Titre de la présentation : Calcul en images (A61)
Conférencière : Wedad Antonius
Institution : Collège Édouard-Montpetit

1. **Introduction**

Le logiciel Maple est de plus en plus utilisé dans les cours de mathématiques au niveau collégial au Québec. Par ses capacités de calcul symbolique très poussées, Maple nous permet de résoudre des problèmes d'applications qui étaient auparavant inaccessibles dans les cours de niveau collégial. D'autre part, ses capacités graphiques permettent d'illustrer des concepts mathématiques qui peuvent paraître très abstraits et ainsi, elles contribuent à une meilleure compréhension de ces concepts.

S'il est très intéressant d'utiliser les capacités de calcul symbolique de Maple dans les cours de Calcul avancés (comme Calcul III), alors que les étudiants maîtrisent déjà les techniques de calculs de base, il faut, à notre avis, être beaucoup plus prudents dans les premiers cours du collégial. Nous avons choisi, pour ces premiers cours, d'exploiter plutôt les capacités graphiques de Maple. Comme le dit le dicton: «Une image vaut mille mots»…

2. Problématique

Les programmes sont souvent chargés et il n'est pas facile de consacrer beaucoup de temps au développement de l'intuition des étudiants. La compréhension des concepts se mesure souvent à coups d'applications mécaniques de formules dans des exercices. Il arrive souvent que les étudiants soient capables de résoudre des problèmes, mais en creusant un peu, il s'avère que leur stratégie de résolution de problème est basée sur l'imitation plutôt que sur la compréhension des notions de base.

Nous avons parfois l'impression que les seules choses retenues à la fin d'un cours ne sont que des espèces de «recettes» plutôt que le sens véritable des notions étudiées. J'ai voulu vérifier cette impression et à la fin d'un premier cours de calcul différentiel et intégral, j'ai posé à l'examen final, quelques questions en guise de boni :

1- Donner la définition formelle de la dérivée d'une fonction f(x) en un point x=a.
2- Quelle est l'interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point?
3- Qu'est-ce que la fonction dérivée d'une fonction f(x)?
4- Donner quelques applications de la dérivée.

Les réponses ont été pour la plupart, désolantes …, même pour certains étudiants qui avaient réussi leur cours avec plus de 80%! Mais soyons honnêtes: une question comme celle-ci évalue autant le professeur que les étudiants! J'ai réalisé alors que ma propre compréhension des concepts mathématiques s'est faite à partir des démonstrations théoriques qu'on me demandait fréquemment; pour être capable de démontrer une proposition sur un concept abstrait, il fallait assimiler le concept en profondeur, et apprivoiser le symbolisme . Nos étudiants n'ont que trop peu souvent l'occasion de faire cet exercice mental. Nous vivons, au Québec, une ère où le développement de la capacité d'abstraire est presque banni de la formation de nos étudiants, au profit de l'apprentissage de la « résolution de problèmes» . Mais ceci pourrait être le sujet d'une autre conférence…

J'ai donc essayé de trouver un moyen, plus proche de l'expérience de nos étudiants et qui les aide à retenir les concepts, à comprendre le symbolisme mathématique et à faire les liens entre les différentes notions étudiées.

L'idée d'un logiciel d'animation qui illustre les concepts de base en calcul était née. J'ai alors produit en collaboration avec André Boileau (UQAM) le logiciel « le laboratoire mathématique : limites, dérivée et intégrale » (CCDMD,1995)[1] . Le logiciel présenté aujourd'hui « Calcul en images» en est une adaptation Maple.

3. Description du logiciel « Calcul en images »

Le logiciel « Calcul en images» est axé sur la représentation visuelle. Il a pour but d'illustrer par des animations graphiques certains concepts de base étudiés dans les premiers cours de calcul différentiel et intégral : la limite d'une fonction en un point, la dérivée en un point, la fonction dérivée, l'intégrale définie et la fonction intégrale.

En associant à chaque concept des « images mentales », le logiciel permet une compréhension plus concrète de chacun de ces concepts.

Les procédures ont les particularités suivantes :
- Elles n'exigent aucune connaissance du langage Maple.
- Elles sont prévues non seulement pour une illustration du concept, mais aussi pour un travail d'exploration : elles permettent de choisir la fonction à étudier, le domaine sur lequel se fait l'étude ainsi que, le cas échéant, le point autour duquel l'animation se fait. La rapidité avec laquelle s'effectuent les calculs permet à l'utilisateur d'étudier plusieurs situations dans un temps raisonnable et de se créer une variété d'images mentales reliées à ces concepts. Le logiciel contribue ainsi à développer une intuition mathématique et une compréhension plus profonde des concepts étudiés.

