mit dem Werkzeug „Stufe" schrittweise eine graphische Iteration ausführen. Das Werkzeug verlangt die Angabe eines Ausgangspunktes (= letzter Folgenwert), einer Funktion (= Iterationsfunktion) und einer Geraden (= 1. Mediane).



- Führe nun schrittweise die Iteration graphisch mit Hilfe des Werkzeugs „Stufe“ aus. Du erhältst eine Treppe der folgende Form.
- Experimentiere nun mit dem Startwert l_0. Bei welchen Startwerten läuft die Iteration gegen den Fixpunkt F($\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$)?
  Wohin kann sie sonst noch laufen?



Arbeitsanleitung 4 zum Erstellen eines Arbeitsblatts „Konvergenz einer rekursive Folge“

Wir erhalten aus dem Spinnwebdiagramm Hinweise, ob die rekursive Folge bei bestimmten Startwerten konvergiert.

Ob sie das wirklich tut muss man (streng genommen) genau zeigen, z.B. mit dem Satz von der monotonen Konvergenz. Dabei ist zweierlei zu zeigen.

a) Es ist zu zeigen, dass die Folge streng monoton fallend (bzw. steigend) ist.
b) Est ist zu zeigen, dass die Folge nach unten(bzw. nach oben) beschränkt ist.

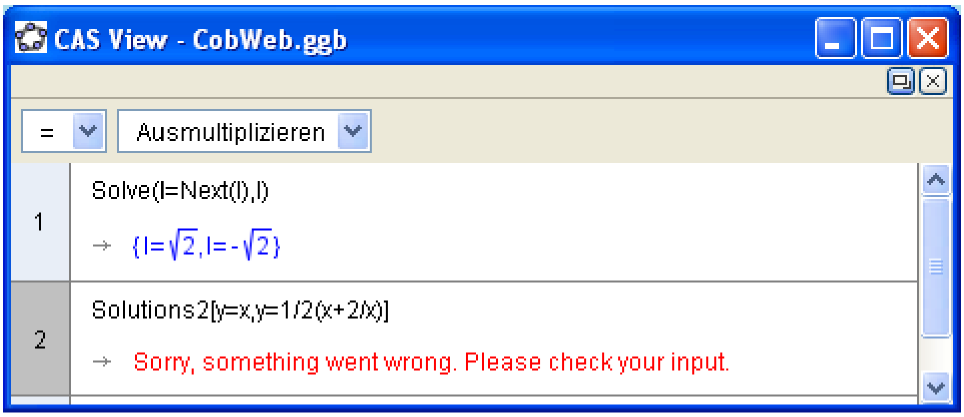
Wenn man sich der Konvergenz sicher ist, wie kann man dann aber den Grenzwert selbst ermitteln?

Nun, wenn es den Grenzwert der Folge (a_n) gibt, so muss gelten:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.
Im Fall der Heron’schen Folge heißt das aber:
$\lim\limits_{n\to\infty} l_n = l$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} l_{n+1} = l$ und damit ergibt sich die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} l_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(l_n + \frac{2}{l_n}) \Rightarrow l = \frac{1}{2}(l + \frac{2}{l})$$

Diese Gleichung können wir nun wieder mittels CAS leicht lösen:
Aufgabe: Ermittle – vorausgesetzt der Grenzwert existiert – den Grenzwert der rekursiven Folge $l_{n+1} = \frac{1}{2}(l_n + \frac{2}{l_n})$

Lösung:



Aufgabenstellung zu „Rekursive Folgen“

Untersuche die in der Liste angegebenen rekursiven Folgen
a) Berechne die ersten 5 Folgenglieder
b) Welche Art von Folge liegt vor (arithmetisch, geometrisch, andere)?
c) Gibt eine Vermutung an, ob die Folge konvergiert oder divergiert. Eventuell: Für welche Startwertbereiche konvergiert die Folge?

Folge	Die ersten fünf Folgenglieder	Typ (arithmetisch, geometrisch, andere)	konvergent/ divergent
(1) $a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 1$			
(2) $a_{n+1} = a_n - 1{,}5$ $a_1 = 2$			
(3) $a_{n+1} = a_n \cdot 1{,}2$ $a_1 = 1$			
(4) $a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}2$ $a_1 = 10$			
(5) $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$ $a_1 = 1$			
(6) $a_{n+1} = 0{,}7 \cdot a_n + 6$ $a_1 = 0$			
(7) $a_{n+1} = a_n \cdot (-0{,}5)^n$ $a_1 = 1$			

Hinweis zu (7): Beispiel 7 ist eine Mischung aus einer rekursiven Folge und einer expliziten Folge. Hier ist es erforderlich auch für n eine Rekursion mitlaufen zu lassen.
Dies wird durch die beiden Definitionen a:=a*(-0.5)^n und n:=n+1 erreicht, die nach Festlegen der jeweiligen Startwerte a:=1 und n:=1 abwechselnd ausgewertet werden.

Lösungen zu „Grenzwert einer Folge"

(noch offen)

Lernzielkontrolle

Gegeben ist die rekursive Folge

$a_{n+1} = -0.5 \cdot a_n + 8$ mit $a_1 = 0$

a) Ermittle schrittweise die ersten fünf Folgenglieder der rekursiven Folge.
b) Gib (mit Hilfe der Tabellenkalkulation) eine graphische Darstellung des Verlaufes der Folge an! (n-a_n-Diagramm)
c) Gib eine Darstellung im a_n-a_{n+1}-Diagramm an!
d) Formuliere eine Vermutung für den Grenzwert der Folge!
e) Berechne den Grenzwert – sofern dieser existiert!

(f) Beweise, dass der Grenzwert existiert. D.h. zeige, dass die Folge streng monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

Einführung und Bestimmung des Wendepunkts

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 19. April 2010

1.1 Zusammenfassung

Anhand einer konkreten Aufgabe wird der Begriff Wendepunkt einer Funktion eingeführt. Weiters werden Geschwindigkeit und Beschleunigung verwendet.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	7
Geschätzte Dauer	1-2 Stunden
Verwendete Materialien	
Technische Voraussetzungen	CAS System
Schlagwörter Mathematik	Höhere Ableitung, Geschwindigkeit, Wendepunkt
Schlagwörter GeoGebraCAS	
Autor/in	Mag. Günter Schödl
Download von Zusatzmaterialien	

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Bilden von Ableitungen, Momentangeschwindigkeit • Lösen von linearen Gleichungssystemen
Technisches Vorwissen	• Umgang mit einem CAS

1.4 Lehrinhalte und Lernziele

Lehrinhalte	**Lernziele**
Krümmung	Das Krümmungsverhalten einer Kurve erkennen und beurteilen
2. Ableitung, Wendepunkt	Die Bedeutung der 2. Ableitung erkennen. Den Wendepunkt einer Kurve ermitteln können
Mommentangeschwindigkeit	Die Momentangeschwindigkeit berechnen können

1.5 Lernzielkontrolle

Lösung von Kontrollaufgaben.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

PC und CAS, sonst sind keine Materialien erforderlich.

2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Ableitungen bilden
Gleichungen lösen – auch näherungsweise
Gleichungssysteme lösen

Verwendete Befehle

`Solve`	Lösen einer Gleichung, Ausgabe x=, y=,…
`Solutions`	Lösen einer Gleichung, Ausgabe der Lösungen ohne Bezeichner, erleichtert die Weiterverarbeitung.
`Solve2`	Lösen eines Systems von 2 Gleichungen
`Ableitung`	Ermitteln der 1. Ableitung einer Funktion

3 Didaktischer Hintergrund

Einfaches Lösen von Systemen, schnelles und einfaches Modellieren von Funktionen, einfache Parameteränderung für experimentelles Arbeiten. Schnittstelle zur Grafik.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Problemstellung diskutieren	Gespräch	Ausgangs-beispiel
Erarbeitungsphase	Lösungen erarbeiten	moderierte Gruppenarbeit	
Zusammenfassung	Diskussion der Ergebnisse in ihrer Aufgabenrelevanz	Plenumsdiskussion	Ergebnisse
Lernzielkontrolle	Lösen von Arbeitsaufgaben	Einzelarbeit	Aufgaben
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Finden eigener Problemstellungen	Gruppenarbeit	
Hausübung	Lösen von Arbeitsaufträgen Zusammenfassung in einer Präsentation	Einzel oder Gruppenarbeit	

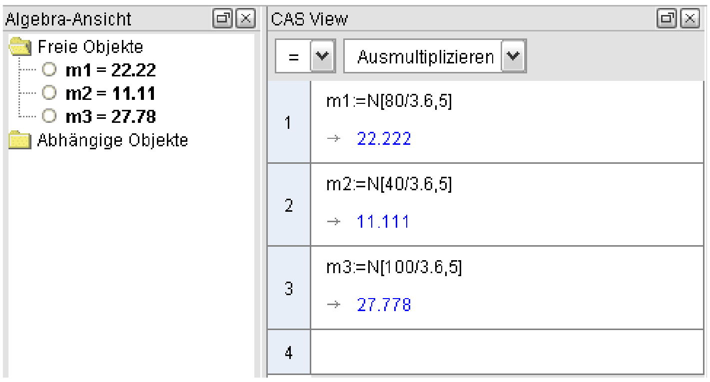
Unterrichtsablauf

Einführung

Problemstellung:
Bei einem Unfall, der vom Lenker eines Kraftfahrzeugs verursacht wird, können auf Grund von zufällig erfolgten Radarmessungen, sowie Zeugenaussagen folgende Beobachtungen verwertet werden: Kurz vor Beginn der Notbremsung werden von einem Radargerät 80 km/h gemessen. Ca. 3 sec später werden von mehreren Zeugen ca. 40 km/h angegeben. Kurz darauf kommt es zur Kollision mit einem Fußgänger, wobei der Lenker des Kraftfahrzeugs sofort wieder beschleunigt, und nach 6 weiteren Sekunden nochmals vom Radargerät mit 100 km/h erfasst wird.
Wie groß war die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt der Kollision?

Erarbeitungsphase

Schritt 1:
Umrechnen der Geschwindigkeit in m/s



Schritt 2:
Aufstellen der Bedingungsgleichungen für die Weg-Zeit Funktion:
Zunächst setzen wir d:=0 wegen f(0)=0 sowie c:=m1 wegen f'(0)=m1 und erhalten dann lineare Gleichungen aus der Geschwindigkeits-funktion:

6	m2=3*a*3^2+2*b*3+c → 11.111 = 27 a + 6 b + 22.222
7	m3=3*a*9^2+2*b*9+c → 27.778 = 243 a + 18 b + 22.222

Schritt 3: Lösen des Systems

8	Solve2[(11.111 = 27 a + 6 b + 22.222),(27.778 = 243 a + 18 b + 22.222),a,b] → $\{\{a=\frac{6300.018}{26244},b=\frac{-2849.985}{972}\}\}$

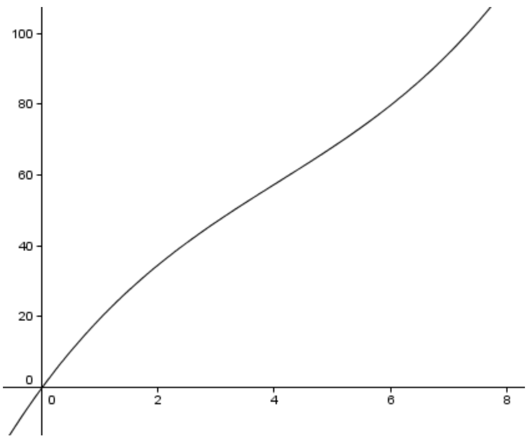
Schritt 4: Definieren der Parameter:
Wir kopieren den Output in die nächsten 2 Zeilen und erstellen dann die Zuordnung

9	a :=N[6300.018 / 26244,5] → 0.24005
10	b := N[(-2849.985) / 972,5] → -2.9321

Schritt 5: Aufstellen der Funktionsgleichung:

11	f(t):=a*t^3+b*t^2+c*t+d → $0.24005t^3-2.9321t^2+22.222t$

Algebra-Ansicht
- Freie Objekte
  - a = 0.24
  - b = -2.93
  - d = 0
  - m1 = 22.22
  - m2 = 11.11
  - m3 = 27.78
- Abhängige Objekte
  - c = 22.22
  - f(t) = 0.24 t³ - 2.93 t² + 22.22 t



Zu Beginn kommt es durch die Bremsung zu einer Abnahme der Geschwindigkeitsänderung (Die Geschwindigkeit nimmt ab!), was sich in einer

Rechtskrümmung = negative Krümmung äußert.
Ab einem gewissen Punkt - der für uns interessant ist- beginnt das Fahrzeug zu beschleunigen, die Änderungen (Geschwindigkeit) nehmen zu, was sich in einer Linkskrümmung = positive Krümmung äußert. Der gesuchte Punkt hat die Eigenschaft, dass sich in diesem Moment die Geschwindigkeit nicht ändert! Die Änderungsrate der Geschwindigkeit = 0. Wir suchen also einen Extremwert von f´(x)

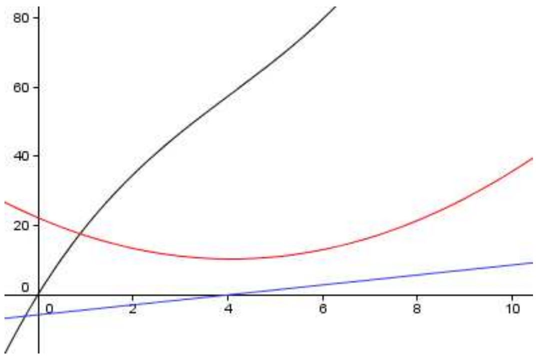
Schritt 6:

Aufstellen der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktion, Eintragen in der Grafik und Ändern der Farbe:

1	f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d → $0.24005x^3 - 2.9321x^2 + 22.222x$
2	Ableitung[f(x)] → $0.72015x^2 - 5.8642x + 22.222$
3	f'(x):=Ableitung[f(x)] → $0.72015x^2 - 5.8642x + 22.222$
4	f''(x):=Ableitung[f'(x)] → $1.44030\,x - 5.8642$

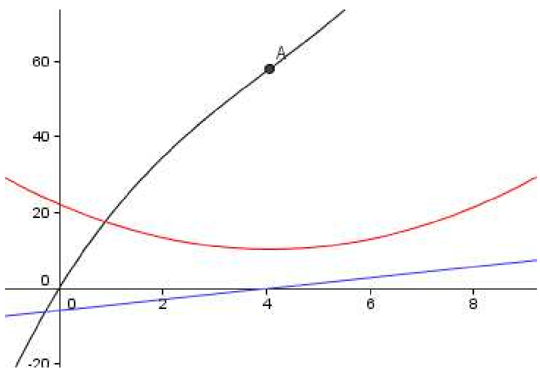
Algebra-Ansicht
Freie Objekte
- a = 0.24
- b = -2.93
- d = 0
- m1 = 22.22
- m2 = 11.11
- m3 = 27.78

Abhängige Objekte
- c = 22.22
- f(x) = 0.24 x³ - 2.93 x² + 22.22 x
- f'(x) = 0.24 * 3 x² - 2.93 * 2 x + 22.22
- f''(x) = 3 * 0.24 * 2 x + 2 (-2.93)



Wo die Änderung von Abnahme zu Zunahme wechselt, wechselt die Ableitung von Fallen zu Steigen, hat daher einen Extremwert. Man spricht bei f(x) von einem Wendepunkt. Ein Wendepunkt liegt also vor, wenn f´´(x) = 0 ist.

5	Solve[f''(x)=0] → $\{x=\frac{5.8642}{1.44030}\}$
6	x = N[5.8642 / 1.44030,5] → x = 4.0715
7	f'(4.0715) → 10.2839170868375
8	10.2839170868375*3.6 → 37.02210151261500



Austrian Center for Didactics of Computer Algebra

JKU JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ

Zusammenfassung

Bei abnehmender Änderung weist die Kurve von y = f(x) eine negative Krümmung auf. In diesem Bereich gilt $f''(x) < 0$ da $f'(x)$ fallend ist.

Bei zunehmender Änderung weist die Kurve von y = f(x) eine positive Krümmung auf. In diesem Bereich gilt $f''(x) > 0$ da $f'(x)$ steigend ist.

Hat y = f(x) in x_W einen Wendepunkt, so ist $f''(x_W) = 0$!

Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung

In welchem Bereich kann die Kollisionsgeschwindigkeit liegen, wenn man annimmt, dass die Zeugen sich um 5 km/h verschätzen können?

Kurvendiskussion von Polynomfunktionen dritten Grades

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 08/ April 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

Kurvendiskussionen (KD) sind elementarer Bestandteil des Mathematikunterrichtes. Bei den hier vorgestellten Beispielen liegt der Schwerpunkt nicht auf den klassischen Rechenaufgaben einer KD, sondern auf dem Verstehen von mathematischen Hintergründen von Polynomfunktionen dritten Grades, die mit Hilfe des GeoGebra CAS erarbeitet werden sollen.

