CONTS

Représentations des nombres réels et représentations graphiques

Une enquête mathématique menée en terminale en 2001

Le crime (mathématique)
Tableau 1

Un professeur de mathématique dans sa classe en pleine confiance dans les calculatrices fait tracer la représentation graphique de : $x \mapsto x^{\pi}$

Voilà ce qu'il obtient :

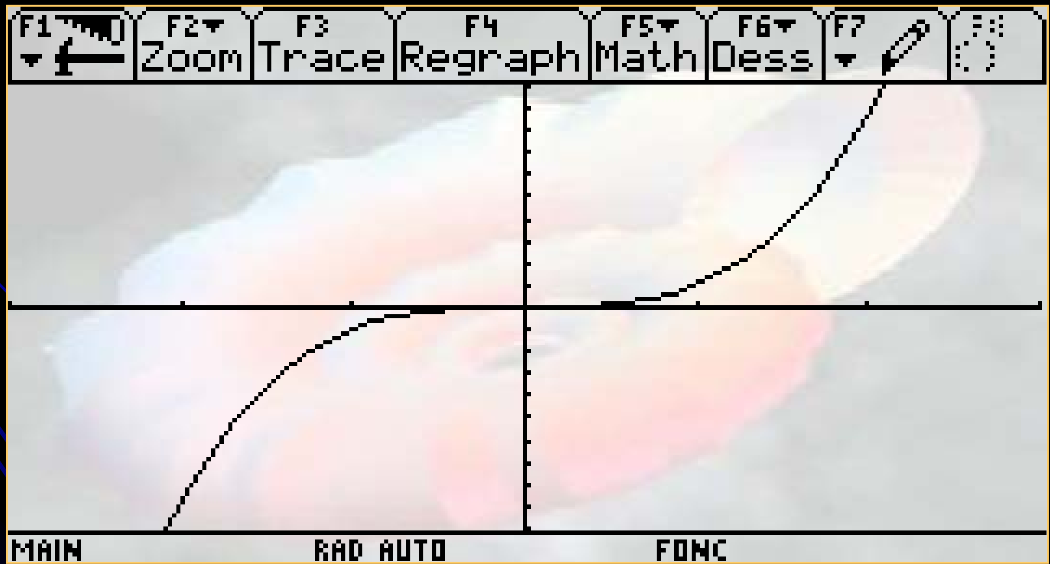


Tableau 2 :
la bonne nouvelle

Est-ce une malédiction liée au nombre π ?

Nouvel essai avec cette fois-ci :

