

# Approximations d'intégrales

(Bernard Egger)

Une première façon de trouver la valeur approchée d'une intégrale est, quand cela est possible de remplacer la fonction par un développement en série entière.

Montrer aux étudiants à quoi correspond un tel développement dans son principe est largement facilité par Derive.

Nous n'envisagerons ici qu'un cas simple : celui de la fonction définie par

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

$$f(x) := \text{SIN}(x) + \text{COS}(x)$$

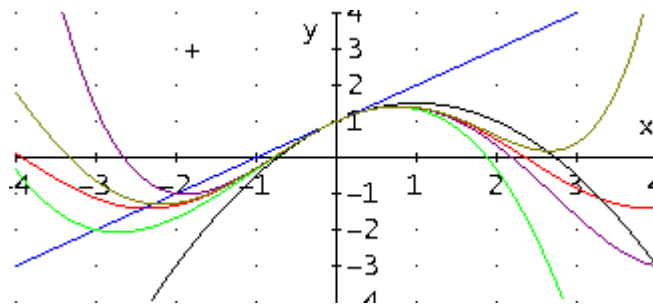
Derive permet évidemment de trouver un développement limité à des ordres importants de cette fonction :

$$\text{TAYLOR}(f(x), x, 4) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x + 1$$

On peut alors tracer sur un même graphique ces différentes fonctions polynômes ainsi que la courbe de la fonction  $f$ . On constatera que les courbes sont de plus en plus "proches" de celle de  $f$ . On peut obtenir toutes ces courbes avec une seule instruction.

$$k := 0$$

$$\text{PROG}(k := k + 1, \text{TAYLOR}(f(x), x, 0, k))$$



Mais Derive 6 permet de mettre en évidence cette proximité plus dynamiquement.

Pour cela on construit une fonction dépendant d'un paramètre. En faisant varier ce paramètre

nous allons assister à une déformation "polynomiale" continue.

Pour simplifier notre travail on écrit des fonctions qui permettront cette variation et l'apparition de nouveaux arcs.

InputMode := Word

```
p1(x) :=
  If x < 0
    0
  If x ≥ 1/3
    1
    3·x

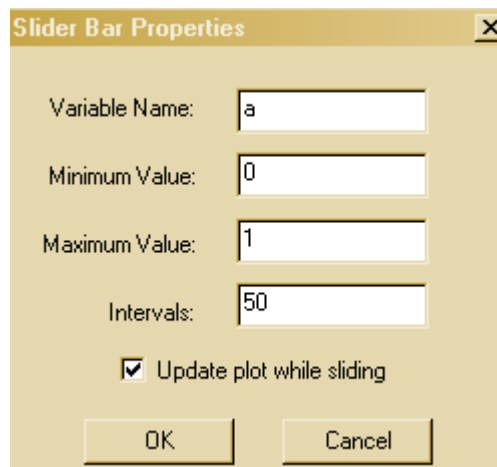
p2(x) :=
  If x < 1/3
    0
  If x ≥ 2/3
    1
    3·(x - 1/3)

p3(x) :=
  If x < 2/3
    0
  If x ≥ 1
    1
    3·(x - 2/3)
```

Puis une fonction g définie de la façon suivante :

$$g(x) := 1 + x + p1(a) \cdot \left( -\frac{x^2}{2} \right) + p2(a) \cdot \left( -\frac{x^3}{6} \right) + p3(a) \cdot \frac{x^4}{24}$$

On passe dans la fenêtre graphique 2D. Et l'on associe à la variable a une barre de paramètres avec les propriétés suivantes

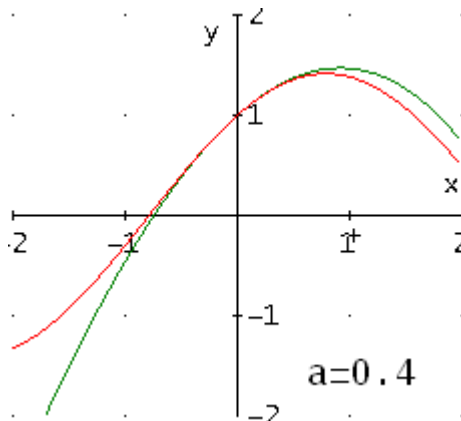


The image shows a 'Slider Bar Properties' dialog box with the following fields and options:

- Variable Name: a
- Minimum Value: 0
- Maximum Value: 1
- Intervals: 50
- ☒ Update plot while sliding
- Buttons: OK, Cancel

On commence par tracer la courbe représentative de g, puis celle de f (l'ordre est important). On peut alors agir sur la barre de paramètres pour voir la courbe de g se modifier continuellement.