[1] Ce logiciel est écrit en langage Pascal. Il est lui-même une mise à jour du logiciel : «Le laboratoire mathématique :la dérivée et l'intégrale »(CCDMD,1989).

- Les illustrations animées sont toujours accompagnées des calculs correspondants, ce qui permet à l'utilisateur de vérifier visuellement des calculs algébriques et de faire la synthèse entre l'aspect graphique et l'aspect numérique de chacun des concepts.
- Les animations peuvent être activées en mode « image par image » ou en mode « automatique », selon les besoins.
- Une série d'exercices à faire à l'aide des procédures est aussi disponible.

Une fois les concepts bien assimilés et les techniques de calculs maîtrisées, on pourrait utiliser les capacités de calculs symboliques de Maple pour résoudre des problèmes intéressants qui demandent des calculs trop longs ou trop compliqués, (à condition d'apprendre le langage Maple). Cet aspect n'est cependant pas exploité ici[2].

Vous pouvez télécharger les procédures ainsi que les exercices à partir du site :
www.ccdmd.qc.ca/calcul

Vous trouverez sur ce site :

- Cinq procédures construites en langage Maple :
    - Limite d'une fonction en un point
    - Dérivée en un point
    - Fonction dérivée
    - Intégrale définie
    - Fonction intégrale
- De l'information sur l'utilisation du logiciel
- Une section pour les professeurs.
- Des suggestions d'exercices.
- Les erreurs les plus courantes.
- Les limites du logiciel.

4. Objectifs pédagogiques du logiciel

- Donner des outils pour approfondir les concepts de limite, de dérivée et d'intégrale d'une fonction.
- Développer une intuition mathématique en visualisant une variété d'images mentales correspondant à des notions mathématiques abstraites (limite, dérivée, intégrale).
- Développer une attitude d'exploration en habituant l'étudiant à se poser des questions et à essayer d'y répondre.
- Aider l'étudiant à établir le lien entre la définition symbolique d'un concept, l'aspect graphique et l'aspect numérique.

[2] Pour des suggestions d'exercices, voir par exemple *Stewart, ANALYSE concepts et contexte, Deboeck Université*

- Développer un esprit de synthèse en établissant les liens nécessaires entre les différentes parties du cours: par exemple, le lien entre la dérivée d'une fonction, la croissance et la concavité de la fonction, ou encore le lien entre l'intégrale définie, la fonction intégrale et l'aire sous la courbe de la fonction.
- Illustrer certains théorèmes d'analyse, comme le théorème de Rolle ou le théorème de la valeur moyenne.

5. Description des procédures :

A. Limite en un point

Pour la fonction f(x) choisie, au point x=a choisi, on voit la limite se construire géométriquement à droite et à gauche de a. Nous allons illustrer la procédure avec les fonctions suivantes :

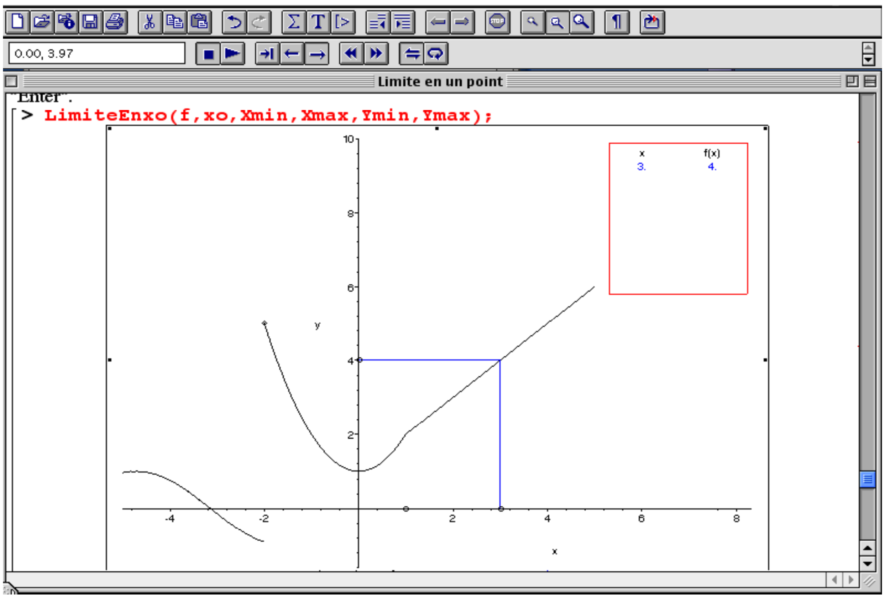
a) $f(x) = \dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x-3} = \dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x-3}$ au point x=3