$$x \mapsto x^{\sqrt{2}}$$

Notre enseignant reprend confiance

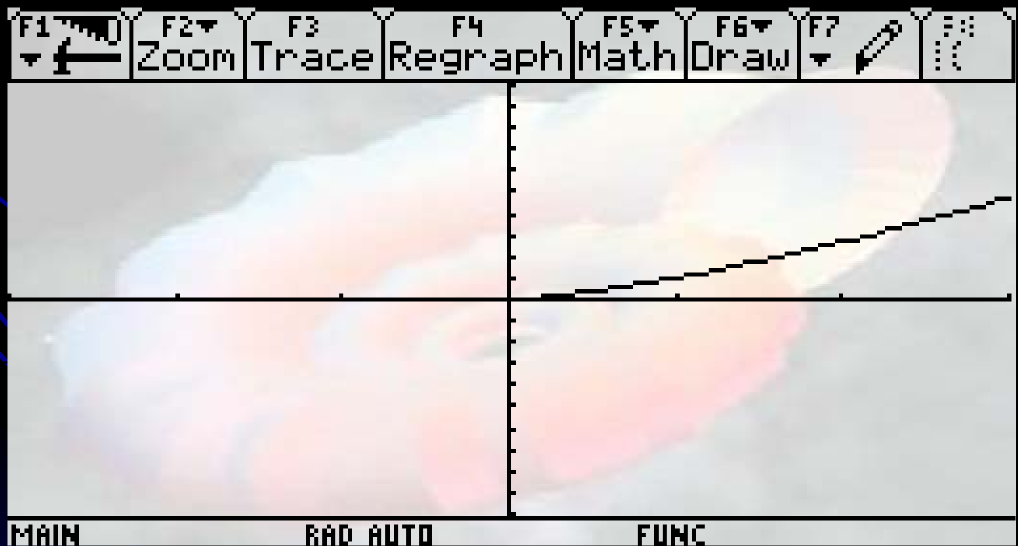


Tableau 3 : Nouvelle question

CONTS

C'était donc le nombre π… Le professeur, rassuré, peut continuer sa leçon.

Mais, au fond de la classe, un élève, curieux et insatisfait, essaye une autre fonction :

$$x \mapsto x^{\sqrt{7}}$$

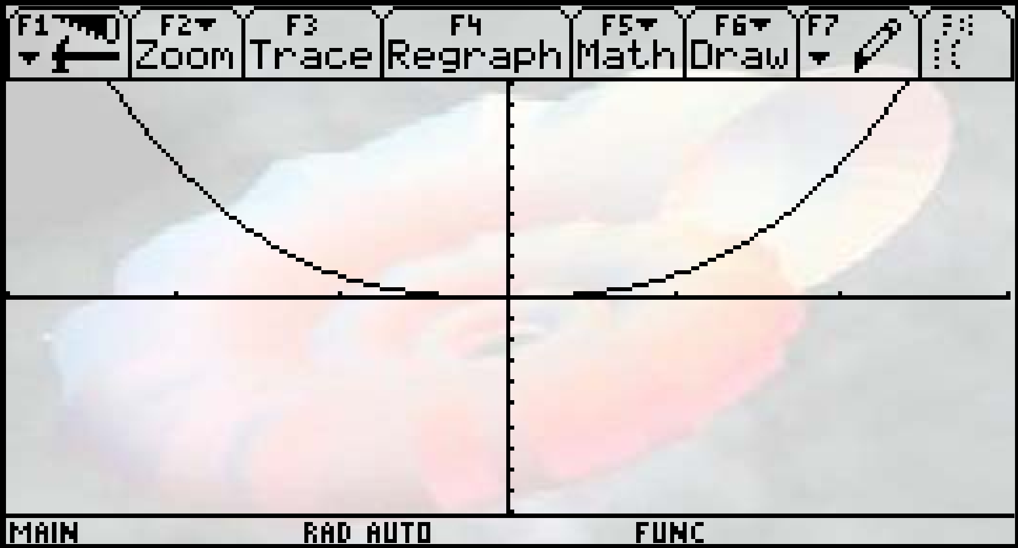


Tableau 4
Une autre classe, d'autres élèves

CONTS

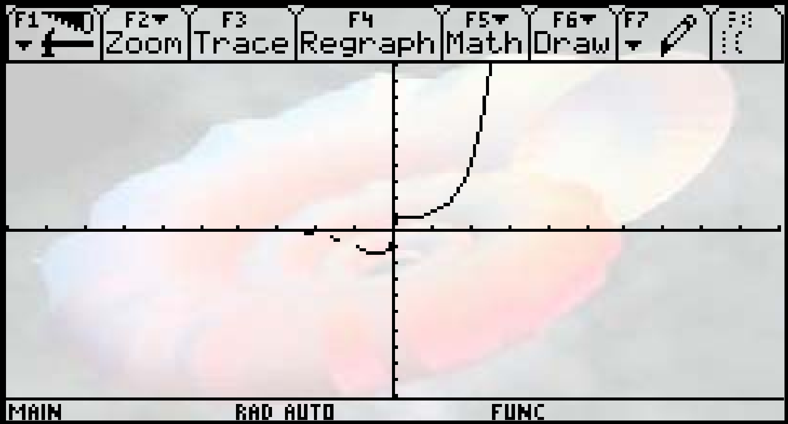
La même année, à la même époque, dans une autre classe, deux élèves représentent la fonction