Graphiquement on peut faire l'hypothèse que la fonction g quand  $a = 1$  donne une bonne approximation de f sur l'intervalle  $[-1,1]$ .



$$\text{SUBST}(g(x), a, 1) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x + 1$$

On peut donc approcher l'intégrale de f sur cet intervalle par celle de g. On a :

$$\int \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x + 1 \right) dx = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x + 1 \right) dx = \frac{101}{60}$$

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x + 1 \right) dx$$

$$1.683333333$$

$$\int_{-1}^1 (\text{SIN}(x) + \text{COS}(x)) dx = 2 \cdot \text{SIN}(1)$$

$$2 \cdot \text{SIN}(1)$$

$$1.682941969$$

# Les méthodes classiques d'approximations et leur rapidité de convergence

Nous allons regarder rapidement quelques méthodes classiques de calcul d'intégrales approchées et comparer leur rapidité de convergence sur un exemple.

## Les méthodes classiques

### La méthode des rectangles

Elle est basée sur les deux formules possibles :

Rectangles à gauche:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Rectangles à droites:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Derive possède une fonction interne permettant le calcul de la somme à gauche :

$$\text{LEFT\_RIEMANN}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) = \frac{1879}{2520}$$

Pour la somme à droite, il est facile de construire une fonction :

$$\text{right\_riemann}(u, x, a, b, n) := \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot \text{SUBST}\left(u, x, a + \frac{k \cdot (b-a)}{n}\right)$$

$$\text{right\_riemann}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) = \frac{1627}{2520}$$

### La méthode des trapèzes

Elle est définie par la formule :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} h \sum_{k=1}^n (f(a + kh) + f(a + (k+1)h))$$

avec  $h=(b-a)/n$ .

L'approximation fournie par la méthode des trapèzes apparaît comme la moyenne

arithmétique des approximations données par les deux méthodes des rectangles.  
On peut donc définir une fonction:

$$\text{trap}(u, x, a, b, n) := \frac{1}{2} \cdot (\text{LEFT\_RIEMANN}(u, x, a, b, n) +$$

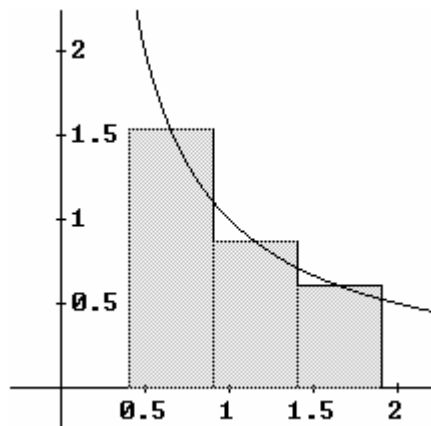
$$\text{right\_riemann}(u, x, a, b, n))$$

$$\text{trap}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) = \frac{1753}{1260}$$

$$\frac{\frac{1879}{2520} + \frac{1627}{2520}}{2} = \frac{1753}{2520}$$

### La méthode du point milieu

La méthode du point - milieu utilise des rectangles , mais ne fournit pas un encadrement de l'intégrale. La méthode du point - milieu utilise des rectangles , mais ne fournit pas un encadrement de l'intégrale. On obtient par exemple :



La formule utilisée dans le calcul approché est :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + kh + \frac{h}{2}\right) = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(2k+1)h}{2}\right)$$

Sur Derive, on a

```
point_milieu(u, x, a, b, n, h) :=
  Prog
  h := (b - a)/n
  RETURN h * Σ(SUBST(u, x, a + (2*k + 1) * h/2), k, 0, n - 1)
```

$$\text{point\_milieu}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) = \frac{479378}{692835}$$

$$\text{APPROX}\left(\text{point\_milieu}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right), 5\right) = 0.6919$$

Pour obtenir la représentation graphique, on passe par un petit programme qui s'écrit en deux temps :

$$\text{rectangle}(a1, b1, a2) := \begin{bmatrix} a1 & 0 \\ a1 & b1 \\ a2 & b1 \\ a2 & 0 \end{bmatrix}$$