(en langage Maple : f:=x->(x^3-3*x^2-4*x+12)/(x-3) :)

On voit bien que même si la fonction n'est pas définie en x=3, la limite lorsque x=3 existe. Cet exemple pourrait être une occasion de faire remarquer à l'étudiant que l'ordinateur ne « voit » pas toujours les discontinuités par trou.

b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & si \quad x < -2 \\ x^2 & si \quad x > -2 \; et \; x < 1 \\ x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ aux points x=-2 et x=1.

(en langage Maple : f:=x->piecewise(x<-2,sin(x),x>-2 and x<1,x^2,x) :)



CONTS

Évidemment dans ce cas, on voit bien que pour x=-2, les limites à droite et à gauche ne sont pas égales donc la limite n'existe pas en x =-2 alors qu'en x=1. elle existe.

c) $f(x) = 1/x^2$ en x=0.
(en langage Maple : f:=x->1/(x^2) :)

Maple indique que les limites à droite et à gauche sont infinies, mais il serait pertinent de faire remarquer aux étudiants que l'ordinateur ne peut pas illustrer les asymptotes puisque le domaine que l'on voit à l'écran est toujours fini.

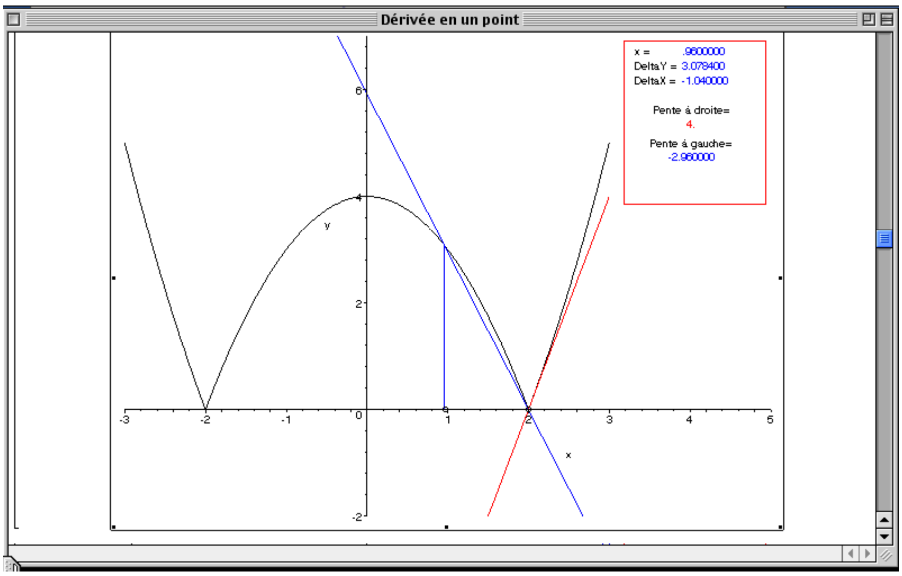
B. Dérivée en un point

Cette procédure illustre la construction de la tangente comme limite de sécantes. À chaque étape, la valeur du point x et de la pente de la sécante sont affichées. À la fin de la construction, la valeur de la pente de la tangente est affichée si la dérivée existe, sinon, on voit apparaître le message : « la dérivée n'existe pas ». Nous allons illustrer cette procédure à l'aide de quelques exemples :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 7$ au point x= 2,5.
(en langage Maple : f:=x->x^3-3*x^2-3*x+7:)

On voit le x s'approcher de 2,5 et les sécantes à droite et à gauche de 2,5 s'approcher de la tangente pendant que les valeurs numériques de x et des pentes de sécantes s'affichent à l'écran. La dérivée à ce point existe et est égale à 0,75.

b) $f(x) = |x^2 - 4|$ au point x=2 (En langage Maple : f:=x->abs(x^2-4):)