1.2 Kurzinformation

Schulstufe	7.Klasse AHS, 11.Schulstufe, SEK 2
Geschätzte Dauer	2-3 Einheiten
Verwendete Materialien	Arbeitsblatt, Lösungsblatt, html-Datei
Technische Voraussetzungen	GeoGebra CAS
Schlagwörter Mathematik	Kurvendiskussion
Schlagwörter GeoGebraCAS	Ableitungen von Funktionen
Autor/in	Matthias Kittel
Download von Zusatzmaterialien	---

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Lösen von Gleichungen dritten Grades • Ableiten von Polynomfunktionen • Vorgehensweise bei einer CAS
Technisches Vorwissen	• Verwendung GeoGebra CAS

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Eigenschaften von Polynomfunktionen dritter Ordnung	Wissen über die Eigenschaften (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) einer Polynomfunktion dritten Grades, Wissen über die Bedeutung der enstsprechenden Ableitungen, Wissen über die Bedeutung der koeffizienten von kubischen Gleichungen

1.5 Lernzielkontrolle

Den Aufgabenblatt liegt ein Lösungsblatt bei, in dem die Ergebnisse und Rechengänge der Aufgaben angeschrieben sind. Die Ergebnisse der händisch gerechneten Aufgaben lassen sich mit dem GeoGebra CAS durch die Schüler/innen selbstständig überprüfen.
Zur durchzuführenden Konstruktion der Schüler/innen ist eine Konstruktionsanleitung und Screen-Shots im Lösungsblatt angegeben. Zu allen gestellten Fragen finden sich die Antworten im Lösungsblatt.

2 Vorbereitung der Lehrenden

1.6 Vorbereitung des Unterrichts

Vor der ersten Einheit ist das Aufgabenblatt (1 Seite) zu kopieren und dann an die Schüler/innen auszuteilen. Die zu verwendende html-Datei soll den Schüler/innen zugänglich gemacht werden (Schülerfestplatte, etc.). Nach Beendigung der Ausarbeitung der Aufgaben, ist den Schülern das Lösungsblatt auszuhändigen (4 Seiten). Alternativ können auch alle

Dateien über eine Lernplattform zur Verfügung gestellt werden (Lösungsblatt erst später).

1.7 Verwendung des GeoGebraCAS

In den Aufgaben werden das Zeichenblatt, und die CAS-Ansicht verwendet. In allen zwei Bereichen sollten die Lehrenden über Grundkenntnisse verfügen.

Verwendete Befehle

Befehl	Erklärung des Befehls (siehe Beispiel unten)
`Ableitung`	Vereinfacht den ausgewählten Term
`Löse`	Löst eine gegebene Gleichung

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege

3 Didaktischer Hintergrund

Bei diesen Aufgaben steht nicht das Ableiten der Funktion und das Lösen von Gleichungen im Vordergrund, sondern das Auffinden und Erarbeiten der Eigenschaften von Polynomfunktionen dritter Ordnung. Es soll der Zusammenhang zwischen dem Aussehen der Funktion bzw. deren Ableitungen und den Koeffizienten der entsprechenden Gleichungen von den Schüler/innen erforscht und besprochen werden. Das GeoGebra CAS wird unterstützend bei den herkömmlichen Aufgaben einer KD verwendet und als Hilfsmittel eingesetzt.

4 Einsatz im Unterricht

1.8 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Aufgabenvorstellung	Lehrer/in-Schüler/in-Gespräch	-----
Erarbeitungsphase	Bearbeitung der Aufgaben	EA oder PA	Arbeitsblatt
Lernzielkontrolle	Überprüfung der Ergebnisse und der Rechengänge	EA oder PA	Lösungsblatt
Hausübung	Festigung des Erlernten	EA	Schulbuch

1.9 Unterrichtsablauf

Einführung

Der/Die Lehrer/in stellt die Aufgaben vor, nach dem im Unterricht das verlangte mathematische Vorwissen erarbeitet wurde. Alle Angbaen befinden sich auf dem Arbeitsblatt.
Die im GeoGebra-Applet dargestellten Funktionen sind:
schwarz … Ausgangsfunktion
rot … 1.Ableitung
blau … 2.Ableitung

Erarbeitungsphase

Die Schüler/innen führen alle am Arbeitsblatt angegeben Aufträge mit Hilfe von GeoGebra CAS durch.

Lernzielkontrolle

Alle Ergebnisse, Rechenschritte und Konstruktionsanleitungen sind im Lösungsblatt ersichtliche. Mit Hilfe dieser Informationen ist es möglich, dass die Schüler/innen in Einzel- oder Partnerarbeit die Richtigkeit ihrer Arbeit überprüfen können.

Hausübung

Durch das Erarbeiten der Aufgaben des Arbeitsblattes sind die Schüler/innen in der Lage alle gängigen Aufgaben im Bereich des Radioaktiven Zerfalles und Exponentialfunktion zu lösen. Zur Festigung und Wiederholung bieten sich Beispiele aus dem jeweiligen Schulbuch an.

5 Anhang

pdf-Datei arbeitsblatt_poly_3.pdf [242 kb]
pdf-Datei arbeitsblatt_poly_3_loes.pdf [702 kb]
html-Datei poly_3.html [5 kb]

Aufgaben

1 Wiederhole wie viele Nullstellen ein Polynom dritten Grades haben kann und wie diese Lösungskombinationen aussehen können!

2 Setze die Koeffizienten auf folgende Werte: $a=-0{,}6$ $b=-1{,}6$ $c=-1{,}5$ $d=0$
Welcher Fall der Nullstellenkombination ist in diesem Fall eingetreten? Zeige an Hand der Graphen, warum es keinen Extrempunkt geben kann!

3 Finde heraus, welche der vier Koeffizienten Auswirkungen auf die *x*-Koordinate eines Extrempunktes bzw. eines Wendepunktes haben kann!

4 Wie sieht es mit der Anzahl der Extrempunkte und Wendepunkte aus? Gibt es eine Ober- oder Untergrenze? Muss es immer Extrempunkte oder Wendepunkte bei dem Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades geben?
Wie sieht der Graph abhängig von der Anzahl der Extrempunkte aus? Fertige Skizzen an!
Bestimme die Gleichung jenes Polynoms, dessen Graph bei S(1/1) einen Sattelpunkt besitzt und durch den Punkt P(2/2) geht. Stelle alle notwendigen Gleichungen auf und verwende bei der Lösung und der Berechnung der Ableitungen das **GeoGebra**-CAS!

5 Setze die Koeffizienten auf die Werte $a=b=c=d=1$.
Variiere die Schieberegler der Koeffizienten **einzeln**! Finde heraus zwischen welchen Werten der Koeffizienten *a*, *b* und *c* der Graph der Funktion keine Extremwerte besitzt! Für welche Werte des Koeffizienten *d* liegt der Wendepunkt **rechts** von der Nullstelle? Was passiert, wenn man den Koeffizienten $a=0$ setzt?

6 Finde mit Hilfe der Variation der Koeffizienten heraus, welche folgenden Fälle möglich sind!

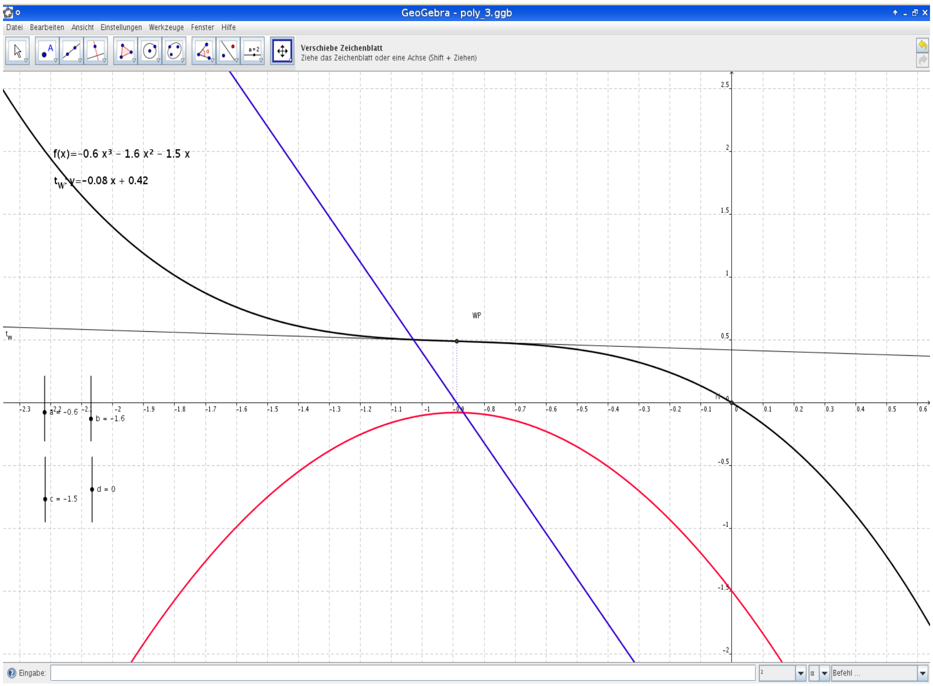
1. 3 Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkt
2. 2 Nullstellen, Wendepunkt
3. 1 Nullstelle, Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkt
4. 3 Nullstellen, Wendepunkt
5. 2 Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkt
6. 2 Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkt
7. 1 Nullstelle, Sattelpunkt
8. Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkt

Lösungen

1 Die Anzahl der Nullstellen ist äquivalent der Lösungen der entsprechenden Gleichung. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt daher, dass des drei Nullstellen geben muss. Da die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ ist, muss auf eventuelle komplexe Lösungen gedacht werden.

1. Fall	3 reelle Lösungen	3 Nullstellen
2. Fall	1 reelle Lösung, eine reelle Doppellösung	2 Nullstellen
3. Fall	1 reelle Dreifachlösung	1 Nullstelle
4. Fall	1 reelle Lösung, 2 konjugiert komplexe Lösungen	1 Nullstelle

2 Die Lösungen des Polynoms lauten $x_1=0$ $x_{2,3}=1,36\pm0,87\cdot i$, daher ist der 4. Fall eingetreten. Vergrößert man die Grafik erhält man folgendes Bild:

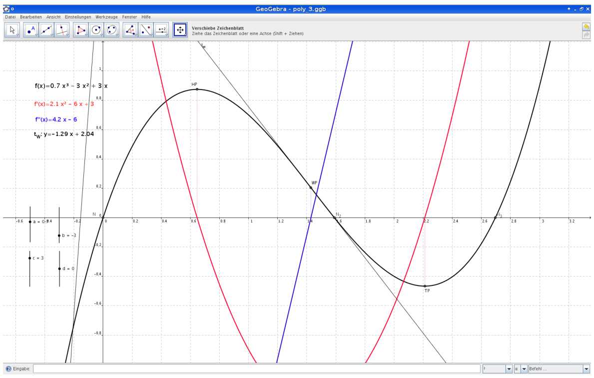
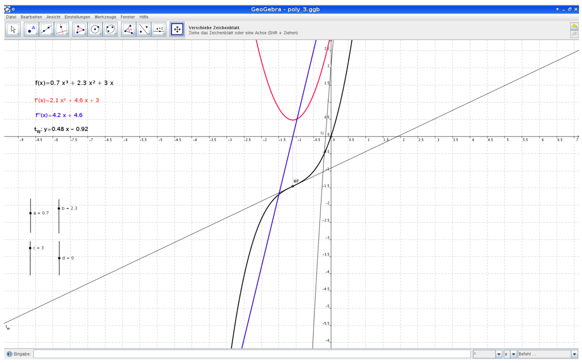


Man sieht, dass die erste Ableitung (der rote Graph) die x-Achse nicht schneidet, sie besitzt also keine Nullstelle und damit existieren kein Extrempunkte.

3 Der Koeffizient d hat keinerlei Auswirkungen auf die x-Koordinate von Extrem- oder Wendepunkte. Da es sich bei diesem Koeffizienten um eine additive Konstante handelt, die schon bei der ersten Ableitung weg fällt, kann dieser Wert keine Auswirkungen auf Ergebnisse haben, die aus Ableitungen berechnet werden. Der Koeffizient c beeinflusst nur die x-Koordinaten von etwaigen Extremwerten. Bei der Berechnung von Wendepunkten fällt auch dieser Koeffizient beim Ableiten weg und kann daher keine Auswirkungen auf diese Art von Punkten haben.

4 Zur Berechnung der Wendepunkte wird die zweite Ableitung verwendet. Da diese bei einer Polynomfunktion dritten Grades (mit reellen) Koeffizienten **immer** eine lineare Gleichung ergibt, deren Lösung immer einer **reelle** Zahl ist, existiert also in jedem Fall **genau ein** Wendepunkt!

Zur Berechnung der Extremwerte setzt man die erste Ableitung Null. Dies ist eine quadratische Gleichung, bei der man drei Lösungsfälle unterscheidet: 2 reelle Lösungen, 1 reelle Doppellösung und konjugiert komplexe Lösungen. Besteht das Ergebnis aus 2 reellen Lösungen, dann existiert **genau ein Hoch- und genau ein Tiefpunkt**! Bei komplexen Lösungen existieren **keine Extrempunkte**. Bei einer Doppellösung besitzt der Graph einen **Sattelpunkt**!

2 Extrempunkte	 oder spiegelverkehrt
keine Extrempunkte (komplexer Fall)	 oder spiegelverkehrt
keine Extrempunkte (Doppellösung)	 oder spiegelverkehrt

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente (3 Hinweise), der zweite Punkt liefert einen Hinweis. Die Gleichungen zur Lösung der Umkehraufgabe lauten:

I: $f(1)=1 \rightarrow a+b+c+d=1$, Sattelpunkt S liegt auf dem Graphen der Funktion

II: $f'(1)=0 \rightarrow 3a+2b+c=0$, Tangente im Sattelpunkt ist Null

III: $f''(1)=0 \rightarrow 6a+2b=0$, Sattelpunkt ist ein Wendepunkt

IV: $f(2)=2 \rightarrow 8a+4b+2c+d=2$, Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion

Lösung: $f(x)=x^3-3x^2+3x$

5

a	[-5,0;0,4]
b	[-1,7;1,7]
c	[0,4;5,0]
d	[0,2;5,0]

Wird der Koeffizient $a=0$ gesetzt, dann degeneriert die Funktion zu einer quadratischen Funktion – es handelt sich nicht mehr um ein Polynom dritten Grades.

6

1	existiert
2	existiert nicht; wenn nur Wendepunkt, dann nur 1 Nullstelle möglich
3	existiert
4	existiert nicht; wenn nur Wendepunkt, dann nur 1 Nullstelle möglich
5	existiert nicht; Wendepunkt existiert immer
6	existiert
7	existiert nicht; 1 Nullstelle existiert immer

Wirtschaftliche Anwendung der Differentialrechnung

für GeoGebraCAS

Letzte Änderung: 11. Mai 2010

1 Überblick

1.1 Zusammenfassung

In der Kosten- und Preistheorie befasst sich die Wirtschaftsmathematik mit der genaueren Analyse von Kosten, Erlösen und Gewinnen sowie von Angebot und Nachfrage. Dabei werden für reale Situationen möglichst einfache mathematische Modellfunktionen entwickelt, mit deren Hilfe man Kostenverläufe, ihre Veränderungen und Auswirkungen interpretieren kann. Die Kenntnisse, die aus der Differentialrechnung bekannt sind, werden in dieser wichtigen wirtschaftlichen Anwendung als Bereitstellung von Entscheidungsgrundlagen für die Unternehmensleitung genutzt.

1.2 . Kurzinformation

Schulstufe	11. Schulstufe
Geschätzte Dauer	2 bis 3 Unterrichtseinheiten
Verwendete Materialien	Siehe Beilage
Technische Voraussetzungen	GeogebraCAS
Schlagwörter Mathematik	Kosten- und Preistheorie Differentialrechnung Kurvendiskussionen
Schlagwörter GeoGebraCAS	Ableitungen Lösen von Gleichungen
Autor/in	Mag. Heidi Metzger-Schuhäker
Download von Zusatzmaterialien	

1.3 Vorwissen der Lernenden

Mathematisches Vorwissen	• Kenntnisse über Funktionen • Diskussion von Funktionen • Differentialrechnung
Technisches Vorwissen	• Grundkenntnis über GeogebraCAS

1.4 Lerninhalte und Lernziele

Lehrinhalt	**Lernziel**
Lösen von Gleichungen durch Verwendung gegebener Werte anhand von CAS-System	Funktionale Zusammenhänge erkennen Modellbildung und Analyse von Kostenfunktionen
Mit Hilfe von Geogebra und GeogebraCAS den Kostenfunktionsgraph erstellen und diskutieren	Interpretation von Funktionsgraphen Bedeutung von relativen Maxima- bzw.Minima in anwendungsorientierten Aufgabenstellungen erkennen
Kenntnisse der Differentialrechnung nutzen um unter Verwendung von GeogebraCAS Kostenminima, Gewinnmaxima,…zu berechnen	Bedeutung der 1. Ableitung einer Funktion als momentane Änderungsrate

1.5 Lernzielkontrolle

Mit Hilfe theoretischer Fragestellungen und unterstützender Literatur aus der Kosten- und Preistheorie kann das wirtschaftliche Verständnis der Schüler überprüft werden. Dabei soll neben der reinen Berechnung wirtschaftlicher Kennzahlen auch auf Interpretationen der Lösungen und ihre Bedeutung für Unternehmensentscheidungen Wert gelegt werden. Übungsaufgaben dazu werden zur Verfügung gestellt.

2 Vorbereitung der Lehrenden

2.1 Vorbereitung des Unterrichts

Die Lehrenden sollen im Vorfeld den Schülern die allgemeine Theorie der unterschiedlichen Kostenverläufe in einem kurzen Handout zur Verfügung stellen. Weiters wäre es ratsam, auf weiterführende Literatur sowie Links zur Vertiefung hinzuweisen.