La procédure "rectangle" permet de tracer un rectangle dont les sommets sont les points de coordonnées :

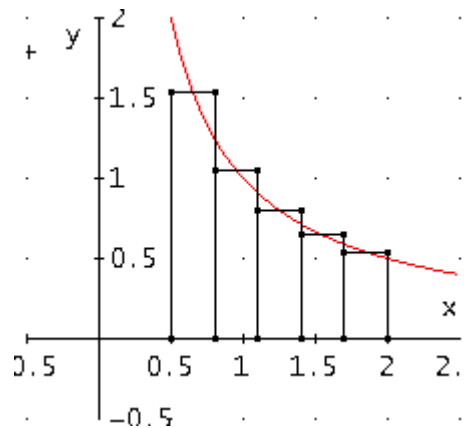
(a1,0),(a1,b1),(a2,b1),(a2,0) (indiquées dans la matrice).

```
graph_point_milieu(u, x, a, b, n, h, gr, k, a1, b1, a2) :=
  Prog
  gr := [[]]
  h := (b - a)/n
  k := 0
  Loop
  a1 := a + k * h
  b1 := SUBST(u, x, a1 + h/2)
  a2 := a1 + h
  gr := INSERT(rectangle(a1, b1, a2), gr, 0)
  k := k + 1
  If k = n
  RETURN gr
```

Le programme "graph\_point\_milieu" permet de construire un ensemble de rectangles successifs, rangés dans une "grande" matrice nommée "gr".

Ne pas oublier évidemment de cocher l'option "points reliés".

$$\text{graph\_point\_milieu}\left(\frac{1}{x}, x, 0.5, 2, 5\right)$$



## La méthode de Simpson

On approche l'intégrale par une somme d'intégrales de fonctions polynômes du second degré. La formule de calcul est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2}{3}h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + kh + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)h) + \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)$$

Sous cette forme, on peut déterminer le lien entre la formule de Simpson et celles des méthodes des rectangles et celle du point-milieu. On a :

$$\text{simpson}(a, b) = \frac{2}{3} \text{point\_milieu}(a, b) + \frac{1}{6} \text{left\_riemann}(a, b) + \frac{1}{6} \text{right\_riemann}(a, b)$$

Sur Derive, on aura

$$\begin{aligned} \text{simpson}(u, x, a, b, n, h) &:= \frac{2}{3} \cdot \text{point\_milieu}(u, x, a, b, n, h) + \\ &\frac{1}{6} \cdot (\text{LEFT\_RIEMANN}(u, x, a, b, n, h) + \text{right\_riemann}(u, x, a, b, n, h)) \end{aligned}$$

$$\text{simpson}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) = \frac{48408065}{69837768}$$

$$\text{APPROX}\left(\text{simpson}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right), 5\right) = 0.69315$$

## Petit récapitulatif

Examinons les 5 méthodes vues pour le calcul de l'intégrale et comparons le résultat obtenu avec la valeur que donne Derive pour ln2. On a :

$$\text{APPROX} \left( \begin{bmatrix} \text{LEFT\_RIEMANN}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) \\ \text{right\_riemann}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) \\ \text{trap}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) \\ \text{point\_milieu}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) \\ \text{simpson}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) \\ \text{LN}(2) \end{bmatrix}, 5 \right) = \begin{bmatrix} 0.74563 \\ 0.64563 \\ 0.69563 \\ 0.6919 \\ 0.69315 \\ 0.69314 \end{bmatrix}$$

La méthode de Simpson semble la plus précise, celles des trapèzes et du point-milieu à peu près équivalentes, et enfin celles des rectangles semblent beaucoup moins précises. On peut regarder cela de plus près :

$$\text{APPROX} \left( \begin{bmatrix} \text{LEFT\_RIEMANN}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) - \text{LN}(2) \\ \text{right\_riemann}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) - \text{LN}(2) \\ \text{trap}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) - \text{LN}(2) \\ \text{point\_milieu}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) - \text{LN}(2) \\ \text{simpson}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, 5\right) - \text{LN}(2) \end{bmatrix}, 5 \right) = \begin{bmatrix} 0.052487 \\ -0.047512 \\ 0.0024877 \\ -0.0012391 \\ 3.1245 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Peut-on préciser la précision de ces méthodes ?

Bien entendu, il existe des démonstrations classiques qui permettent sous certaines conditions d'étudier formellement cette précision.