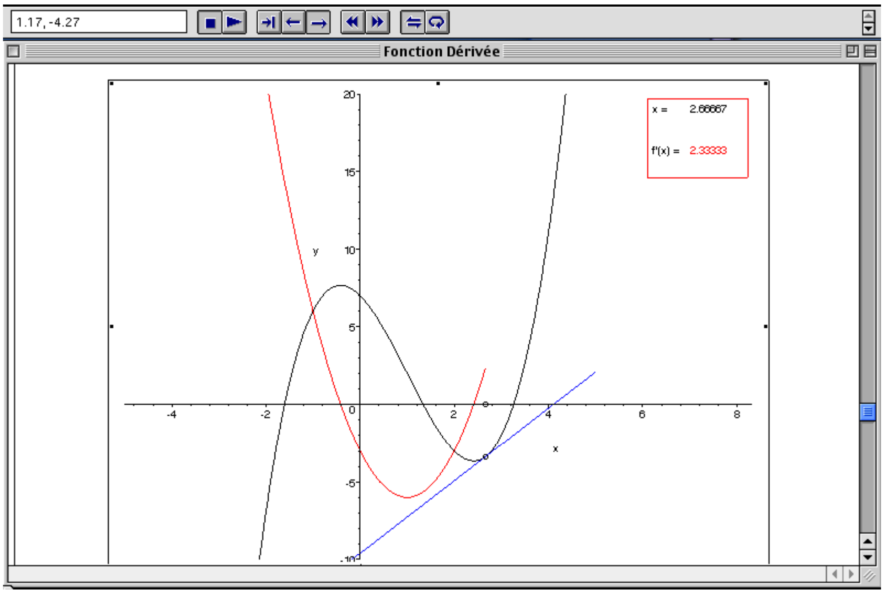


On voit que les tangentes à droite et à gauche ne coïncident pas : la dérivée n'existe pas à ce point.

C. Fonction Dérivée

Cette procédure illustre la construction de la fonction dérivée. À chaque point de la courbe, on voit simultanément se tracer la tangente à la courbe en ce point, s'écrire la valeur de la pente de cette tangente et s'afficher le point correspondant de la courbe de la fonction dérivée. On a donc l'impression de voir une tangente se déplacer le long de la courbe pendant que la fonction dérivée est tracée. Deux exemples pour illustrer cette procédure :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 7$ (en langage Maple : f:=x->x^3-3*x^2-3*x+7:)
On voit à chaque point la tangente se tracer, la valeur de la pente de la tangente s'afficher et le point correspondant sur la courbe de la fonction de la dérivée se tracer. À la fin de la construction, la fonction dérivée est tracée.
Cette procédure permet aussi de faire tracer une sécante et d'illustrer le théorème de la valeur moyenne.

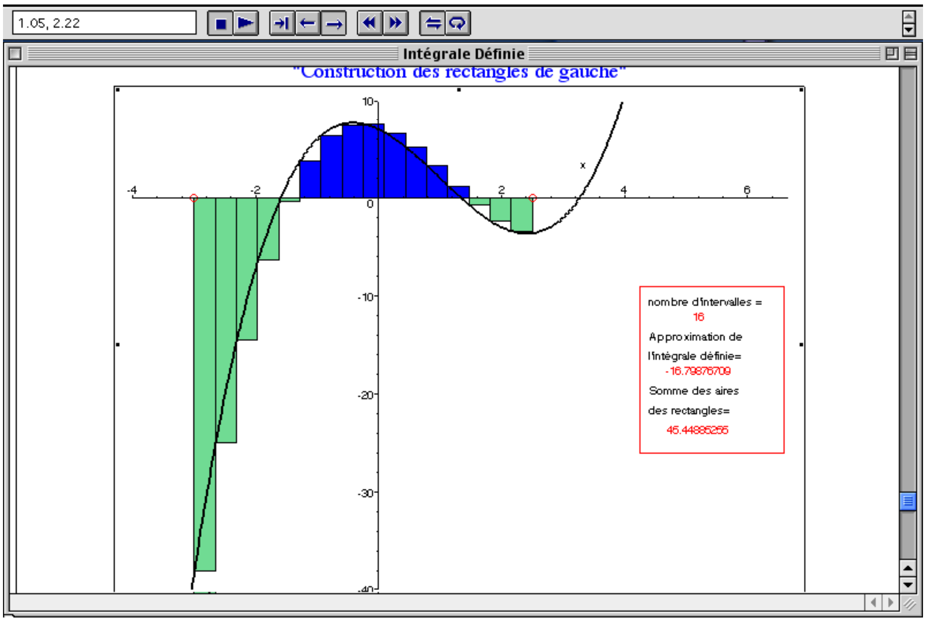


b) $f(x) = |x^2 - 4|$ (En langage Maple : f:=x->abs(x^2-4):)
Une construction similaire se déroule à l'écran : on remarque qu'aux points x=2 et x=-2 la fonction dérivée fait un saut.