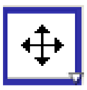
2.2 Verwendung des GeoGebraCAS

Einfache Grundkenntnisse von Geogebra und GeogebraCAS sind von Vorteil, es können aber auch fertige Applets zur Veranschaulichung verwendet werden. Die händische Berechnung dieser Aufgaben ist möglich, es müsste jedoch dafür ein längerer Zeitraum vorgesehen werden. Die wichtigen verwendeten Befehle werden hier zusammengefasst.

Verwendete Befehle

`Solutions`	Löst eine Gleichung nach einer Variablen
`Vereinfache`	Vereinfacht den ausgewählten Term
`Derivative`	Berechnet die Ableitungen einer Funktion
`Ableitung[Funktion]`	Berechnet die Ableitung der Funktion
`Ableitung[Funktion, Grad n der Ableitung]`	Berechnet die n-te Ableitung der Funktion
`TrendPoly[Liste von Punkten, Grad n des Polynoms]:`	Berechnet das Regressionspolynom n-ten Grades
`Trendlinie[Liste#]`	Berechnet die lineare Regressionsfunktion einer gegebenen Liste

Verwendete Werkzeuge

Werkzeug	Name des Werkzeugs (siehe Beispiel unten)
	Bewege
	Verschiebt das Zeichenblatt oder zieht eine Achse

3 Didaktischer Hintergrund

Durch den Einsatz von GeogebraCAS können die Schüler sehr anschaulich und ohne mühsame händische Rechenarbeit einer Regression ein gegebenes Datenmaterial verarbeiten, indem sie den funktionalen Zusammenhang durch eine Modellfunktion graphisch darstellen und interpretieren. Weiters können die Kostenkehre, die Grenzkostenfunktion und minimale (variable) Stückkosten mit Hilfe des CAS berechnet werden, auch wenn die Ableitungen der Funktionsterme händisch teilweise aufwendig zu berechnen wären. Die tatsächliche Anwendung der Differentialrechnung anhand empirisch erhobener wirtschaftlicher Daten ist somit für die Schüler leicht nachvollziehbar und eigenständig berechenbar.

4 Einsatz im Unterricht

4.1 Verlaufsplan

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Einführung	Problemstellung: Kosten eines Produktionsbetriebes Allg. Theorie zu Kosten; fixe und variable Kosten Darstellung der Kosten	Kurzes Vorstellen der Problem-stellung im Plenum	Angabe in Tabellenform
Erarbeitungsphase	Diskussion und Bildung einer Modellfunktion in Form einer Polynomfunktion 3. Grades Grenzkostenfunktion Stückkostenfunktion variable Stückkostenfunktion Minima der Stückkostenfunktion und variablen Stückkostenfunktion berechnen und ihre wirtschaftliche Bedeutung erklären	Ausarbeitung von Fragestellungen zu versch. Kostenverläufen in Partner – bzw. Gruppenarbeit Theorieteil von Lehrenden Übungsaufgaben in Einzel- bzw. Partnerarbeit	Wirtschaftliche Literatur + Internet Übungsbeispiele

Phase	Inhalt	Sozial- / Aktionsform	Materialien
Zusammenfassung	Zusammenfassende Erklärungen anhand der Erklärung graphischer Zusammenhänge	Beantwortung vorgegebener Fragestellung in Gruppenarbeit Präsentation der Lösungen im Plenum	Schriftliche Zusammenfassung der erarbeiteten Theorie
Lernzielkontrolle	Theorie: theoretische Beantwortung eines Fragenkatalogs Rechenfertigkeit: Übungsblatt	Einzelarbeit als Hausübung mit anschließender Kurzpräsentation einzelner Ergebnisse	Fragenkatalog Übungsblatt
Anwendung / Differenzierung / Übung / Vertiefung	Als Vertiefung: Begriff der Elastizität	Frontalunterricht Kleingruppen	Wirtschaftliche Literatur Internet
Hausübung	Weitere Aufgabenstellungen	Partner - Einzelarbeit	Übungsblatt

4.2 Unterrichtsablauf

Einführung

Ein Produktionsbetrieb hat seine Kosten im Laufe der Produktionsphase analysieren lassen und möchte die ermittelten Daten nutzen, um seinen Herstellungsprozess zu optimieren. Folgende Daten stehen dafür zur Verfügung:

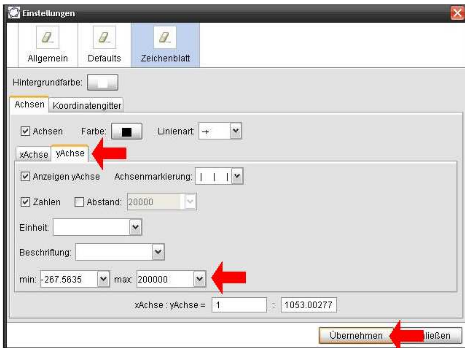
x in Mengeneinheiten	20	60	120	140
Kosten in Geldeinheiten	64 480	74 080	146 080	195 040

1. Graphische Darstellung:
Erkennen des funktionalen Zusammenhangs

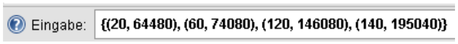
Anleitung: Einstellen der Skalierung

Schritt 1: Rechte Maustaste ins Zeichenblatt

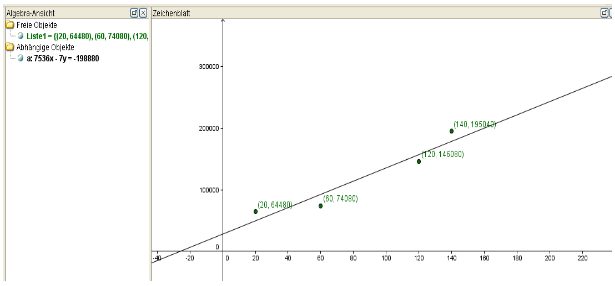
Schritt 2:



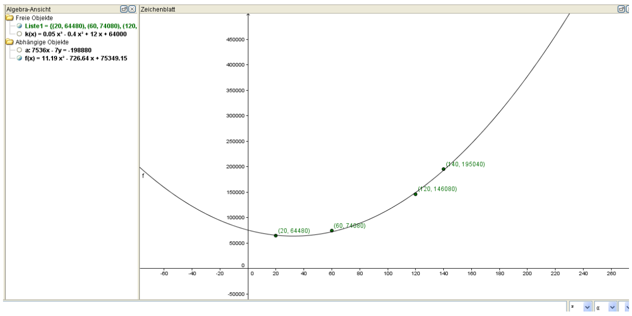
1.1 Lineare Regression:

Schritt 1: Eingabe der Liste: 

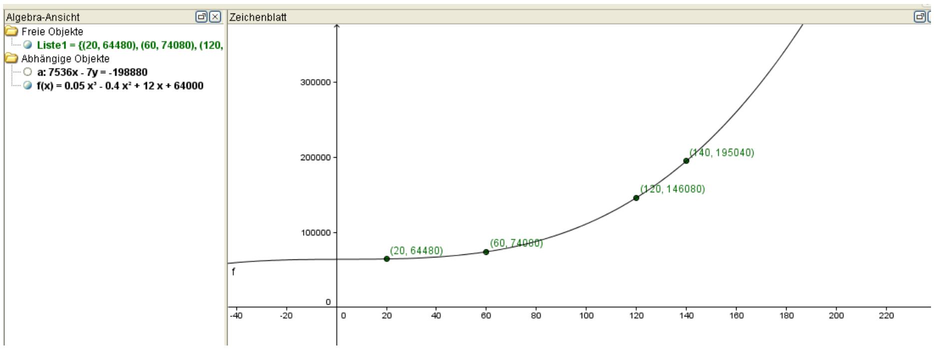
Schritt 2: Erstellen der linearen Regression: 



1.2 Regression durch Polynomfunktion 2. Grades: *TrendPoly[Liste1, 2]*



1.3 Regression durch Polynomfunktion 3. Grades: *TrendPoly[Liste1, 3]*



1.4 Diskussion über Wahl einer Modellfunktion!

1.5 Errechnen und Prognose weiterer Werte aus den Regressionskurven

2. Erarbeitungsphase

Theorie zu Kostenverläufen
Wir definieren die zu verwendeten Funktionen. Die Ableitungen ermitteln wir mit der Funktion Derivative und ordnen sinnvolle Bezeichner zu:

1	k(x) → $0.05x^3 - 0.4x^2 + 12x + 64000$
2	k'(x):=Derivative[k(x),1] → $0.15x^2 - 0.8x + 12$
3	k''(x):=Derivative[k(x),2] → $0.3\,x - 0.8$

Jetzt können wir in gewohnter Weise mit diesen Funktionen arbeiten:

Berechnung der Kostenkehre:

K''(x)=0

4	k''(x)=0 → $0.3x - 0.8 = 0$
5	Solutions[k''(x)=0] → $\{\frac{0.8}{0.3}\}$

Kostenverläufe interpretieren:
Degressive, progressive, proportionale Kostenverläufe erklären und berechnen

Wir testen links von der Kostenkehre:

13	k''(0) → -0.8

Im diesem Bereich ist der Kostenverlauf degressiv, rechts von der Kostenkehre daher progressiv.

Stückkostenfunktion:

Definition: Dividiert man die Gesamtkosten durch die Durchschnittsmenge, so erhält man jene Kosten, die eine Einheit der Produktionsmenge kostet. Man bezeichnet diese Funktion als Stückkosten- bzw. Durchschnittskosten funktion.

Die **minimalen Stückkosten** werden als **Betriebsoptimum** bezeichnet. Berechnung der minimalen Stückkosten:

6	stk(x):=k(x)/x → $\frac{0.05x^3-0.4x^2+12x+64000}{x}$
7	stk'(x):=Derivative[stk(x),1] → $\frac{x(0.15x^2-0.8x+12)-(0.05x^3-0.4x^2+12x+64000)}{x^2}$
14	Newton[stk'(x),x,80,0.001] → 87.5315629501311308

Variable Stückkostenfunktion:

Falls die durchschnittlichen variablen Stückkosten ein lokales Minimum haben, wird diese Produktionsmenge als Betriebsminimum bezeichnet.

Berechnung der minimalen variablen Stückkosten

8	VStk(x):=(k(x)-k(0))/x $\rightarrow \frac{0.05x^3-0.4x^2+12x}{x}$
9	VStk'(x):=Derivative[VStk(x),1] $\rightarrow \frac{x(0.15x^2-0.8x+12)-(0.05x^3-0.4x^2+12x)}{x^2}$
10	Solutions[VStk'(x)=0,x] $\rightarrow \{2(\frac{0.001152000}{0.000486000000})^{\frac{1}{3}}+\frac{0.4}{0.30},\frac{0.4}{0.30}-\frac{2(\frac{0.001152000}{0.000486000000})^{\frac{1}{3}}}{2}\}$
11	Newton[VStk'(x),x,-2,0.001] $\rightarrow 4.0$

5 Anhang

Zusammenfassung der Theorie
Übungsaufgaben

Theorieteil: Kostenfunktionen

Die Kostenfunktion K(x):
Gesamtkosten, die bei jeder Produktion bzw. beim Handel von Waren entstehen, hängen von der produzierten Menge ab. Aus diesem Grund wird als mathematisches Modell diese Abhängigkeit durch die Funktion K(x) beschrieben, wobei x in Mengeneinheiten (Stückzahl, Masse des hergestellten Produkts) angegeben wird und K(x) entsprechend in Geldeinheiten ausgedrückt wird.
Die Gesamtkosten K(x) setzen sich zusammen aus:
Fixkosten
sind unabhängig von der Produktionsmenge und werden daher als K(0) bezeichnet. Beispiele für Fixkosten, die auch anfallen, wenn nichts produziert wird, sind Mieten für Grundgebühren, Personalkosten, Kreditrückzahlungsraten,…
und variablen Kosten
K_v sind von der Produktionsmenge abhängig wie z.B. Materialkosten oder Transportkosten.

In der Praxis hat sich ein s-förmiger Kostenverlauf als oftmals geeignete Modellfunktion herausgestellt, weshalb sich eine Polynomfunktion 3. Grades am besten eignet.
Die Erklärung liegt darin, dass bei anfänglich geringeren Produktionsmengen die Kosten verhältnismäßig langsamer ansteigen als die Stückzahl (z.B. durch rationellere Arbeitsweise). Man spricht von **degressiven Kosten**.
Anders hingegen steigen die bei höheren Produktionsmengen die Kosten verhältnismäßig schneller als die Stückzahl (z.B. durch eine höhere Abnutzung der Maschinen, durch teurere Personalkosten wegen zusätzlicher Überstunden). Man spricht von **progressiven Kosten**.

Als **Kostenkehre** bezeichnet man den Übergang von degressiven zu progressiven Kosten, diese Produktionsmenge mit ihren dazugehörigen Gesamtkosten entspricht dem Wendepunkt der Kostenfunktion.

Als **Grenzkostenfunktion** wird die erste Ableitung der Kostenfunktion bezeichnet. Sie entspricht der momentanen Änderungsrate der Gesamtkosten bei einer Produktionssteigerung von einer Mengeneinheit.

Aufgaben:

1. Untersuche den Verlauf der gegebenen kubischen Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1000$ und gehe dabei auf folgende Punkte ein:

a) Beschreibe den Verlauf der Grenzkostenfunktion hinsichtlich ihres maximalen bzw. minimalen Anstiegs?

b) Berechne die Kostenkehre bzw. jene Produktionsmengen mit degressivem bzw. progressivem Kostenverlauf!

c) Welchen Einfluss hat eine Erhöhung der Fixkosten am Funktionsgraphen?

2. Eine kubische Kostenfunktion weist bei 10 ME die Kostenkehre auf, die Grenzkosten liegen bei der Kostenkehre in einer Höhe von 100 GE. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 50 ME liegen bei 71 200, die Fixkosten sind 1 200 GE. Bestimme die Kostenfunktion.

3. Erkläre die folgenden Von einer Kostenfunktion 3. Grades kennt man folgende Werte: K(0)=36 000; K'(0)=2 000; K(10)=379 220; K''(10)-14,8. Drücke diese vier Angaben in Worten aus und berechne die Kostenfunktion

4. Recherchiere eigenständig:

a) Welche Gründe gibt es für den häufig s-förmigen Verlauf von Kostenfunktionen?

b) Erkläre den Zusammenhang zwischen der 2. Ableitung einer Kostenfunktion und dem Kostenverlauf und finde aus entsprechender Literatur noch weitere Bezeichnungen für degressiven bzw. progressiven Kostenverlauf!

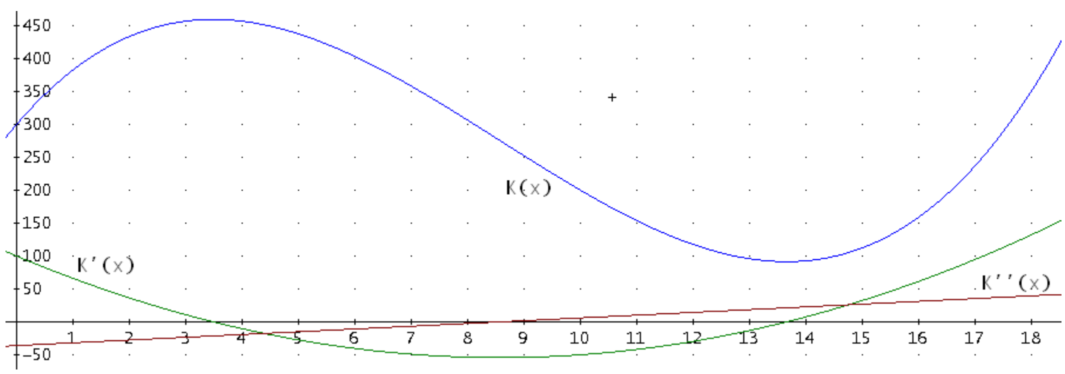
c) Was wird als regressiver Kostenverlauf bezeichnet und in welchen Situationen kann es zu solchen Verläufen kommen?

5. Versuche aus der Graphik der Kostenfunktion folgendes herauszulesen:

a) Wie hoch sind die Fixkosten?

b) In welchen Produktionsbereichen sind die Kosten degressiv, progressiv bzw. regressiv?

c) Wo liegt die Kostenkehre und was ist ihre wirtschaftliche Bedeutung?