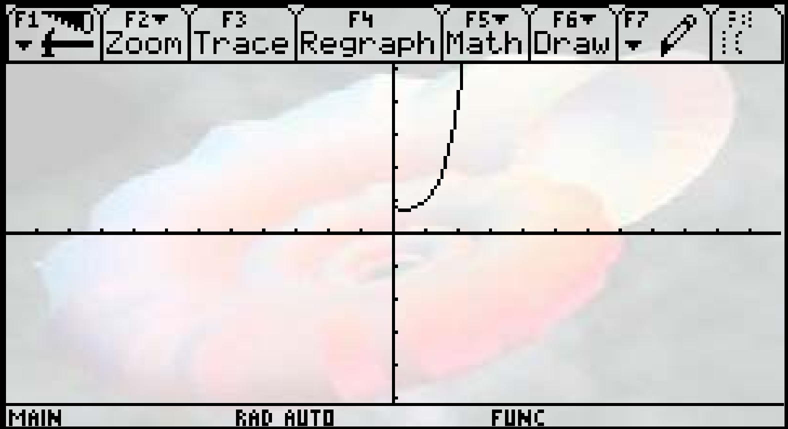
$$x \mapsto x^x$$

Mais ils n'ont pas choisi le même « Zoom ».

En haut : Standard

En bas : Decimal





Début de l'enquête

CONTS

Désappointé le professeur appelle à son aide un enquêteur en « bug » de calculatrices.

Les deux élèves s'adressent également à ce « spécialiste »…

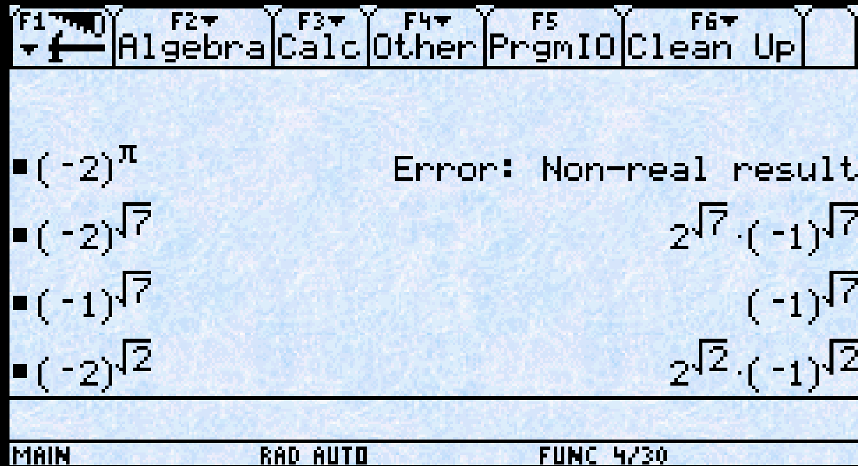
Il écarte le « bug », ou l'erreur de programmation.

Notre homme s'oriente immédiatement vers la recherche d'une raison mathématique…

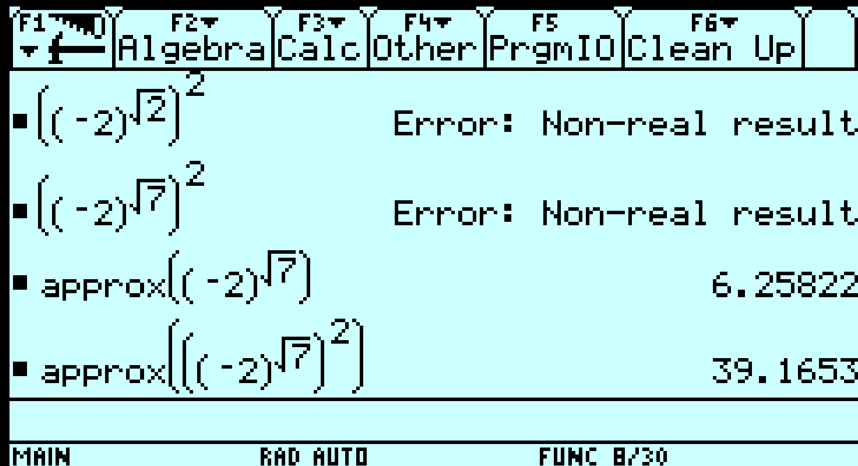
Oui,mais laquelle ???