D. Intégrale définie

Dans cette procédure, plusieurs constructions sont possibles : la construction des rectangles de gauche, des rectangles de droite, des rectangles centrés ou des trapèzes. Nous allons analyser la construction de l'intégrale définie à l'aide de deux exemples :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 7$ (en langage Maple : f:=x->x^3-3*x^2-3*x+7:)
Pour cette fonction, nous allons faire construire les rectangles de gauche :

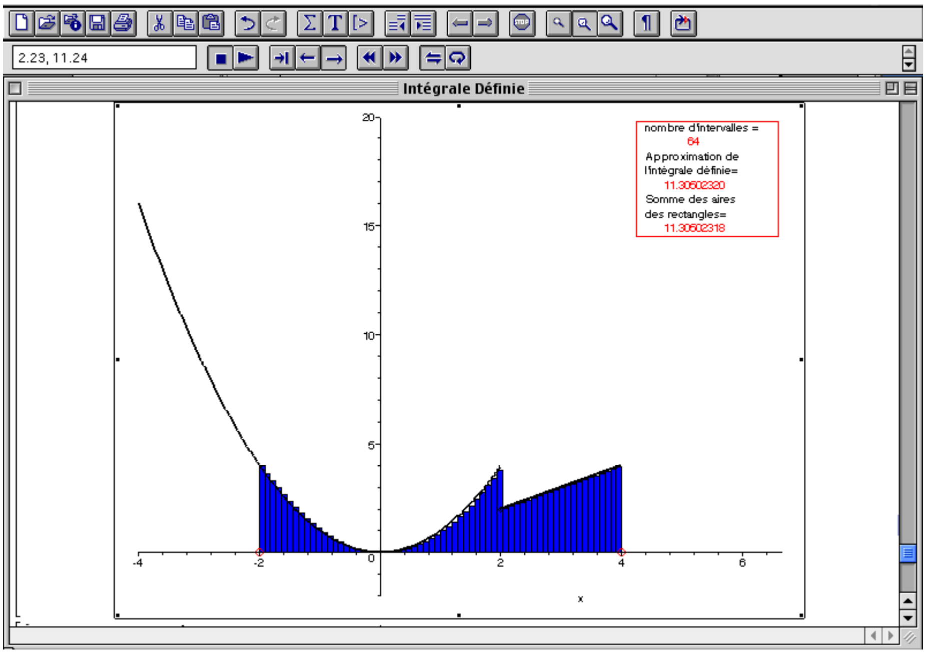


On remarque que les rectangles sont tracés en bleu sur les intervalles pour lesquels la fonction est positive et en vert lorsque la fonction est négative. Aussi l'intégrale définie et l'aire sous la courbe n'ont évidemment pas la même valeur. L'utilisateur peut aussi faire tracer les trapèzes et comparer la rapidité de la convergence.

Un autre cas intéressant est celui d'une fonction discontinue en un point, comme dans l'exemple suivant :

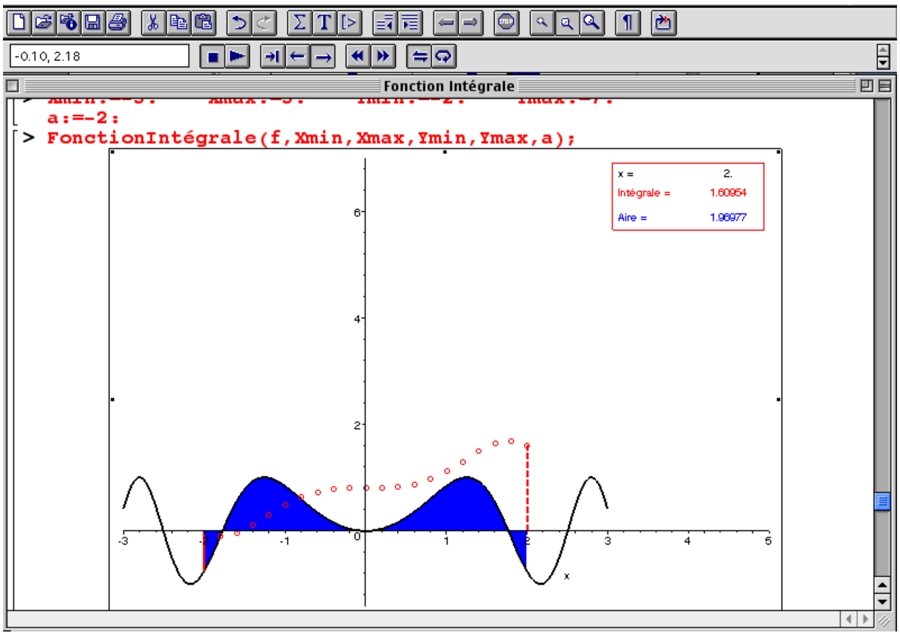
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