GeoGebraCAS – Didaktisches Computeralgebrasystem

gemeinsames Projekt von GeoGebra, Österreichisches GeoGebra institut,
RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und ACDCA

in Zusammenarbeit mit
der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich,
und der Johannes Kepler Universität Linz,

unterstützt vom Bundesministerium für
Unterricht, Kunst und Kultur

Teil 3 - Evaluation

Juni 2010

Verfasst von:
Peter Hofbauer, Judith Hohenwarter, Walter Klinger, Evelyn Stepancik

Mit Unterstützung des Testlehrer/innen-Teams:
Alfred Eisler, Beate Thonhauser, Eduard Engler, Egmond Vogel, Elisabeth Schmidt, Georg Frühwirth, Gerhard Egger, Günter Kienreich, Günter Redl, Günter Schödl, Josef Lechner, Jutta Braun, Klinger Walter, Lindner Andreas, Nagl Anton, Willhelm Haller, Wolfgang Fischer

3. Evaluation

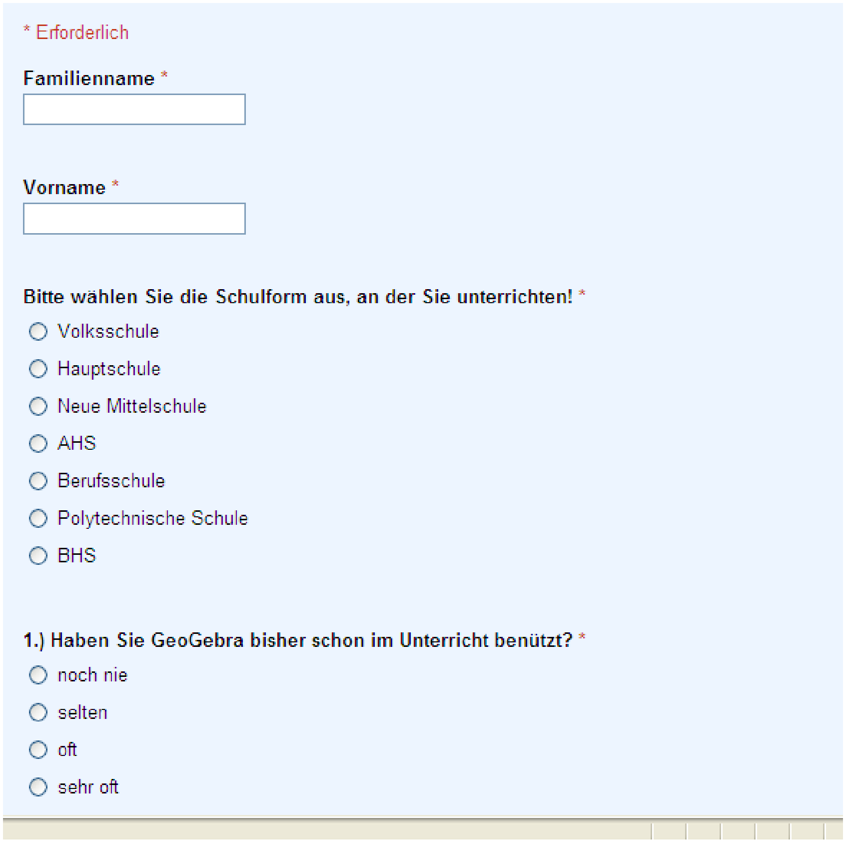
3.1 Lehrer/innenbefragung

Die online Befragung der Lehrer/innen bestand aus zwei Fragebogen. Im ersten Fragebogen wurden vor allem Daten zum bisherigen Technologieeinsatz im Mathematikunterricht sowie zum Einsatz von GeoGebra erhoben. Mit dem zweiten Fragebogen wurden einerseits die entwickelten Unterrichtsmaterialien und didaktischen Begleitmaterialien, andererseits das GeoGebraCAS selbst evaluiert.

Zum Zeitpunkt der Berichtlegung konnten nur die Daten des ersten Lehrer/innenfragebogens ausgewertet werden. Die detaillierte Auswertung aller weiteren Evaluationsergebnisse erfolgt im Sommer/Herbst 2010.

3.1.1 Lehrer/innenfragebogen 1

Der mit Google-Form realisierte Fragebogen bestand aus folgenden Items.



* Erforderlich

Familienname *

Vorname *

Bitte wählen Sie die Schulform aus, an der Sie unterrichten! *

- Volksschule
- Hauptschule
- Neue Mittelschule
- AHS
- Berufsschule
- Polytechnische Schule
- BHS

1.) Haben Sie GeoGebra bisher schon im Unterricht benützt? *

- noch nie
- selten
- oft
- sehr oft

Falls Sie GeoGebra im Unterricht schon eingesetzt haben, dann beantworten Sie bitte die nächsten drei Fragen!

Andersfalls können Sie die nächsten drei Fragen überspringen!

2a.) Welche Komponenten haben Sie bereits eingesetzt?

- ☐ Grafik-Ansicht
- ☐ Algebra-Ansicht
- ☐ Tabellen-Ansicht
- ☐ dynamische Arbeitsblätter

2b.) Für welche Themen und in welchen Schulstufen haben Sie GeoGebra bisher verwendet?
Bitte beschreiben Sie stichwortartig Ihren bisherigen GeoGebra-Einsatz. Falls Sie in manchen Schulstufen GeoGebra durchgehend einsetzen, dann geben Sie bitte nur jene Themen an, wo Sie glauben, dass GeoGebra einen besonders guten Beitrag zur Unterstützung des Lernprozesses leistet.

2c.) Wie haben Sie GeoGebra bisher im Unterreicht verwendet?
Falls Sie "Sonstiges" wählen, dann klicken Sie diese Option bitte an!

- ☐ Als Präsentationswerkzeug (z. B. zur Veranschaulichung von mathematischen Konzepten, mit vorbereiteten Konstruktionen, mit dynamischen Arbeitsblättern)
- ☐ Als Autor/innenwerkzeug (z. B. zum Erstellen von statischen Bildern, Konstruktionen oder dynamischen Arbeitsblättern)
- ☐ Als alltägliches Werkzeug (z. B. ohne vorbereitete Materialien, spontan im Unterricht erstellte Konstruktionen)
- ☐ Als Werkzeug zum Entdeckenden Lernen (meine SchülerInnen verwenden GeoGebra selbstständig)
- ☐ Mit dynamischen Arbeitsblättern
- ☐ Sonstiges: ____

3.) Haben Sie bereits mit Computeralgebrasystemen im Unterricht gearbeitet? *

- ○ noch nie
- ○ selten
- ○ oft
- ○ sehr oft

Falls Sie bereits ein CAS im Unterricht eingesetzt haben, dann beantworten Sie bitte die nächsten beiden Fragen.

Andersfalls können Sie die nächsten beiden Fragen überspringen!

3a.) Welches CAS haben Sie bisher verwendet?

3b.) Wie oft und für welche Themen bzw. in welchen Schulstufen haben Sie das CAS bisher eingesetzt?

Bitte beschreiben Sie stichwortartig Ihren bisherigen CAS-Einsatz. Falls Sie in manchen Schulstufen ein CAS durchgehend einsetzen, dann geben Sie bitte nur jene Themen an, wo Sie glauben, dass das CAS einen besonders guten Beitrag zur Unterstützung des Lernprozesses leistet.

Im folgenden Abschnitt stehen die bisherigen Erfahrungen Ihrer Schüler/innen mit GeoGebra im Zentrum.

4.) Kannten Ihre Schüler/innen GeoGebra schon? *

- ◯ Ja
- ◯ Nein

Falls Sie die letzte Frage mit "Ja" beantwortet haben, dann bitte beantworten Sie noch folgende zwei Fragen!

Andersfalls können Sie diese Fragen überspringen!

4a.) Mit welchen Komponenten von GeoGebra waren Ihre Schüler/innen bisher vertraut?
Falls Sie "Sonstiges" wählen, dann klicken Sie diese Option bitte an!

- ☐ Grafik-Ansicht
- ☐ Werkzeuge aus der Werkzeugleiste
- ☐ Algebra-Ansicht
- ☐ Eingabezeile
- ☐ Tabellen-Ansicht
- ☐ dynamische Arbeitsblätter
- ☐ Sonstiges: ____

4b.) Wie würden Sie die durchschnittlichen Erfahrungen Ihrer Schüler/innen mit GeoGebra bewerten (Schulnoten)?
Allgemeine Kenntnisse im Umgang mit GeoGebra.

	1	2	3	4	5	
Sehr gut	○	○	○	○	○	Nicht genügend

5.) Haben Ihre Schüler/innen vor der Testphase des GeoGebraCAS bereits selbstständig mit GeoGebra gearbeitet? *

○ Ja

○ Nein

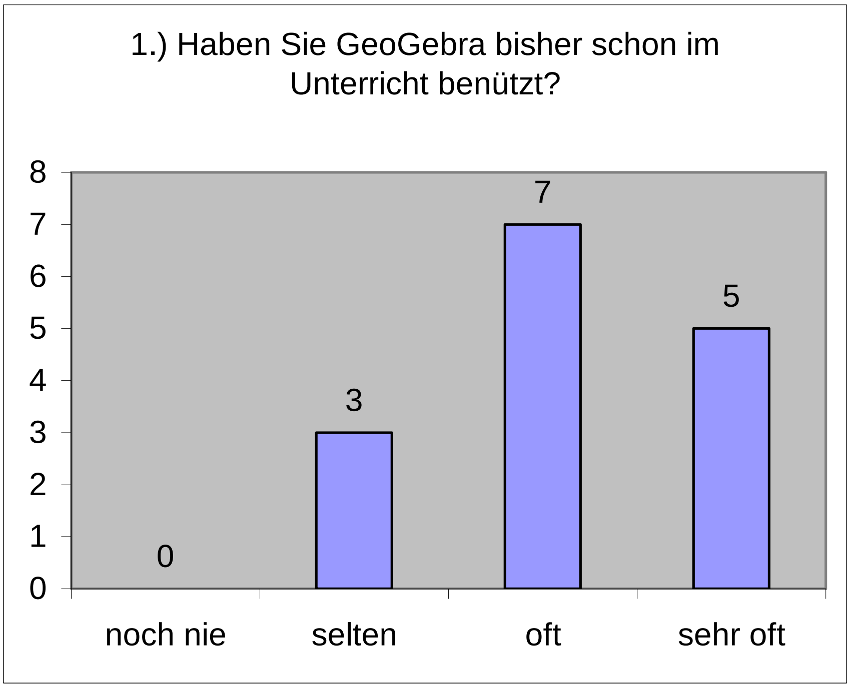
5a.) Falls Ihre Schüler/innen schon mit GeoGebra selbstständig gearbeitet haben, dann beschreiben Sie bitte bei welchen Themen und in welchem Umfang dies der Fall war!
Bitte geben Sie bitte nur jene Themen an, bei die Selbstständigkeit der Schüler/innen durch den Einsatz von GeoGebra besonders unterstützt wird.

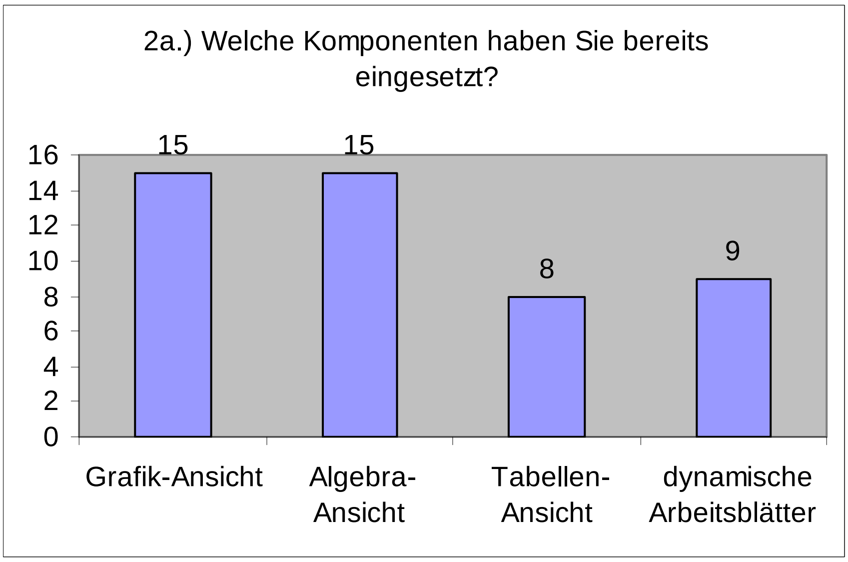
6.) Haben wir bei diesem Fragebogen einen wichtigen Aspekt zum Einsatz von GeoGebra bzw. CAS im Unterricht vergessen?
Bitte beschreiben Sie diesen stichwortartig!

Senden

3.1.2 Ergebnisse des Lehrer/innenfragebogens 1

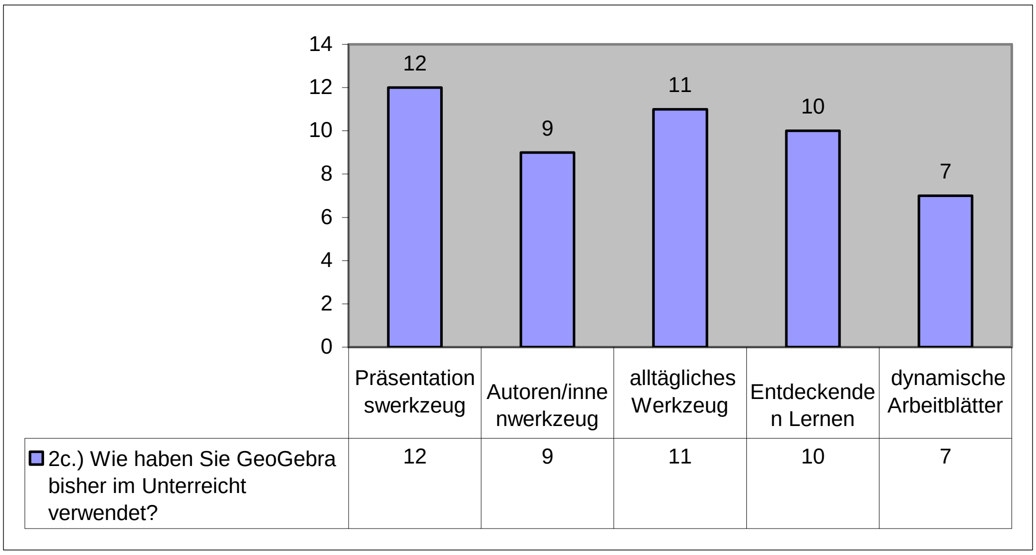
Von den 15 teilnehmenden Lehrer/innen waren zwei aus dem Bereich der BHS und die anderen 13 aus dem Bereich der AHS. Ein Großteil dieser Lehrer/innen hat GeoGebra im Unterricht bisher oft bzw. sehr oft genützt. Die Grafik- und Algebra-Ansicht wurde schon von allen Lehrer/innen genützt, die Tabellen-Ansicht von rund der Hälfte der Lehrer/innen. 5 der 15 Lehrer/innen verwenden bisher schon alle drei derzeit angebotenen GeoGebra-Ansichten (Grafik-, Algebra- und Tabellenansicht) und nützen auch dynamische Arbeitsblätter.





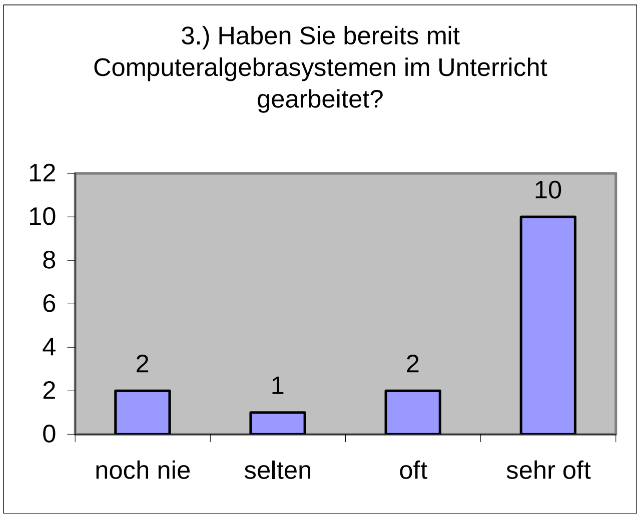
GeoGebra wurde bisher von den Lehrenden meist in Zusammenhang mit geometrischen Grundbegriffen, Funktionen, der Differential- und Integralrechnung sowie der Vektorrechnung verwendet. Selten aber doch wurde GeoGebra in Moodle-Kurse integriert und das Thema Iteration mithilfe der Tabellenansicht bearbeitet.

Wie GeoGebra von den Lehrer/innen bisher im Unterricht eingesetzt bzw. verwendet wurde, zeigt die nachstehende Grafik.



Die meisten der 15 Lehrer/innen verwenden GeoGebra als Präsentationswerkzeug und als alltägliches Werkzeug im Unterricht. 10 dieser Lehrer/innen nützen GeoGebra auch zum Gestalten von entdeckendem Lernen.

In weiterer Folge haben wir den bisherigen Einsatz von Computeralgebrasystemen im Unterricht bei den Testlehrer/innen erhoben.

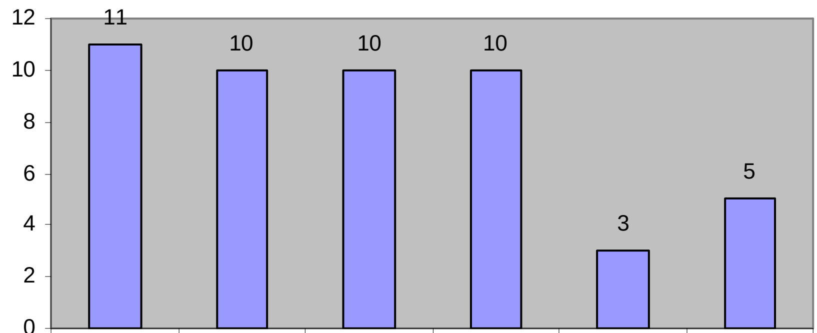


12 der 15 Lehrer/innen haben bisher schon oft bzw. sehr oft mit einem CAS im Unterricht gearbeitet. Am häufigsten verwendeten diese Lehrer/innen bisher DERIVE oder VOAYGE. Die restlichen drei Lehrer/innen haben CAS bisher selten oder nie verwendet.