Mais dans un premier temps, il peut être intéressant avec des étudiants qui ne connaissent pas le problème, d'avoir une approche plus expérimentale.

C'est le but de la deuxième partie de cet exposé.

## Etude de la rapidité de convergence



Nous partons de l'exemple que nous avons utilisé jusqu'à présent, en conservant une même démarche dans chaque cas.

Cette démarche sera exposée assez complètement sur les premiers cas et seulement évoquée pour les autres.

### La méthode des rectangles (à gauche)

On définit une nouvelle fonction qui mesure l'écart en valeur absolue entre le résultat retourné par la méthode des rectangles pour un nombre de subdivisions  $k$  et la valeur donnée par Derive pour  $\ln(2)$

$$\text{pr\_lr}(k) := \left| \text{LN}(2) - \text{LEFT\_RIEMANN}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, k\right) \right|$$

$$\text{APPROX}(\text{pr\_lr}(10), 20) = 0.02562422261$$

$$\text{APPROX}(\text{pr\_lr}(15), 20) = 0.01694429046$$

$$\text{APPROX}(\text{pr\_lr}(20), 20) = 0.01265620123$$

Pour étudier l'évolution de la précision en fonction du nombre de subdivisions, il est sans doute plus simple de passer au logarithme népérien (et même à l'opposé de ce logarithme puisqu'il ne s'agira que de nombres négatifs).

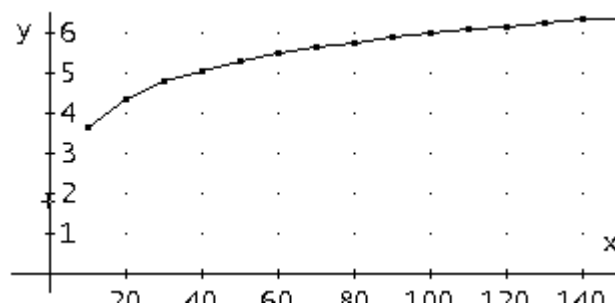
$$\text{log\_pr\_lr}(k) := -\text{LN}(\text{pr\_lr}(k))$$

$$\text{APPROX}(\text{log\_pr\_lr}(10), 3) = 3.66$$

$$\text{APPROX}(\text{log\_pr\_lr}(20), 3) = 4.37$$

On peut construire une table des valeurs pour quelques valeurs de  $k$

$$\text{TABLE}(\text{log\_pr\_lr}(k), k, 10, 150, 10)$$



On représente ce nuage dans un repère adapté (abscisses entre -10 et 150, ordonnées entre -1 et 7).

On obtient une courbe dont l'allure est logarithmique.

On cherche une "équation" de cet ajustement à l'aide de la fonction FIT (on passera en mode approché)

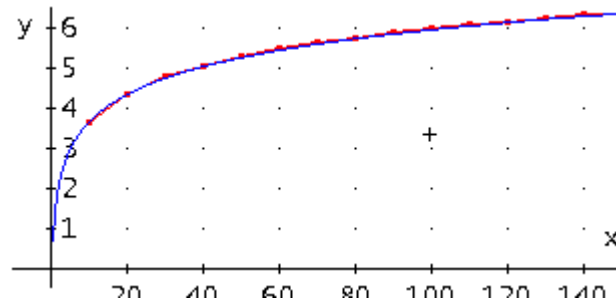
$$\text{APPROX}(\text{FIT}([x, a \cdot \text{LN}(x) + b], \text{TABLE}(\text{log\_pr\_lr}(k), k, 10, 150, 10)), 3)$$

$$1 \cdot \text{LN}(x) + 1.35$$

Quelle est la qualité de cet ajustement? Nous allons examiner la question sur un plan graphique.

TABLE(log\_pr\_lr(k), k, 10, 150, 10)

$$1 \cdot \text{LN}(x) + 1.35$$



L'ajustement semble être de très bonne qualité.

Si l'on appelle  $p(k)$  la précision en fonction de  $k$  ( $p(k) = \text{pr\_lr}(k)$ ), on a approximativement

$$p(x) :=$$

(remarquons que Derive nous oblige à définir une fonction  $p$  pour pouvoir ensuite l'utiliser formellement)

$$- \text{LN}(p(k)) = \text{LN}(k) + 1.35$$

$$\text{APPROX}(\text{EXP}(- \text{LN}(p(k)) = \text{LN}(k) + 1.35), 3)$$

$$p(k) = \frac{0.259}{k}$$

Résultat important qui montre que dans ce cas particulier (mais nous savons que ce résultat se généralise) l'erreur commise par la méthode des rectangles est inversement proportionnelles au nombre de subdivision.