En langage Maple, on écrit : f:=x->piecewise(x<2,x^2,x):



E. Fonction intégrale

La dernière procédure que j'aimerais vous montrer est celle de la fonction intégrale. Par « fonction intégrale » j'entends : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ où a est une constante. La construction permet de voir se tracer l'aire sous la courbe en même temps que la fonction F(x). Cette procédure est intéressante en particulier pour les cas de fonctions qui n'ont pas de primitive algébrique comme par exemple pour $f(x) = \sin^2(x)$. Cette fonction, étant continue possède une fonction intégrale. La procédure peut tracer la courbe de cette fonction même si nous n'avons pas de fonction algébrique pour la décrire.



6. Trois modes d'utilisation en classe

CALCUL en IMAGES est prévu pour une intégration facile et variée à la situation d'enseignement. Vous pourrez donc l'adapter à votre méthode et selon le nombre d'ordinateurs disponibles à votre collège.

Nous avons établi trois modes d'utilisation :

a) La démonstration : l'ordinateur devient en quelque sorte une version électronique du tableau noir. Vous pourrez y recourir pour illustrer des cas particuliers de fonctions choisies à l'avance ou de fonctions suggérées par votre groupe d'étudiants et analyser les résultats. Ceci pourrait être un bon moyen d'animer une discussion en classe. Il est important de *verbaliser* ce qui se passe pendant les constructions et d'établir le lien entre les images qui se déroulent sur l'écran et les définitions vues en classe. Pour des idées de présentations, vous pouvez vous référer à la section « présentation de CALCUL en IMAGES en classe» sur le site indiqué plus haut.

Il est aussi instructif de faire exécuter les procédures sur des « cas problèmes ». Par exemple, faire exécuter la construction de la dérivée dans un cas de fonction discontinue ou de fonction non-dérivable en un point ou encore, celle de l'intégrale de fonctions continues sans primitives élémentaires comme $\sin(x^2)$; c'est souvent en comprenant les cas problèmes qu'on assimile le mieux un concept.

N'hésitez pas à utiliser les outils fournis par Maple : les coordonnées du curseur pour identifier un point sur le graphique comme un optimum ou le point défini par le théorème de Rolle, le mode « image par image » ou encore les loupes pour mieux voir ce qui se passe dans une certaine région…

b) L'exploration dirigée : dans ce cas, l'ordinateur est une sorte de laboratoire où l'étudiant analyse des situations suggérées par l'enseignant, vérifie certaines conclusions démontrées théoriquement, etc. Le choix des exercices est fait en fonction du sujet étudié et permet d'assimiler certaines notions particulières. Cet apprentissage peut se faire soit en séances d'exercices, soit à l'extérieur des cours.

Il est utile de faire le lien entre le calcul fait par l'étudiant et la visualisation de l'animation correspondante. On peut par exemple visionner une animation particulière puis demander aux étudiants de vérifier par leurs calculs les résultats obtenus par l'ordinateur ou au contraire, résoudre d'abord un problème pour ensuite vérifier les réponses à l'aide de l'animation.

Il serait aussi opportun de faire réaliser aux étudiants les limites des ordinateurs en leur proposant d'étudier des situations de fonctions discontinues « par trou » non détectable par l'ordinateur, ou encore des cas où un optimum n'est pas visible sur l'écran alors qu'ils en ont découvert un par leurs calculs. Ce genre d'exemples constitue une motivation supplémentaire pour apprendre à faire les calculs.