Die Lehrer/innen, die das CAS bisher oft bzw. sehr oft genützt haben, setzten es entweder in der Oberstue durchgängig ein oder manchmal auch schon ab der 7. Schulstufe.

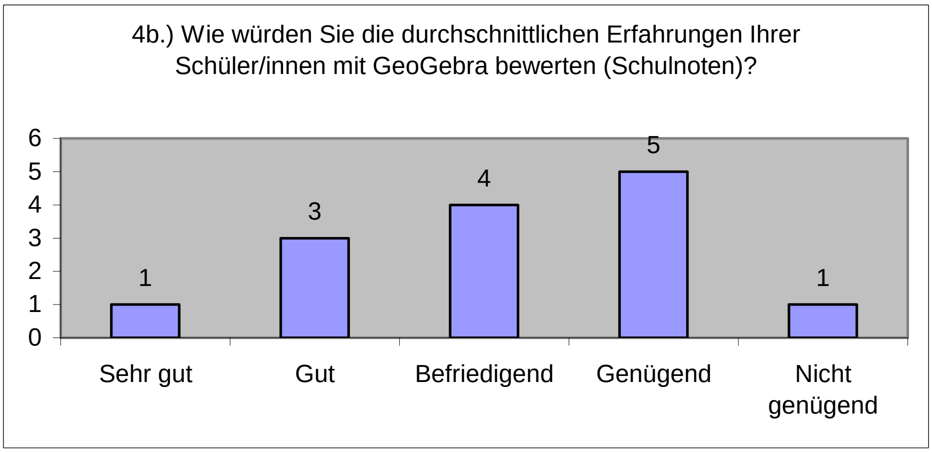
Im Bereich der 3. und 4. Klasse wurde das CAS bisher vorwiegend als Testinstrument für elementare Algebra und Gleichungen – vor allem als Begleitung beim Lernprozess – genutzt. In den Oberstufenklassen wurden Computeralgebrasysteme für viele Themenbereiche (Funktionen, analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, Vektorrechnung und Stochastik) verwendet.

Zum Abschluss des Fragebogens wollten wir von den Lehrer/innen noch wissen, ob sie GeoGebra bisher schon in ihrem Unterricht eingesetzt haben und wie sie die GeoGebra-Kenntnisse ihrer Schüler/innen einschätzen. 11 Lehrer/innen geben an, dass ihre Schüler/innen GeoGebra schon kennen.



	Grafik-Ansicht	Werkzeuge	Algebra-Ansicht	Eingabezeil	Tabellenans	dyn Arbeitsblätt
4a.) Mit w elchen Komponenten von GeoGebra w aren Ihre Schüler/innen bisher vertraut?	11	10	10	10	3	5

Erstaunlich ist für uns, dass die Lehrer/innen die Kenntnisse ihrer Schüler/innen beim Umgang mit GeoGebra gering einschätzen und bewerten.

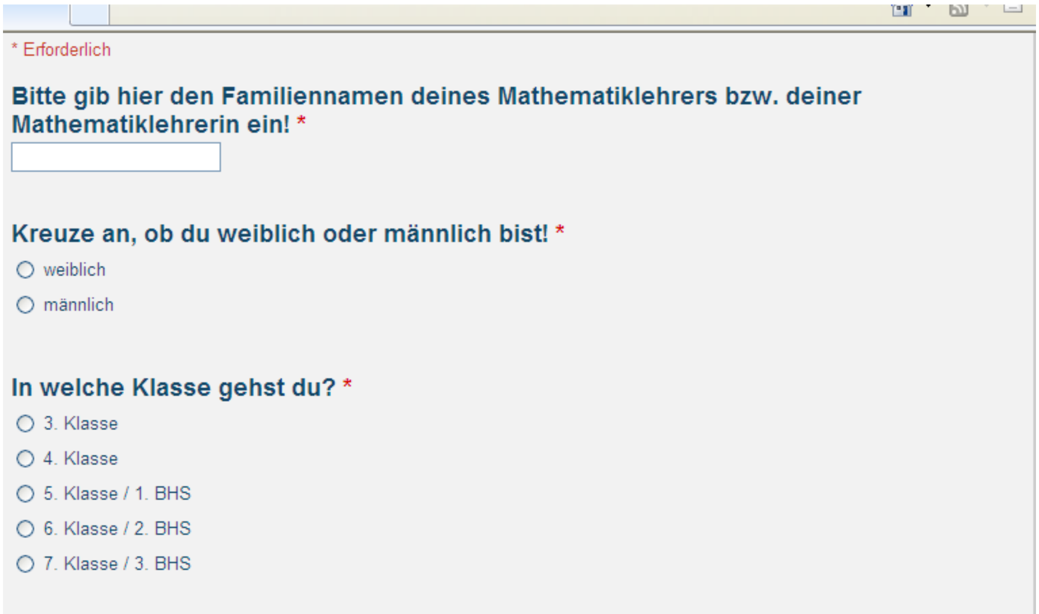


Immerhin 8 Lehrer/innen geben aber an, dass ihre Schüler/innen schon von der GeoGebraCAS Testphase selbstständig mit GeoGebra gearbeitet haben. Das selbstständige Arbeiten der Schüler/innen mit GeoGebra erfolgt vor allem in den Bereichen Geometrie und Funktionenlehre.

3.2 Schüler/innenbefragung

Für die Schüler/innen wurde ein online Fragebogen erstellt, bei dem vor allem Fragen zur Qualität der Lernmaterialien sowie zur Nutzung des GeoGebraCAS im Zentrum standen. Da zum Zeitpunkt der Berichtlegung der Fragebogen noch nicht von allen Schüler/innen absolviert wurde, kann eine detaillierte Auswertung der Daten erst im Sommer/Herbst 2010 erfolgen.

Der mit Google-Form realisierte Fragebogen bestand aus folgenden Items.



* Erforderlich

Bitte gib hier den Familiennamen deines Mathematiklehrers bzw. deiner Mathematiklehrerin ein! *

Kreuze an, ob du weiblich oder männlich bist! *

- weiblich
- männlich

In welche Klasse gehst du? *

- 3. Klasse
- 4. Klasse
- 5. Klasse / 1. BHS
- 6. Klasse / 2. BHS
- 7. Klasse / 3. BHS

Wie oft arbeitest du im Mathematikunterricht mit technologischen Hilfsmitteln (z. B.: Computer, Notebook, Netbook, Interactive Board, programmierbarer Taschenrechner)? *

- sehr oft
- oft
- manchmal
- nie

Wie schätzt du deine eigenen Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit technologischen Hilfsmitteln im Mathematikunterricht ein? *

- sehr gut
- gut
- mittel
- mäßig

Du hast in deiner Klasse mit GeoGebraCAS gearbeitet. War die Sprache der verwendeten Arbeitsblätter verständlich? *

- sehr verständlich
- gut verständlich
- eher verständlich
- kaum verständlich

Waren die verwendeten Arbeitsblätter ansprechend gestaltet? *

- ○ sehr ansprechend
- ○ ansprechend
- ○ wenig ansprechend
- ○ nicht ansprechend

Das GeoGebraCAS hat mich beim selbstständigen Arbeiten/Lernen im Mathematikunterricht sehr gut unterstützt! *

- ○ trifft völlig zu
- ○ trifft zu
- ○ trifft wenig zu
- ○ trifft nicht zu

Wie würdest du die Bedienung der einzelnen GeoGebraCAS Komponenten beurteilen! *

	Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend
Eingabe von mathematischen Ausdrücken in das GeoGebraCAS	○	○	○	○	○
Ausgabe der Ergebnisse im GeoGebraCAS	○	○	○	○	○
Bedienung des GeoGebraCAS	○	○	○	○	○

Falls du die Bedienung einer GeoGebraCAS Komponente mit "Befriedigend", "Genügend" oder "Nicht genügend" bewertet hast, dann erkläre hier bitte kurz warum!

Weiter »

Zwei weitere ganz freiwillige Fragen

Falls du auch die beiden folgenden Fragen beantworten möchtest, würden wir uns sehr freuen!

Was soll das GeoGebraCAS deiner Meinung nach noch können?

Wie soll es verändert werden, damit es deinen Vorstellungen entspricht?

« Zurück | Senden

3.3 Schüler/innen-Interviews

Die Schüler/innen-Interviews stützen sich auf drei wesentliche Aspekte. Für die fünf Klassen des BG/BRG Stockerau wurden in Analogie zu bereits von den Schüler/innen bearbeiteten Aufgaben neue Aufgabenstellungen erstellt. Diese Aufgabenstellungen sind mit den elementaren GeoGebraCAS-Befehlen „ersetzen“, „substitutieren“, „multiplizieren“, „faktorisieren“ sowie dem Bearbeiten von Gleichungen zu lösen. Das Besondere an dieser Evaluationsform ist, dass die Schüler/innen ihren Lösungsweg in GeoGebra abfilmen. Das heißt, dass nach Beendigung dieser Evaluation rund 125 Video-Dateien vorliegen, die zeigen, wie Schüler/innen der 3. bis 5. Klasse mit dem neuen GeoGebraCAS umgehen. Mit der Auswertung dieser Videoaufzeichnungen erhoffen wir uns einerseits spannende didaktische Einsichten in die Lösungswege von Schüler/innen und andererseits hilfreiche Einblicke in die Arbeit bzw. das Handling der Schüler/innen mit dem neuen GeoGebraCAS.

Mit je vier per Zufall ausgelosten Schüler/innen (2 Mädchen, 2 Buben) dieser fünf Klassen wird im Anschluss an die absolvierte Aufgabenstellung ein Leitfrageninterview geführt, um zumindest exemplarisch detaillierte Rückmeldungen zu den Online-Fragebögen zu erhalten.

Für die dritte und letzte Säule dieser Schüler/innenbefragung wurde ein kurzer Fragebogen erstellt, bei dem wir von den Schüler/innen vor allem wissen wollen, ob sie gerne an solchen Forschungs- und Entwicklungsprojekten teilnehmen und wie hilfreich sie den Einsatz des GeoGebraCAS in Zusammenhang mit ihrem eigenen Lernprozess empfinden.

3.3.1 Testaufgaben

Formeln ergänzen

1. Vervollständige nach einer der drei folgenden Formeln!

$$(u + v)^2 = u^2 + 2\,u\,v + v^2$$
$$(u - v)^2 = u^2 - 2\,u\,v + v^2$$
$$u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$$

2. Trage die gesuchten Ausdrücke für a, b und c in diese Tabelle ein!

Gegeben	Gesucht	Gesucht	Gesucht	Vollständige Formel
$(a + b)^2 = 25 + 20xy + c$	a =	b =	c =	

Starte nun die Testversion von GeoGebraCAS und schließe das Zeichenblatt (Geometrie-Fenster)! Du brauchst nur das CAS-Fenster!
Starte das Programm für die Bildschirmaufzeichnung!

Starte die Bildschirmaufzeichnung! Bearbeite die weiteren Aufgaben nun mit GeoGebraCAS!

3. Gib den gegebenen Ausdruck $(a + b)^2 = 25 + 20xy + c$ in GeoGebraCAS ein!
4. Überprüfe durch Einsetzen für a, b und c, ob deine gefundenen Werte a, b und c für die vollständige Formel richtig sind!
5. Sollten deine vollständige Formel nicht richtig sein, dann mach einen weiteren Versuch!

Beende die Aufnahme deines Videos und speichere es unter folgendem Namen ab:
Beispiel für den Dateinamen: **m4c17** (m/w Geschlecht, 4c Klasse, 17 Computernummer)
Gib hier bitte deinen Dateinamen an! __ __ __ __ __

☺ Danke für deine Mühe! ☺

Viele Wege führen zu einer Lösung?!
Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Starte die Testversion von GeoGebraCAS und schließe das Zeichenblatt (Geometrie-Fenster)! Du brauchst nur das CAS-Fenster!
Starte das Programm für die Bildschirmaufzeichnung!
Führe die ersten beiden Schritte auf deinem Arbeitsblatt durch!

1. Gib in der ersten Zeile eine deiner Meinung nach sinnvolle Äquivalenzumformung an.
2. Trage das Ziel (vollständiger Satz) der gewählten Umformung in das Kästchen darunter ein.

$2 = 5 - \frac{x}{4} \quad \vert$
Ziel der 1. Umformung:

Starte die Bildschirmaufzeichnung! Bearbeite die weiteren Aufgaben nun mit GeoGebraCAS!

3. Schreibe darunter die nach der Umformung erhaltene Gleichung.
4. Löse dann durch weitere Umformungsschritte die Gleichung und gib die einfachste (äquivalente) Form der Gleichung an.

Beende die Aufnahme deines Videos und speichere es unter folgendem Namen ab:
Beispiel für den Dateinamen: **m4c17** (m/w Geschlecht, 4c Klasse, 17 Computernummer)
Gib hier bitte deinen Dateinamen an! __ __ __ __ __

5. Vervollständige die Tabelle!

Einfachste Form:
Anzahl deiner nötigen Äquivalenzumformungen: __________

☺ Danke für deine Mühe! ☺

Viele Wege führen zu einer Lösung?!
Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Starte die Testversion von GeoGebraCAS und schließe das Zeichenblatt (Geometrie-Fenster)! Du brauchst nur das CAS-Fenster!
Starte das Programm für die Bildschirmaufzeichnung!
Führe die ersten beiden Schritte auf deinem Arbeitsblatt durch!

6. Gib in der ersten ZeileSpalten eine deiner Meinung nach sinnvolle erste Äquivalenzumformung an.
7. Trage das Ziel (vollständiger Satz) der gewählten Umformung in das Kästchen darunter ein.

$$3-\frac{x}{5}=3x-5 \quad \vert$$
Ziel der 1. Umformung:

Starte die Bildschirmaufzeichnung! Bearbeite die weiteren Aufgaben nun mit GeoGebraCAS!

8. Schreibe darunter die nach der Umformung erhaltene Gleichung.
9. Löse schrittweise durch weitere Umformungen die Gleichung und gib die einfachste (äquivalente) Form der Gleichung an.

Beende die Aufnahme deines Videos und speichere es unter folgendem Namen ab:
Beispiel für den Dateinamen: **m4c17** (m/w Geschlecht, 4c Klasse, 17 Computernummer)
Gib hier bitte deinen Dateinamen an! __ __ __ __ __

10. Vervollständige die Tabelle!

Einfachste Form:
Anzahl deiner nötigen Äquivalenzumformungen: __________

☺ Danke für deine Mühe! ☺

3.3.2 Leitfrageninterview

Beim Leitfrageninterview sind zwei Teilbereiche vorgesehen.

1. Teil – Fragen rund um den Unterricht mit dem Computer und mit GeoGebraCAS

- Beschreibe bitte deine bisherige Erfahrung mit Computern im Mathematikunterricht.
- Wie oft habt ihr den Computer im Unterricht eingesetzt?
- Wie hast du GeoGebra kennen gelernt?
- Wie hast du GeoGebra am besten kennen gelernt? Wie denkst du, dass Schüler/innen GeoGebra lernen können?
- Was magst du an GeoGebra?
- Kennst du verschiedene CAS? Welche?
- Wie ist es dir mit dem GeoGebraCAS ergangen?
- Kannst du mir erklären, welche Aufgaben du mit dem GeoGebraCAS gelöst hast?
- Was war schwieriger, die Mathematik oder das CAS?
- Glaubst du, dass du mit dem GeoGebraCAS ganz alleine eine Aufgabe lösen kannst bzw. selbstständig arbeiten kannst?

- Hast du zuhause einen eigenen Computer, wo du auch Hausübungen mit GeoGebra machst?
- Mit welcher Version arbeitest du zuhause (download oder fix installiert)?

2. Teil – Fragen zu den Arbeitsblätter selbst

- Wie hat dir die optische Aufbereitung der Arbeitsblätter gefallen?
- Könnte man etwas besser machen? Was?

- Waren die Aufgabenstellungen interessant? Was könnte besser gemacht werden?
- Hast du gleich verstanden, worum es in den Aufgaben geht?
- Wenn nein, wer hat dir geholfen? Was könnte besser gemacht werden?

3.3.3 Kurzfeedback der Schüler/innen

Liebe Schülerin! Lieber Schüler!

Dieser Fragebogen gibt dir die Möglichkeit, Feedback zu unserem Forschungs- und Entwicklungsprojekt GeoGebraCAS zu geben! Du hilfst uns damit, deine Meinung zu erfahren und die Qualität unseres Projekts zu verbessern.
Bitte nimm dir ein wenig Zeit zur Beantwortung der folgenden Fragen. Versuche gerecht zu urteilen und antworte selbständig - lass dich nicht von anderen beeinflussen. Deine Antworten sind anonym!

1. Bitte notiere hier, in welche Klasse du gehst! _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Bitte kreuze bei den folgenden Fragen das Zutreffende an!