On reprend la même démarche avec une autre fonction.

$$\int_0^1 \text{COS}(x) \, dx = \text{SIN}(1)$$

$$\text{APPROX}\left(\int_0^1 \text{COS}(x) \, dx\right) = 0.8414709848$$

$$\text{pr\_lr\_cos}(k) := |\text{SIN}(1) - \text{LEFT\_RIEMANN}(\text{COS}(x), x, 0, 1, k)|$$

$$0.9910073905 \cdot \text{LN}(x) + 1.514564526$$

APPROX(FIT([x, a·LN(x) + b], TABLE(- LN(pr\_tr\_cos(k)), k, 10, 150, 10)), 3)

$$0.994 \cdot \text{LN}(x) + 1.5$$

Nous retrouvons un résultat de même ordre de grandeur que le précédent.

### La méthode des trapèzes

Nous reprenons la même démarche avec l'approximation que nous donne la méthode des trapèzes.

On définit la fonction :

$$\text{pr\_trap}(k) := \left| \text{LN}(2) - \text{trap}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, k\right) \right|$$

On a par exemple les quelques résultats suivants:

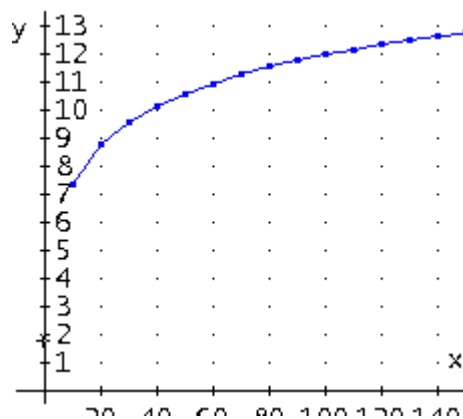
$$\text{APPROX}(\text{pr\_trap}(10)) = 0.0006242226157$$

$$\text{APPROX}(\text{pr\_trap}(20)) = 0.000156201234$$

Nous retrouvons la plus grande précision de la méthode des trapèzes par rapport à la méthode des rectangles.

On peut construire une table des valeurs

TABLE(- LN(pr\_trap(k)), k, 10, 150, 10)



L'allure du nuage est "logarithmique".

On tente à nouveau un ajustement de ce type pour l'oppos du logarithme de la précision.

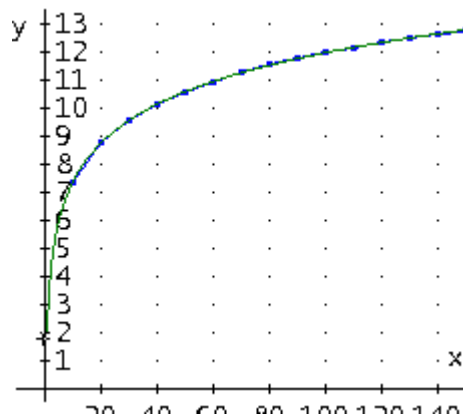
FIT([x, a·LN(x) + b], APPROX(TABLE(- LN(pr\_trap(k)), k, 10, 150, 10)))

$$\frac{287937 \cdot \text{LN}(x)}{143992} + \frac{6018175}{2169432}$$

En passant à un arrondi à  $10^{-2}$

$$\text{APPROX}\left(\frac{287937 \cdot \text{LN}(x)}{143992} + \frac{6018175}{2169432}, 3\right) = 2 \cdot \text{LN}(x) + 2.77$$

On peut "vérifier graphiquement" une fois encore la qualité de l'ajustement



On en tire à nouveau une relation entre  $p(k)$  et  $k$

$$- \text{LN}(p(k)) = 2 \cdot \text{LN}(k) + 2.77$$

$$\text{APPROX}(\text{EXP}(- \text{LN}(p(k)) = 2 \cdot \text{LN}(k) + 2.77), 3)$$

$$p(k) = \frac{0.0626}{k^2}$$

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on peut passer à l'autre fonction

$$\text{pr\_trap\_cos}(k) := |\text{SIN}(1) - \text{trap}(\text{COS}(x), x, 0, 1, k)|$$

$$\text{FIT}([x, a \cdot \text{LN}(x) + b], \text{APPROX}(\text{TABLE}(- \text{LN}(\text{pr\_trap\_cos}(k))), k, 10, 150, 10)))$$

$$\frac{4165219 \cdot \text{LN}(x)}{2082564} + \frac{1232506}{463817}$$

$$\text{APPROX}\left(\frac{4165219 \cdot \text{LN}(x)}{2082564} + \frac{1232506}{463817}, 3\right) = 2 \cdot \text{LN}(x) + 2.65$$