Donnons ici deux exercices en guise d'exemples. Vous trouverez d'autres suggestions sous la rubrique « Exercices » sur le site du logiciel. . Dans les exercices, nous privilégions l'approche qui consiste à faire toujours le lien entre les calculs effectués par l'étudiant et l'observation de la construction graphique faite par l'ordinateur.

Exercice 1 : Faire le lien entre la croissance de f(x) et le signe de f'(x)

(*Cet exercice est à faire de préférence avant d'avoir vu la théorie sur le lien entre la croissance d'une fonction et le signe de sa dérivée).*

À l'aide de la procédure «*Fonction dérivée*», définir la fonction:

$f(x) = x^3 – x^2 – 2x + 5$, et la région : [-3,4] x [-10,10].

Faire rouler la procédure, utiliser le mode « image par image » au besoin.

a) Pour quelles valeurs (approximatives) de x, f '(x) est-elle nulle? Quelle est la particularité de f(x) en ces points?

b) Trouver graphiquement les intervalles de croissance de la fonction f(x). Que peut-on dire du signe de f'(x) dans ces intervalles ?

c) Trouver graphiquement les intervalles de décroissance de la fonction f(x). Que peut-on dire du signe de f'(x) dans ces intervalles ?

Essayer de proposer un *théorème* qui relie, pour une fonction f(x) quelconque, la croissance de f(x) et le signe de f '(x). (Remarque : Bien sûr, le fait que votre énoncé s'appuie sur l'observation, ne constitue pas une preuve de votre théorème).

Exercice 2. : Appliquer la dérivée à des problèmes concrets

Un centre de recherche médical effectue des recherches en vue d'établir l'efficacité d'un vaccin. Les chercheurs ont établi le que le nombre N(x) de microbes vivants par millilitre de sang, x heures après l'injection est donné par:

$N(x) = (6 - 0.166x)^2$ millions de microbes où $0 \leq x \leq 36$

a) Que représentent dans ce contexte N(19) - N(12)?
(N(19) - N(12))/7) ?
À l'aide de la procédure « *Dérivée en un point* », en utilisant le mode « image par image » trouver l'approximation donnée par l'ordinateur pour chacune de ces expressions. (Vous pouvez choisir la région: [-2,40] x [-2,40]).

b) Quelle est, d'après vos calculs, chacune de ces valeurs?

c) Après combien d'heures le patient sera-t-il libéré de ses microbes d'après le graphique de la fonction?

d) Quelle est l'approximation donnée par l'ordinateur pour le taux de diminution du nombre de microbes vivants, par millilitre de sang, 15 heures après l'injection?

e) D'après vos calculs, quel est ce taux? (Utilisez les formules de dérivation.)

f) Faire tracer N'(x) (à l'aide de l'animation «*Fonction Dérivée*».)
D'après le graphique obtenu, le nombre de microbes dans le sang diminue-t-il plus vite au début ou à la fin de l'expérience?

c) L'exploration libre : il peut être intéressant de prévoir des périodes, en dehors des heures de cours, où l'étudiant qui le désire peut faire ses propres expériences : faire tracer les graphes de fonctions selon ses intérêts et son imagination et étudier le comportement de leur dérivée ou primitive.

À chacun de ces niveaux d'utilisation, le rôle de l'enseignant est primordial tant pour interpréter les résultats que pour susciter la curiosité des étudiants, les habituer à adopter une attitude d'exploration et contrer la passivité de certains qui voient les mathématiques comme une science figée qui n'a rien à voir avec le reste du monde.

Conclusion

L'utilisation de « Calcul en images » a été pour moi et pour les étudiants (je l'espère) très stimulant. Bien sûr, le logiciel n'a pas rendu les étudiants plus habiles techniquement, mais ce n'est son but. Par contre, lorsqu'on leur demande de donner des exemples ou des contre-exemples de situations reliées aux dérivées ou à l'intégrale, ils sont en général beaucoup plus à l'aise(par exemple, trouver une fonction continue mais non dérivable en un point, ou encore une fonction croissante dont la dérivée est décroissante etc.).

Un autre avantage de l'utilisation du logiciel est la dynamique qu'elle installe dans la classe : les étudiants proposent de nouvelles fonctions, posent des questions qu'ils n'auraient probablement pas posées si nous n'utilisions pas le logiciel et sont, en général, plus actifs que lors d'un cours plus traditionnel.

Et finalement… lorsque je pose la question boni au dernier examen, (voir plus haut) les réponses sont beaucoup plus intéressantes!