2. Geschlecht: ☐ weiblich ☐ männlich

3. Mathematik ist ein Fach, das ich gerne mag!

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

4. Ich arbeite gerne an einem solchen Entwicklungs- und Forschungsprojekt mit!

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

5. Durch den Einsatz von GeoGebra wird mein Mathematikunterricht abwechslungsreicher!

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

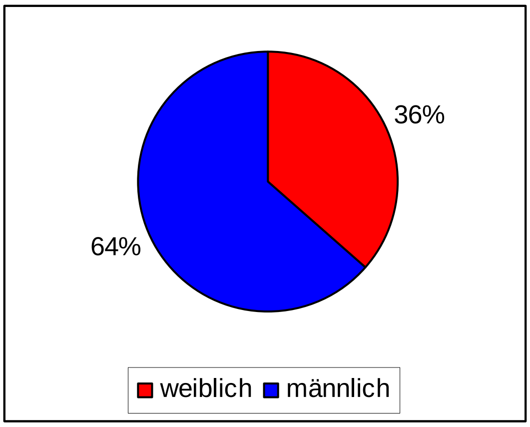
6. Der Einsatz von GeoGebra hilft mir beim Lernen und Verstehen von Mathematik!

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

☺ Vielen Dank für deine Mitarbeit! ☺

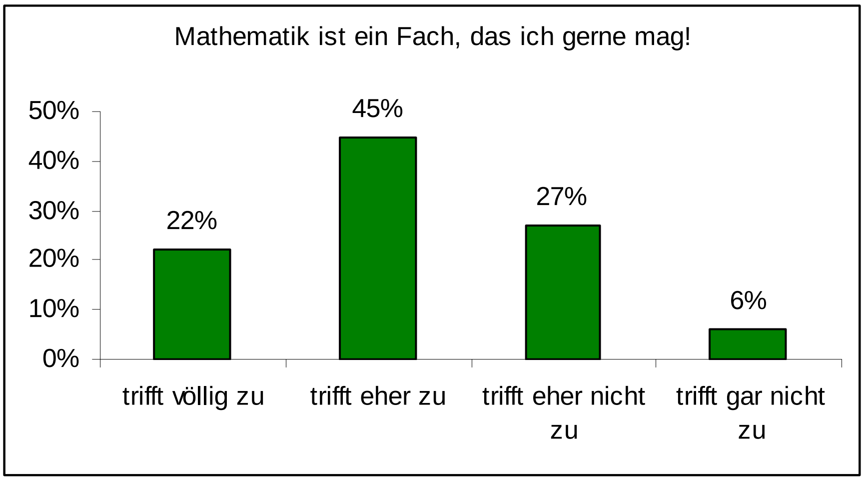
Auswertung des Kurzfragebogens

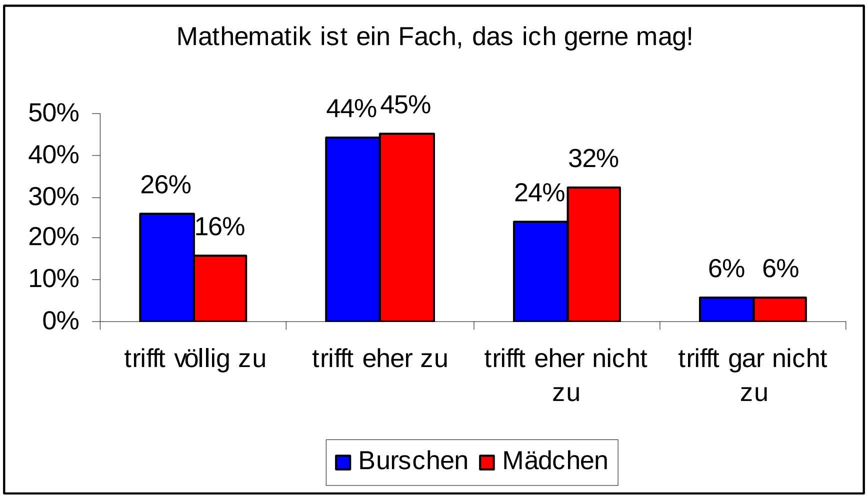
Im Rahmen der Schüler/inneninterviews und Aufzeichnung der Schüler/innenlösungswege im BG/BRG Stockerau haben 85 Schüler/innen aus zwei 3., zwei 4. und einer 5. Klassen den Kurzfragebogen absolviert.



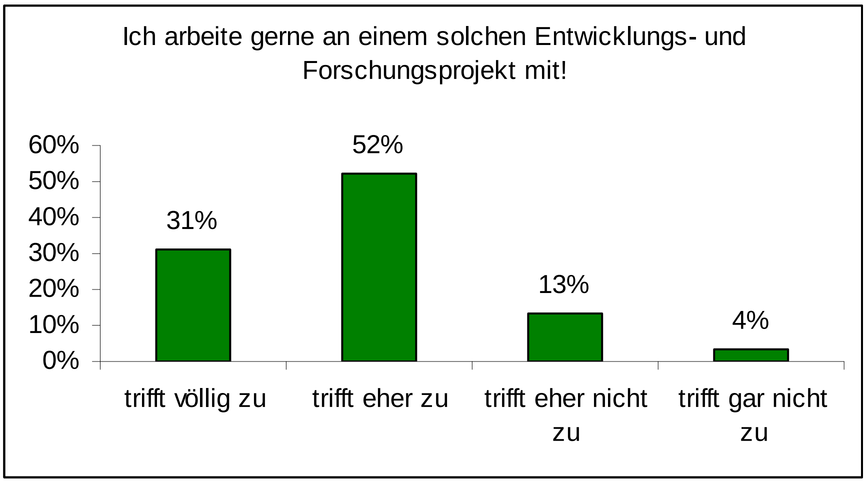
Mehr als die Hälfte der Teilnehmer/innen waren männlich. Für annähernd 70% der Schüler/innen trifft die Aussage „Mathematik ist ein Fach, das ich gerne mag!“ völlig bzw. eher zu.

Betrachtet man nur die Mädchen, dann stimmen eindeutig weniger Mädchen der Aussage „Mathematik ist ein Fach, das ich gerne mag!“ völlig zu und für deutlich mehr Mädchen als Burschen trifft diese Aussage nur eher zu.



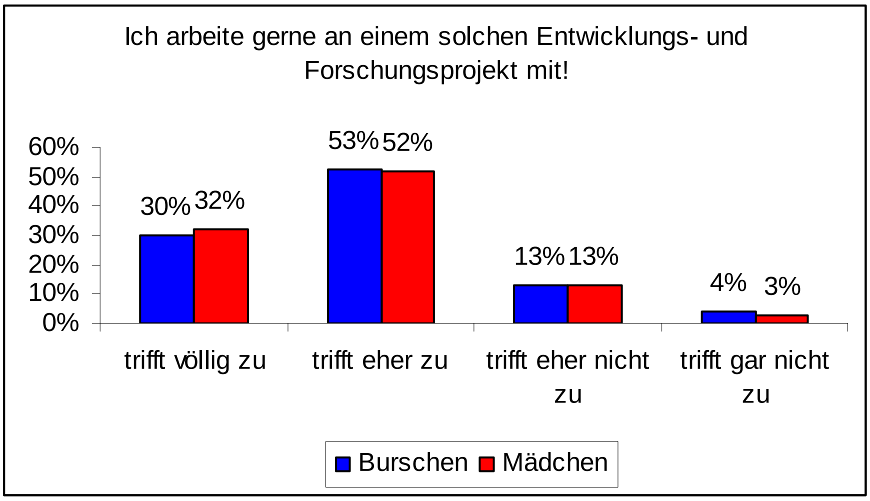


Für viel mehr Schüler/innen – nämlich für 83% – trifft die Aussage „Ich arbeite gerne an einem solchen Entwicklungs- und Forschungsprojekt mit“ völlig bzw. eher zu. Dieses Ergebnis ist überaus erfreulich und bestärkt uns darin, Schüler/innen auch weiterhin aktiv in unsere Projekte als Forschungspartner mit einzubeziehen.

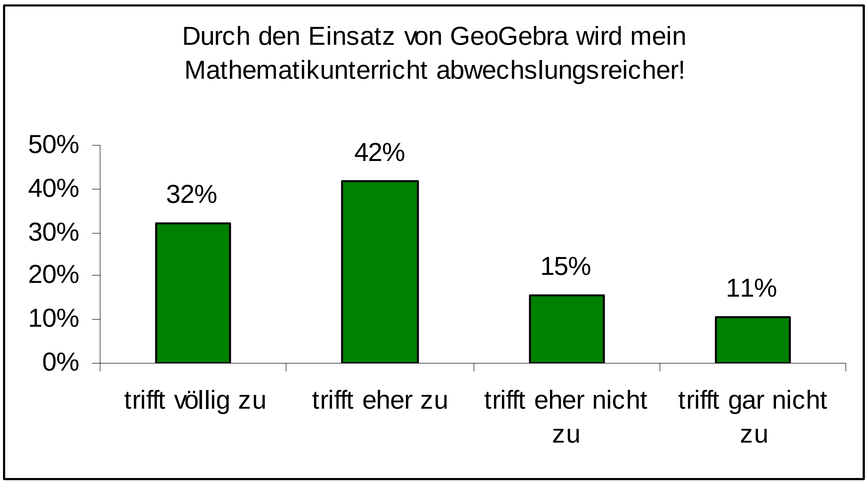


In dieser Frage herrscht bei Burschen und Mädchen eine relativ einheitliche Sichtweise!

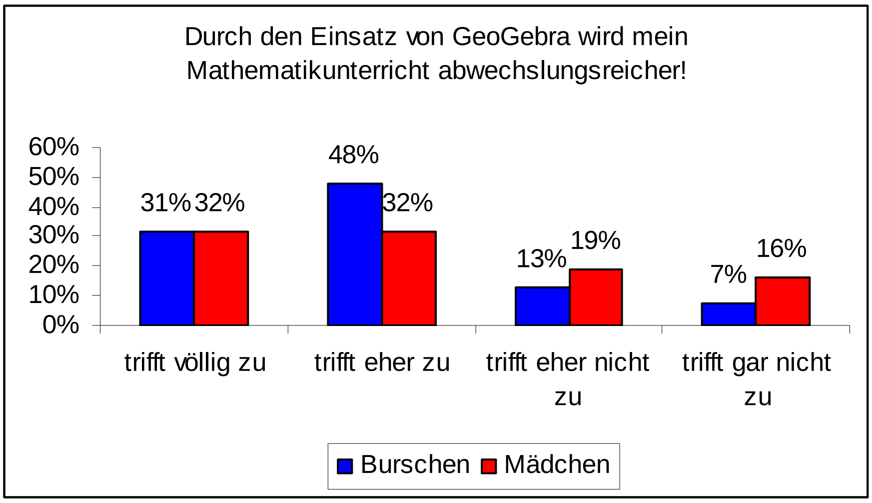
Die Mitarbeit an Forschungsprojekten ist also für beide Geschlechter spannend und interessant!



Fast drei Viertel der Schüler/innen stimmen auch der Aussage „Durch den Einsatz von GeoGebra wird mein Mathematikunterricht abwechslungsreicher!“ völlig bzw. eher zu.

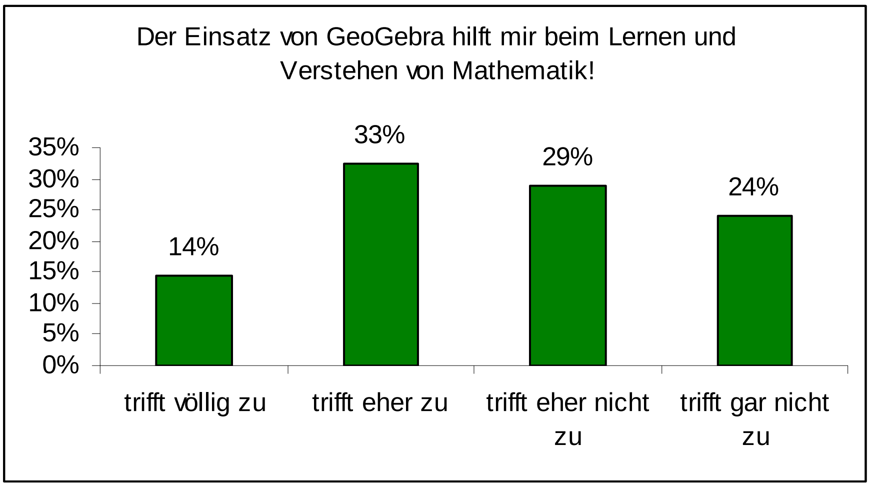


Wobei diese Aussage von Mädchen und Burschen recht unterschiedlich beurteilt wird!



Interessant ist, dass Mädchen und Burschen der Aussage „Durch den Einsatz von GeoGebra wird mein Mathematikunterricht abwechslungsreicher!“ fast gleichermaßen völlig zustimmen. Allerdings stimmen deutlich weniger Mädchen dieser Aussage eher zu und für deutlich mehr Mädchen trifft diese Aussage eher nicht bzw. gar nicht zu!

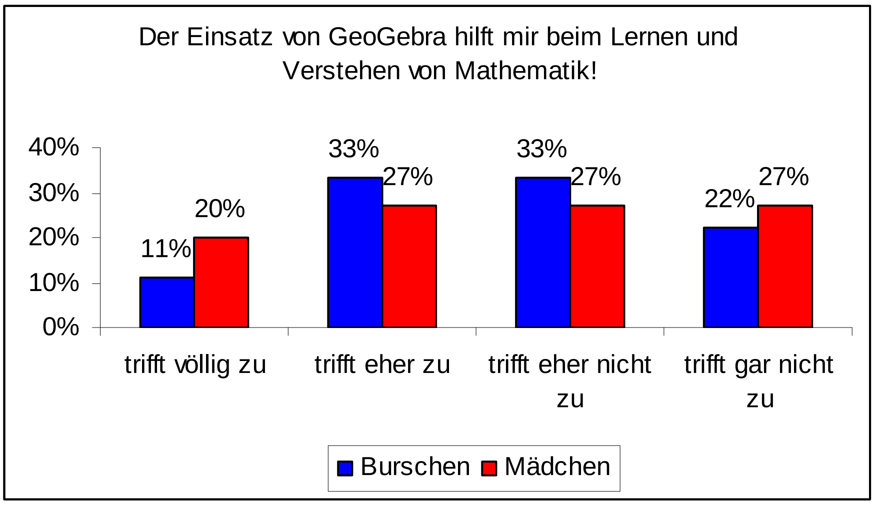
Weniger als die Hälfte der Schüler/innen – nämlich 47% – stimmt der Aussage „Der Einsatz von GeoGebra hilft mir beim Lernen und Verstehen von Mathematik!“ völlig bzw. eher zu.



Das bedeutet aber auch, dass die Hälfte der Schüler/innen eher nicht bzw. gar nicht den Eindruck haben, dass GeoGebra ihnen beim Lernen und Verstehen von Mathematik hilft.

Interessant dabei ist, dass deutlich mehr Mädchen der Aussage „Der Einsatz von GeoGebra hilft mir beim Lernen und Verstehen von Mathematik!“ völlig zustimmen.

20% der Mädchen, aber nur 11% der Burschen geben an, dass der Einsatz von GeoGebra beim Lernen und Verstehen von Mathematik hilft!



GeoGebraCAS – Didaktisches Computeralgebrasystem

gemeinsames Projekt von GeoGebra, Österreichisches GeoGebra institut,
RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und ACDCA

in Zusammenarbeit mit
der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich,
und der Johannes Kepler Universität Linz,

unterstützt vom Bundesministerium für
Unterricht, Kunst und Kultur

Teil 4 - Summary

Juni 2010

Verfasst von:
Peter Hofbauer, Markus Hohenwarter, Walter Klinger, Evelyn Stepancik

Mit Unterstützung der Projektmitarbeiter/innen:
Alfred Nussbaumer, Anton Nagl, Gabriele Bleier, Gerhard Egger, Günter Redl, Günter Schödl, Heidi Metzger-Schuhäker, Heike Wiesner, Heiner Juen, Helmut Heugl, Irma Bierbaumer, Jochen Maierhofer, Josef Böhm, Josef Lechner, Judith Hohenwarter, Matthias Kittel, Walter Wegscheider
und der Testlehrer/innen:
Alfred Eisler, Beate Thonhauser, Eduard Engler, Egmond Vogel, Elisabeth Schmidt, Georg Frühwirth, Gerhard Egger, Günter Kienreich, Günter Redl, Günter Schödl, Josef Lechner, Jutta Braun, Klinger Walter, Lindner Andreas, Nagl Anton, Willhelm Haller, Wolfgang Fischer

Summary

Intentionen des Projekts GeoGebraCAS

Seit im Jahr 2006 im Rahmen der internationalen ACDCA&Derive-Konferenz die Einstellung der Weiterentwicklung von Derive bekannt gegeben wurde und der TI-Nspire als Nachfolgeprodukt mit wenig Erfolg und ohne geeignete didaktische Ausrichtung am europäischen Markt eingeführt wurde, herrschte in Österreich in den allgemeinbildenden Schulen und Teilen der berufsbildenden Schulen Verunsicherung hinsichtlich des schon lange erfolgreich bestehenden Einsatzes von symbolischen technologischen Hilfsmitteln im Mathematikunterricht. Parallel dazu hat sich das österreichische Open Source Produkt GeoGebra rasant von Österreich aus über die ganze Welt verbreitet. Im Zuge dieser Verbreitung wurde die dynamische Geometriesoftware GeoGebra um eine dynamische Tabellenkalkulation neben der bereits breit akzeptierten dynamischen Geometrie ergänzt. Gleichzeitig mit diesen Entwicklungen rund um GeoGebra wurde versucht, weitere neue Computeralgebrasysteme (z. B.: Maxima, WIRIS) im schulischen Kontext zu erproben. Keines dieser Systeme konnte sich jedoch flächendeckend durchsetzen! Keines dieser Systeme erfüllte vollständig und zufriedenstellend die didaktischen Erwartungen der erfahrenen CAS-Community! Wenige der neuen Computeralgebrasysteme konnten sich an einzelnen Standorten etablieren. Daher lag es nahe und fast auf der Hand, das mutige Unternehmen – GeoGebra mit einem didaktischen CAS auszustatten – zu starten.