Comme pour la méthode des rectangle, l'ordre de grandeur est identique pour les deux fonctions.

On terminera par la méthode de Simpson

### Méthode de Simpson

On reprend exactement la même démarche.

$$\text{pr\_simp}(k) := \left| \text{LN}(2) - \text{simpson}\left(\frac{1}{x}, x, 1, 2, k\right) \right|$$

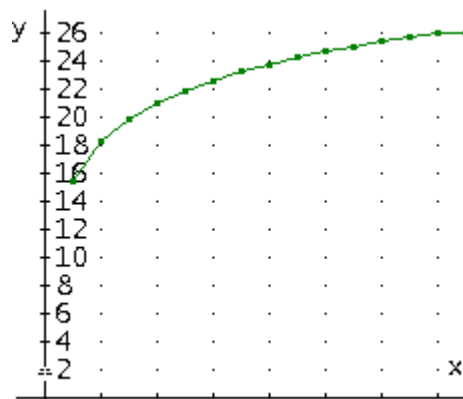
$$\text{APPROX}(\text{pr\_simp}(10)) = 1.941055719 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{APPROX}(\text{pr\_simp}(20)) = 1.218847226 \cdot 10^{-8}$$

La méthode de Simpson semble vraiment la plus précise.

On construit une table des valeurs des opposés des logarithmes de cette fonction que l'on représente ensuite graphiquement.

`TABLE(- LN(pr_simp(k)), k, 10, 150, 10)`



Même constatation sur l'allure logarithmique de la courbe

`FIT([x, a·LN(x) + b], APPROX(TABLE(- LN(pr_simp(k)), k, 10, 150, 10)))`

$$\text{APPROX}\left(\frac{1769473 \cdot \text{LN}(x)}{445353} + \frac{3764901}{594470}, 3\right) = 3.97 \cdot \text{LN}(x) + 6.33$$

On en déduit que

$$- \text{LN}(p(k)) = 3.97 \cdot \text{LN}(k) + 6.33$$

$$\text{APPROX}(\text{EXP}(- \text{LN}(p(k)) = 3.97 \cdot \text{LN}(k) + 6.33), 3)$$

$$p(k) = \frac{0.00178}{3.97^k}$$

La précision est donc proportionnelle environ à l'inverse de  $k^4$ .  
On peut examiner ce résultat avec l'autre fonction.

```
pr_simp_cos(k) := |SIN(1) - simpson(COS(x), x, 0, 1, k)|
FIT([x, a*LN(x) + b], APPROX(TABLE(- LN(pr_simp_cos(k)), k, 10, 150,
10)))
```

$$\text{APPROX}\left(\frac{1149027 \cdot \text{LN}(x)}{295984} + \frac{5820094}{681195}, 3\right)$$

$$3.88 \cdot \text{LN}(x) + 8.54$$

Résultat équivalent au précédent.

## **Conclusion**

La démarche expérimentale que nous avons conduite sur deux exemples permet une préparation aux résultats théoriques connus sur la précision des diverses méthodes d'approximation.

Pour certains étudiants, ces justifications théoriques n'ont pas beaucoup d'intérêt. Il est par contre important que chacun comprenne que tout calcul approché introduit des erreurs, erreurs dont il faut connaître l'ordre de grandeur pour avoir une certaine confiance dans la méthode.

Les résultats obtenus dans les trois parties précédentes montrent par exemple que chaque fois que l'on multiplie par 2 le nombre de subdivisions, on divise environ par 2 l'erreur dans la méthode des rectangles, par  $2^2=4$  dans la méthode des trapèzes, et enfin par  $2^4=16$  dans la méthode de Simpson.

Cette activité, réalisée en salle informatique, sous la direction orale de l'enseignant, a été préparé pour les élèves de niveau bac+1.

**Marseille, juin 2004**