Investigation calculatoire

Il faut d’abord vérifier quelques petites choses et déjà des surprises



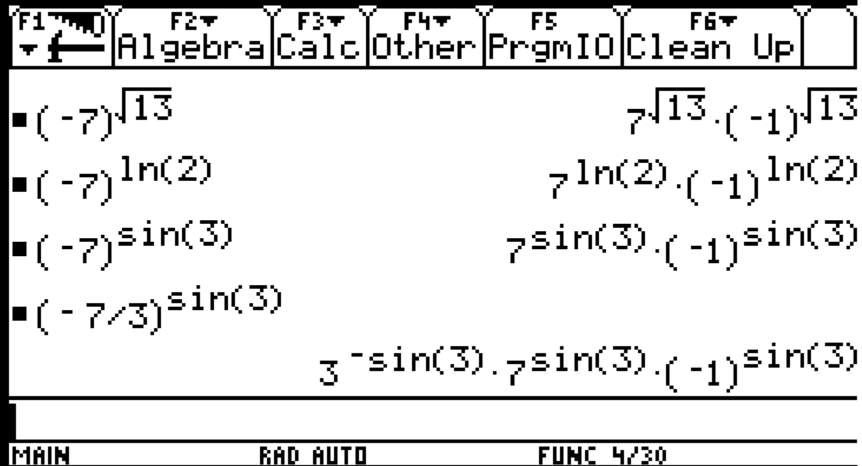
Et encore plus de surprises

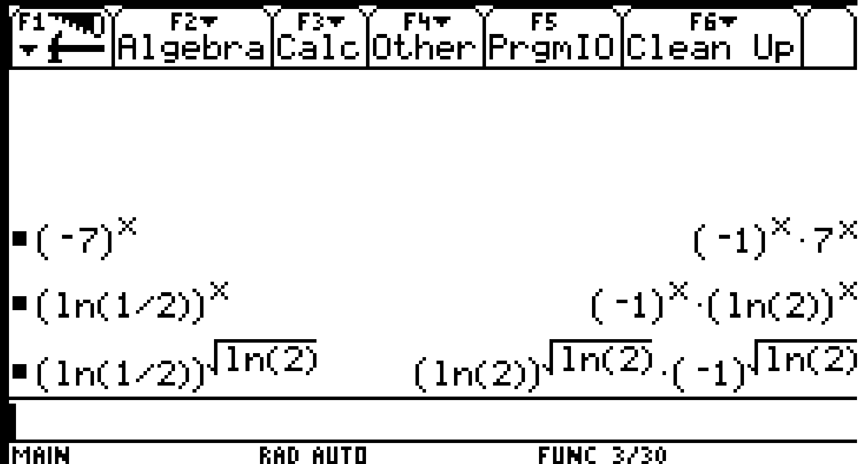


Premières conclusions

La calculatrice applique des règles de transformation purement algébrique quand on utilise des puissances réelles pour lesquelles il peut y avoir un doute sur la nature du résultat.

Elle n'examine pas si l'écriture est correcte.