Bei einem Treffen der Initiativen GeoGebra, Österreichisches GeoGebra Institut, RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und ACDCA im Herbst 2009 in Linz wurde ein Konzept zur Umsetzung des Projekts GeoGebraCAS entwickelt und kurz darauf dem bm:ukk vorgelegt. Ende November 2009 wurde von MR DI Dr. Christian Dorninger und Mag. Walter Klinger ein Werkvertrag für die erste Projektphase, deren Ziel die Entwicklung von GeoGebraCAS sowie der Erstellung und Evaluation didaktischer Begleitmaterialien war, unterzeichnet.

Dieses Projekt zeichnet sich durch die Zusammenarbeit von Universitäten, Pädagogische Hochschulen und Schulen aus und ermöglicht durch diese Verbindung von Wissenschaft, Forschung, Entwicklung und Schulwirklichkeit vielseitige, befruchtende Arbeitsbedingungen. Außerdem ist mit dieser Zusammenarbeit gewährleistet, dass die Vertreter/innen der Initiative ACDCA, des RFDZ für Mathematik und Informatik der PH NÖ und das GeoGebra-Team um Univ.-Prof. Dr. Hohenwarter ihre Kompetenzen und ihr Wissen aus langjähriger CAS-Tradition in Österreich einbringen und somit bestmöglich zusammenwirken können.

Die organisatorischen Aufgaben wurden in Absprache mit der Initiative ACDCA bei einem Medienvielfaltstreffen im November 2009 auf die beiden Institutionen RFDZ für NÖ und GeoGebra aufgeteilt. Die Entwicklung des GeoGebraCAS übernahm das Team um Dr. Hohenwarter, die didaktische Konzeption der Begleitmaterialien und die Betreuung der Testlehrer/innen sowie die Evaluationskonzepte wurden vom RFDZ in Zusammenarbeit mit ACDCA und Frau Dr. Judith Hohenwarter entwickelt und durchgeführt. ACDCA übernahm die Hauptverantwortung für die Entwicklung der Unterrichtsmaterialien.

Die Berufung von Dr. Markus Hohenwarter zum Professor für Didaktik der Mathematik an der Johannes Kepler Universität Linz schuf ideale Bedingungen für diese Entwicklung und den Einsatz moderner Technologien im Mathematikunterricht ausgehend von der österreichischen Schullandschaft.

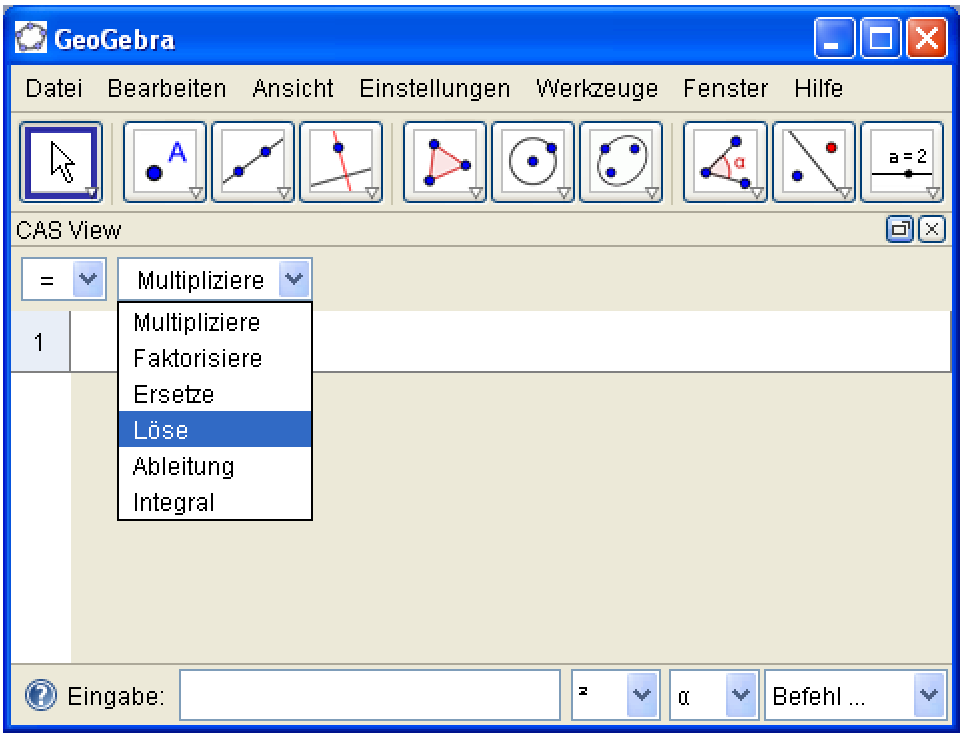
Bei den ersten Treffen wurde auch festgelegt, mit welcher Blickrichtung die Entwicklung eines didaktischen CAS erfolgen soll:

> *Unter einem didaktischen CAS verstehen wir ein CAS, das nicht nur möglichst exakte mathematische Bearbeitung ermöglicht, sondern auch durch Benutzerfreundlichkeit und einer geeigneten Grundkonzeption der Oberfläche den Lernprozess von Schüler/innen (besonders ab der 3. Klasse – 7. Schulstufe) bestmöglich unterstützt. Es sollen also in möglichst vielen Bereichen (beginnend bei der elementaren Algebra) Zugänge zur mathematischen Begriffsbildung und zu mathematischen Denk- und Modellbildungsprozessen unterstützt werden. Die damit mögliche Interaktion zwischen geometrischer und algebraischer Sichtweise mathematischer Inhalte soll schon frühzeitig die unterschiedlichen Begabungen der Schüler/innen während des mathematischen Lernprozesses ansprechen.*

Ziel des Projekts war und ist die Vorbereitung eines neuen Standards für Technologieeinsatz im Mathematikunterricht in Österreich mit internationaler Blickrichtung.

Arbeit am GeoGebraCAS

Im Fokus der Projektarbeit stand die Anpassung des CAS an die Erfordernisse des Unterrichtseinsatzes. Es zeigte sich, dass die Beschäftigung mit dem in GeoGebra intern verwendeten CAS *Mathpiper* mehr Aufmerksamkeit auf sich zog als ursprünglich beabsichtigt. Die Entwicklung des GeoGebraCAS erfordert notwendigerweise auch die Weiterentwicklung des integrierten mathematischen Kernels. Die Erfahrungen bei der Entwicklung der Unterrichtsmaterialien machten es notwendig, die vorhandenen Befehle zu adaptieren und neu zu orientiert sowie zusätzlich Befehle und Manipulationsmöglichkeiten zu schaffen. Die Entwickler von Mathpiper führten daraufhin die erforderlichen Entwicklungsarbeiten durch. Wichtig für das GeoGebraCAS ist aber auch, dass die Schnittstelle zwischen GeoGebra und dem verwendeten CAS in der Konzeption bereits so angelegt wurde, dass ein Austausch des Hintergrund-CAS jederzeit möglich sein wird, falls das derzeit gewählte CAS den Anforderungen nicht entsprechen sollte. Damit soll eine geringe Abhängigkeit von den vorhandenen CAS-Systemen gewährleistet werden.



GeoGebraCAS Fenster

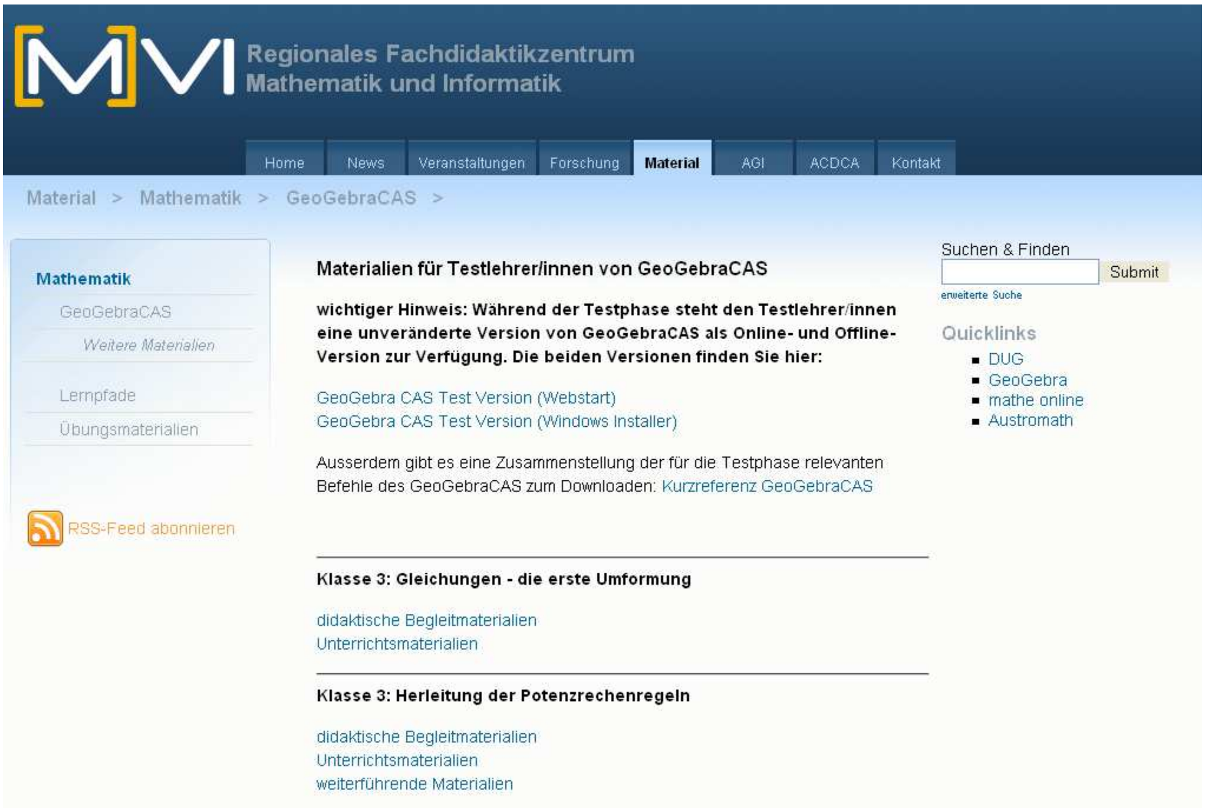
Die bisher im Projekt gemachten Erfahrungen eröffneten eine neue Sichtweise für die weitere Schwerpunktssetzung und den Zeitplan. Besonders wichtig für die Projektgruppe war das Erleben von Schwierigkeiten beim Zusammenwirken von CAS und didaktischer Umsetzung für den Unterricht. Dabei können drei Sichtweisen angedacht werden:

1) Zuerst soll das CAS vollständig entwickelt sein und danach erfolgen die Oberflächendiskussion sowie die didaktische Betrachtungsweise der Implementierung.
2) CAS und didaktische Aspekte werden parallel in Wechselwirkung weiterentwickelt
3) Die didaktischen Konzeptionen und Materialien werden ohne vollständige Umsetzungsmöglichkeit entwickelt und erst nachträglich getestet

Der im Projektzeitraum gegangene Weg 2) ist schwierig und bedarf einer hohen Frustrationstolleranz bei den Entwicklern/innen wie Testern/innen. Dies ist jedoch nicht überraschend, da es sich bei der getesteten Version um eine pre-α-Version handelt.

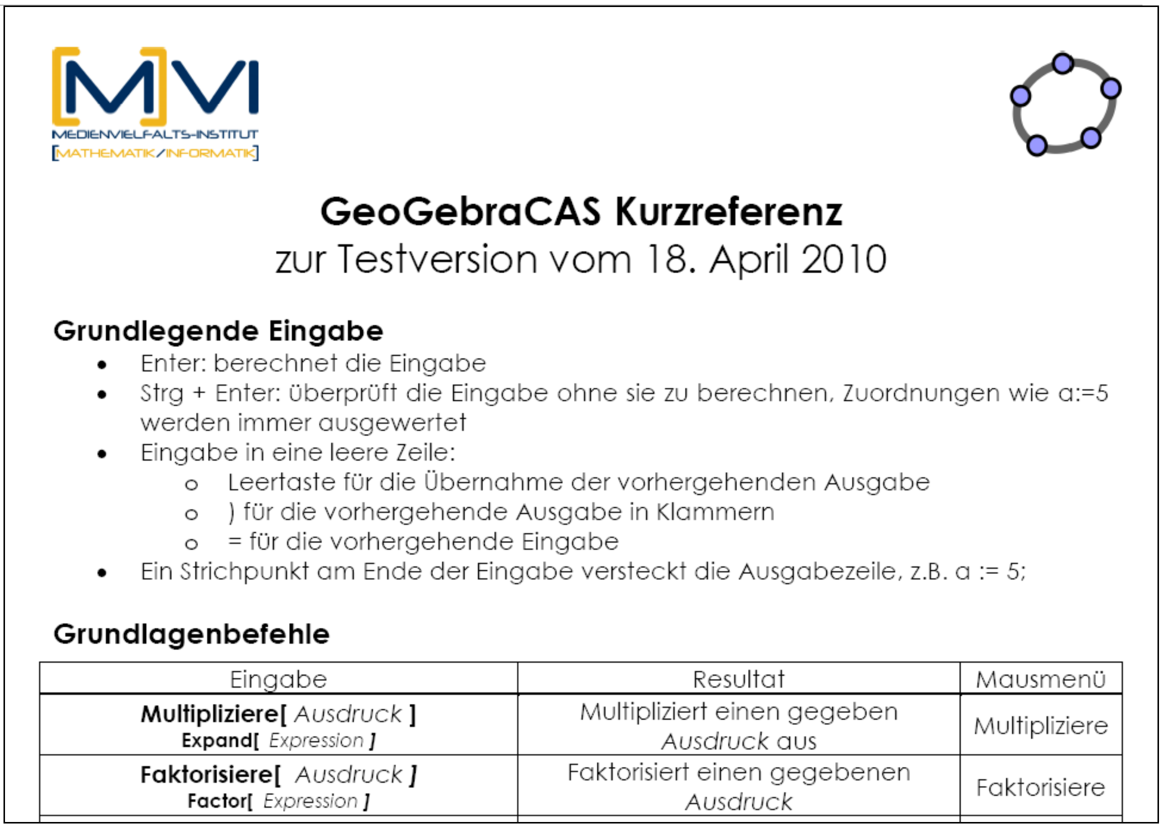
Dissemination

Zur Dissemination des GeoGebraCAS und der dazu entwickelten Unterrichts- und Begleitmaterialien wurden die bisher schon oft erprobten und bewährten Wege der RFDZ-Website und Mailings genützt.



Ausschnitt der RFDZ Website mit den GeoGebraCAS Materialien

Die Lehrer/innen der ersten Testklassen erhielten im März 2010 eine Kurzanleitung zur Bedienung der pre-α-Version von GeoGebraCAS und zur Verwendung der Unterrichtsmaterialien sowie der didaktischen Begleitmaterialien. Zu den 16 verschiedenen Unterrichtsmaterialien wurden unter anderem Arbeitsblätter, teilweise Lösungsblätter, weiterführende Materialien und die didaktischen Begleitmaterialien mit vielen Hinweisen rund um den Unterricht mit GeoGebraCAS auf der Webseite des RFDZ angeboten.



GeoGebraCAS Kurzreferenz
zur Testversion vom 18. April 2010

Grundlegende Eingabe

- Enter: berechnet die Eingabe
- Strg + Enter: überprüft die Eingabe ohne sie zu berechnen, Zuordnungen wie a:=5 werden immer ausgewertet
- Eingabe in eine leere Zeile:
  - Leertaste für die Übernahme der vorhergehenden Ausgabe
  -) für die vorhergehende Ausgabe in Klammern
  - = für die vorhergehende Eingabe
- Ein Strichpunkt am Ende der Eingabe versteckt die Ausgabezeile, z.B. a := 5;

Grundlagenbefehle

Eingabe	Resultat	Mausmenü
Multipliziere[*Ausdruck* **]** **Expand[** *Expression* **]**	Multipliziert einen gegeben Ausdruck aus	Multipliziere
Faktorisiere[*Ausdruck* **]** **Factor[** *Expression* **]**	Faktorisiert einen gegebenen Ausdruck	Faktorisiere

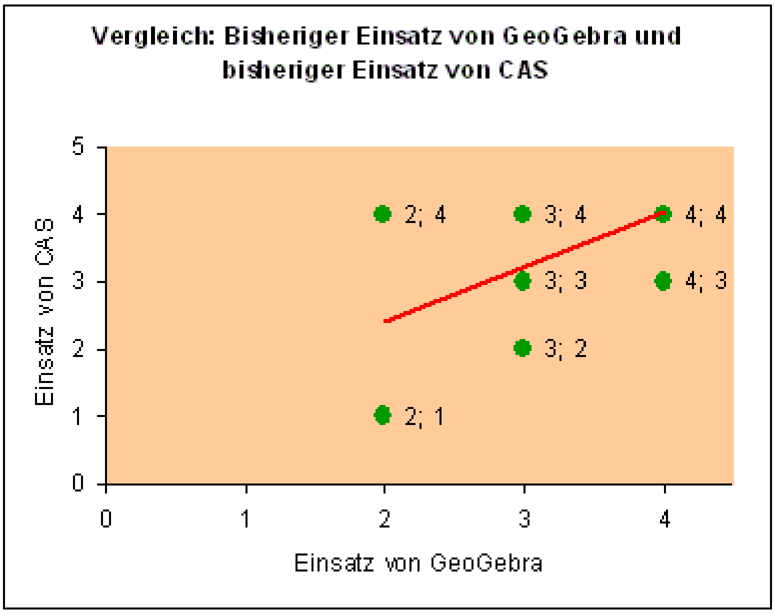
Ausschnitt der GeoGebraCAS Kurzanleitung

Die Arbeit in den Klassen erfolgte in dem kurzen Zeitraum Ende April/Anfang Mai bis Juni 2010. Bei dieser Testphase wurden Unterrichtsmaterialien zu den Themenbereichen gewählt, die den Nutzen für den Lernprozess von Schüler/innen besonders aufzeigen sollen. Die Materialien wurden vorab vom Entwickler/innenteam genau getestet und teilweise mit zusätzlichen Anleitungen und Hilfsmaterialien versehen. Nur die für diese Materialien verwendeten Befehle und Optionen wurden einer Implementierung im GeoGebraCAS unterzogen. Vielschichtige andere Materialien – auch wenn sie sehr nahe an den zu Testenden zu sehen sind – konnten teilweise nicht mit Erfolg bearbeitet werden. Es gab eine Fülle von interessanten Rückmeldungen der Testlehrer/innen. Die Erfahrungen dieser Evaluation werden zu einer Überarbeitung der bereits bestehenden didaktischen Begleitmaterialien führen und eine Basis für eine breitere Weiterentwicklung von Unterrichtsmaterialien und der Oberflächenentwicklung darstellen.

Erste Evaluationsergebnisse

Wie schon in den vorhergehenden Ausführung dargestellt, diente das GeoGebraCAS Projekt nicht nur dazu ein didaktisches Computeralgebrasystem in GeoGebra zu implementieren, sondern auch dazu, einhergehend mit der CAS-Entwicklung didaktische Begleitmaterialien zu erstellen und zu testen sowie Rückmeldungen bezüglich der bedienerfreundlichen Gestaltung der CAS-Oberfläche und der Begleitmaterialien zu erhalten. Die umfangreichen Evaluationsansätze (2 online Lehrer/innenfragebögen, 1 online Schüler/innenfragebogen, Leitfrageninterviews mit Schüler/innen, Testaufgaben mit gefilmten Schüler/innenlösungswegen und Kurzfragebogen) sind im Abschnitt 3 „*Evaluation*“ (S. 260 ff.) ausführlich beschrieben. Eine endgültige Auswertung der Ergebnisse wird erst mit Herbst 2010 vorliegen, da einerseits zum Zeitpunkt der Berichtslegung die Datenerhebung in allen Bereichen noch nicht abgeschlossen ist und andererseits das umfangreiche Datenmaterial erst im Sommer/Herbst 2010 ausgewertet kann.

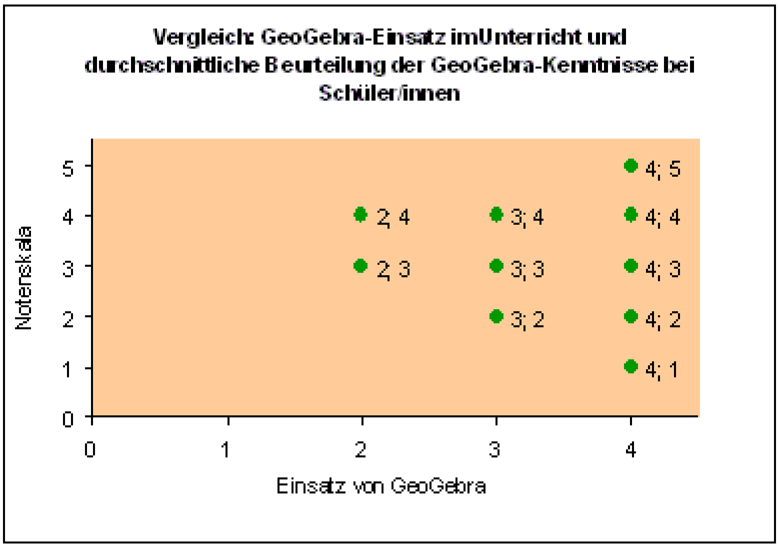
Jedenfalls zeichnen die bisher ausgewerteten Daten ein spannendes Bild, das hier kurz skizziert werden soll.
Dass die meisten der 15 Testlehrer/innen GeoGebra bisher im Unterricht oft bzw. sehr oft verwendet haben, verwundert nicht. Dass die meisten der 15 Testlehrer/innen bisher auch ein CAS im Unterricht oft bzw. sehr oft verwendet haben, verwundert ebenso wenig.



Bei den Punkten (x;y) der Darstellung entspricht x dem Einsatz von GeoGebra und y dem Einsatz von Computeralgebrasystemen im Unterricht.

1 … noch nie
2 … selten
3 … oft
4 … sehr oft

Dennoch ist die Tatsache, dass bei den meisten der hier ausgewählten Testlehrer/innen ein Computeralgebrasystem und GeoGebra bereits parallel im täglichen Unterricht oft bzw. sehr oft verwendet werden, erwähnenswert. Daraus lässt sich einmal mehr ableiten, dass das Vorhaben des GeoGebraCAS Projekts – nämlich ein CAS mit GeoGebra zu verbinden – ein längst fälliges war.



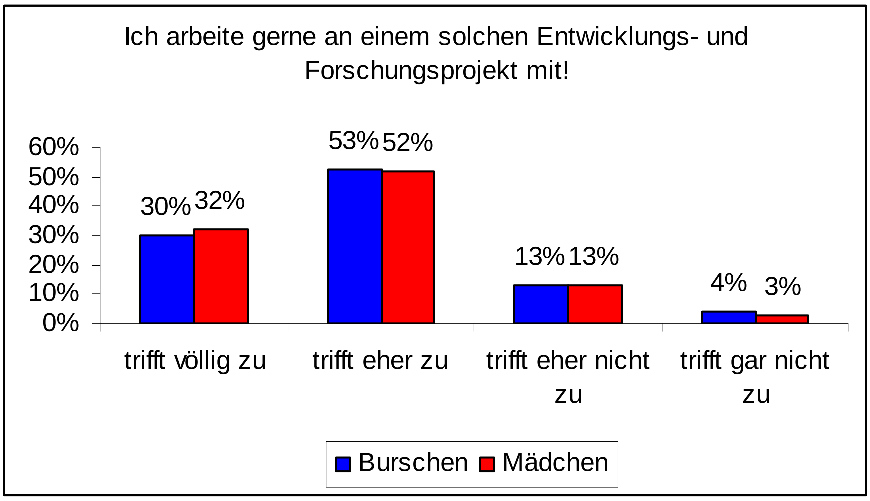
Bei den Punkten (x;y) der Darstellung entspricht x dem Einsatz von GeoGebra mit der Skala:

1 … noch nie
2 … selten
3 … oft
4 … sehr oft

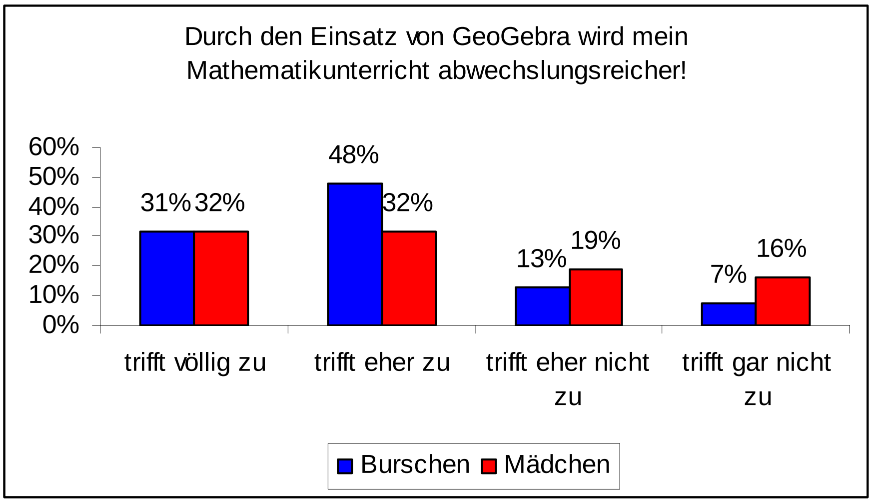
Der y-Wert gibt an, welche Schulnote die Lehrer/innen ihren Schüler/innen für deren GeoGebra-Kenntnisse geben.

Erstaunlich ist aber, dass die Lehrer/innen die durchschnittlichen Erfahrungen ihrer Schüler/innen mit GeoGebra weniger gut bewerten. Die hier dargestellte Notenskala von 1 bis 5 entspricht den üblichen Noten „Sehr gut“ bis „Nicht genügend“. In einer weiteren

Befragung wird zu hinterfragen sein, warum die Lehrer/innen die durchschnittlichen Erfahrungen ihrer Schüler/innen mit GeoGebra trotz häufigem GeoGebra-Einsatz im Unterricht eher gering bewerten.
Weitere spannende Ergebnisse hat die schon erfolgte Auswertung des Schüler/innen-Kurzfragebogens ergeben.



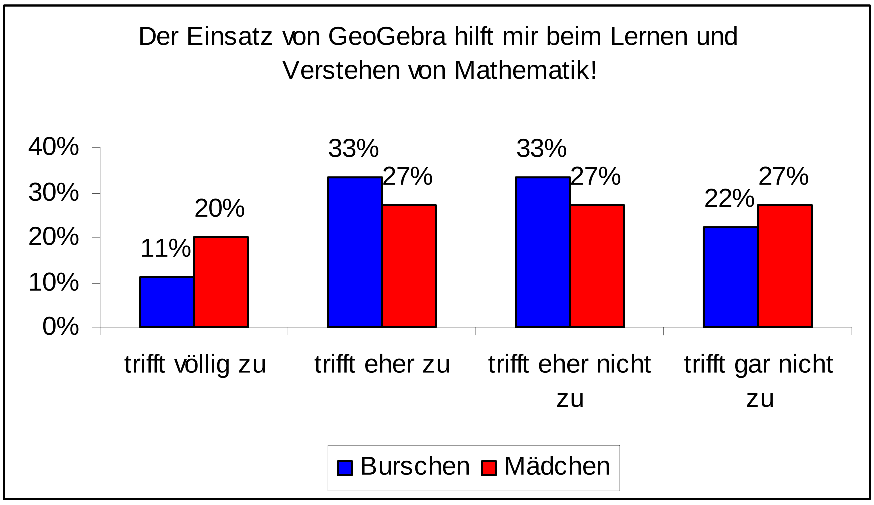
Überaus erfreulich für uns als Forscher/innen ist, dass Mädchen und Burschen gleichermaßen gerne an Entwicklungs- und Forschungsprojekten mitarbeiten. Diese Tatsache bestärkt uns darin, Schüler/innen weiterhin in unsere Projekte mit einzubeziehen.



[1]

Ein deutlicher Unterschied zwischen den Geschlechtern zeigt sich aber bei dem Item „Durch den Einsatz von GeoGebra wird mein Mathematikunterricht abwechslungsreicher!", obwohl grundsätzlich gilt, dass diese Aussage auf mehr als die Hälfte der Schüler/innen völlig bzw. eher zutrifft. Im Detail betrachtet, besagen die Ergebnisse, dass dieser Aussage von Mädchen und Burschen gleichermaßen völlig zugestimmt wird. Allerdings trifft diese Aussage auf deutlich weniger Mädchen als Burschen nur noch eher zu und ein höherer Anteil von Mädchen kann dieser Aussage eher nicht bzw. gar nicht zustimmen.

[1] Die Summe von 99% bei den Burschen ergibt sich aufgrund von Rundungsfehlern. Da aber erst mit der zweiten Nachkommastelle eine Genauigkeit von 100% erreicht wird, verzichtet diese Darstellung darauf.



[2]

Ganz im Gegensatz zum obigen Item sind die Ergebnisse des Items „Der Einsatz von GeoGebra hilft mir beim Lernen und Verstehen von Mathematik!“. Grundsätzlich wurde auch dieser Aussage von den Schüler/innen eher zugestimmt, denn fast die Hälfte der Schüler/innen kann dieser Aussage völlig bzw. eher zustimmen. Aber hier zeigt sich ganz deutlich ein genderspezifischer Unterschied, denn die Aussage „Der Einsatz von GeoGebra hilft mir beim Lernen und Verstehen von Mathematik!“ trifft auf 20% der Mädchen und nur auf 11% der Burschen völlig zu. Daraus lässt sich schließen, dass der Einsatz von GeoGebra rund der Hälfte der Schüler/innen beim Lernen und Verstehen von Mathematik hilft, bei Mädchen aber noch ein wenig mehr.

Insgesamt also zeigen die ersten Evaluationsergebnisse interessante Tendenzen und Ergebnisse auf, wenngleich die befragte Gruppe mit 15 Lehrer/innen und 20 Testklassen sowie der bereits ausgewertete Schüler/innenfragebogens von 5 Klassen mit 85 Schüler/innen derzeit etwas klein ist.

Ausblick

Die Intentionen des Projekts – ein didaktisches CAS in GeoGebra zu implementieren – waren und sind völlig richtig und zeitgemäß. Der gewählte Weg war und ist kein leichter! Die Erfahrungen aus dieser ersten Projektphase zeigen, dass

- die Arbeit am GeoGebraCAS weitergeführt werden muss,
- die Arbeit an den didaktischen Unterrichts- und Begleitmaterialien ebenso fortgeführt werden muss und
- dass die Evaluationsansätze vielversprechend sind und die finale Datenauswertung sicher noch aufschlussreiche Ergebnisse liefern wird.

[2] Die Summe von 99% bei den Burschen und 101% bei den Mädchen ergibt sich aufgrund von Rundungsfehlern. Da aber erst mit der zweiten Nachkommastelle eine Genauigkeit von 100% erreicht wird, verzichtet diese Darstellung darauf.

Darüber hinaus hat sich aufgrund der bisher gemachten Erfahrungen ein neuer, etwas modifizierter Zeitplan für die zweite Projektphase ergeben:

- Die bereits beim Projekt mitarbeitenden Testklassen sollen im Unterricht mit den verbesserten Versionen im Herbst weiterarbeiten (ca. 20 Testklassen).
- Die Oberfläche von GeoGebraCAS soll über den Sommer verbessert werden. Das betrifft die Menüführung, die Symbole für die Bedienung, die didaktischen Bearbeitungsmöglichkeiten sowie die systematische Öffnung und Optimierung der Verwendungsmöglichkeiten von GeoGebraCAS.
- Die Evaluationsergebnisse sollen Aufschlüsse über den Entwicklungstand geben und Orientierungshilfe für die weitere Vorgangsweise sein. Speziell sollen Aufschlüsse für das geeignete Zusammenwirken der drei Bereiche dynamische Geometrie, Tabellenkalkulation und CAS gewonnen werden. Diese dynamische Wechselwirkung soll weiterentwickelt werden.
- Die erforderlichen und teilweise bereits erfolgten Modifikationen des CAS sollten getestet werden.
- Die didaktischen Begleitmaterialien sollen überarbeitet und erweitert werden.
- Die Zusammenarbeit mit der MathemaTech Gruppe in Oberösterreich (Universit't Linz, Pädagogische Hochschulen und Landesschulrat) soll die Arbeitskapazitäten erhöhen.
- Im Jänner 2010 soll eine neue Evaluationsphase mit einer Verdoppelung der Testklassen auf ca. 40 erfolgen. Dazu soll es im Herbst einen Aufruf des bm:ukk für alle Schularten und Schultypen geben.
- Die Evaluationsansätze für diese zweite Testphase sind in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. Heike Wiesner (Hochschule für Wirtschaft du Recht, Berlin) bereits in der Konzeption.
- Im August 2011 soll die Version GeoGebraCAS bei einer internationalen Konferenz in Hagenberg (OÖ) der breiten Öffentlichkeit vorgestellt werden und ab Herbst 2011 frei zur Verfügung stehen. Bei dieser Konferenz soll es einerseits eine wissenschaftliche und andererseits eine didaktische Schiene für österreichische Lehrer/innen geben.
- Die Dissemination der Aktivitäten und Ergebnisse (Unterrichtmaterialien und didaktische Begleitmaterialien) wird bei Fortbildungsveranstaltungen sogenannten „GeoGebraCAS-Tagen“ für die Sekundarstufe 1 und 2 in allen Bundesländern stattfinden.

Diese zeitliche und inhaltliche Planung ermöglicht die konsequente Entwicklung einer didaktisch orientierten Software für den Mathematikunterricht und kann als Beitrag zu einem neuen Standard für die standardisierte und neuorientierte Reifeprüfung angesehen werden. Die Entwicklung eines CAS und speziell eines Open-Source-Produkts wie GeoGebraCAS mit einer dynamischen Ausrichtung kann nie als vollkommen abgeschlossen betrachtet werden, erhöht aber die Möglichkeiten für einen modernen Mathematikunterricht, der den Lernprozess der Schüler/innen unterstützt.