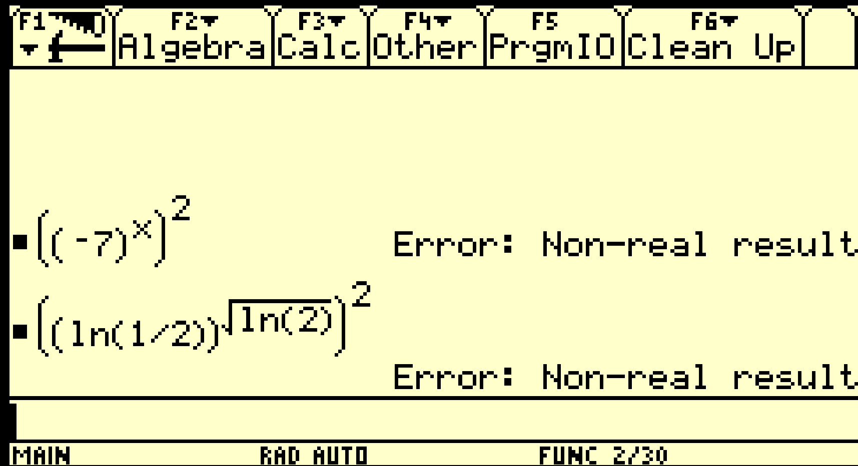




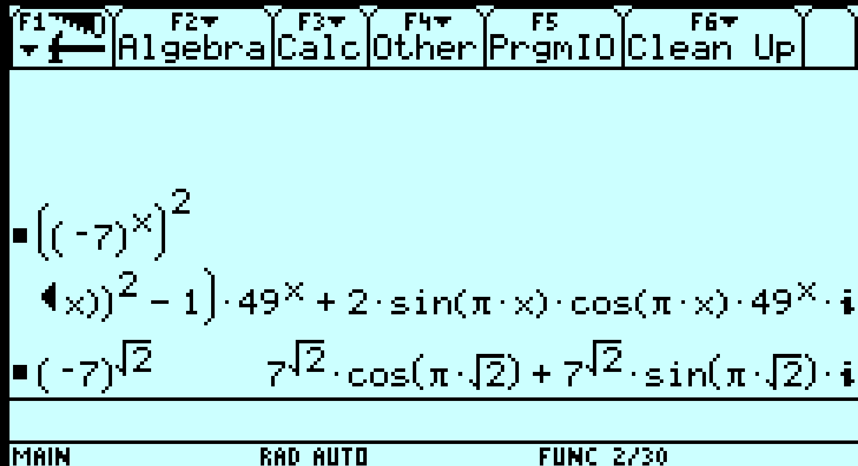
CONTS

On y voit un peu plus clair

L’application du carré force l’évaluation : la calculatrice sait alors que le résultat n’est pas réel.



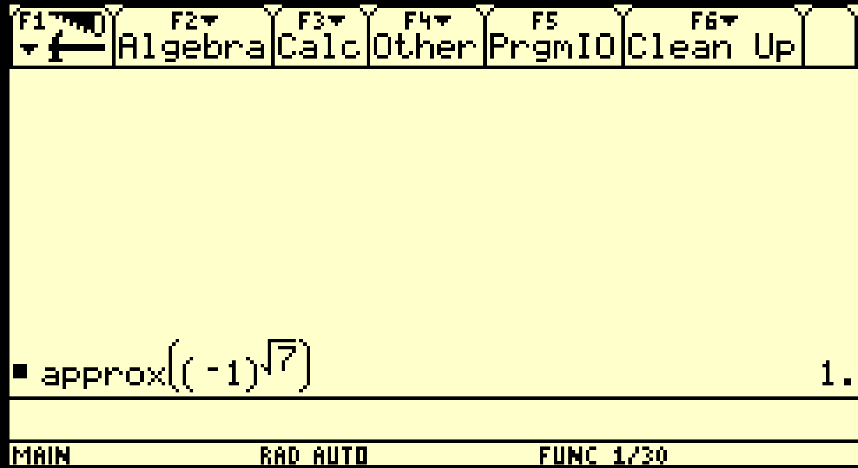
D’ailleurs, en format complexe : rectangulaire, on obtient



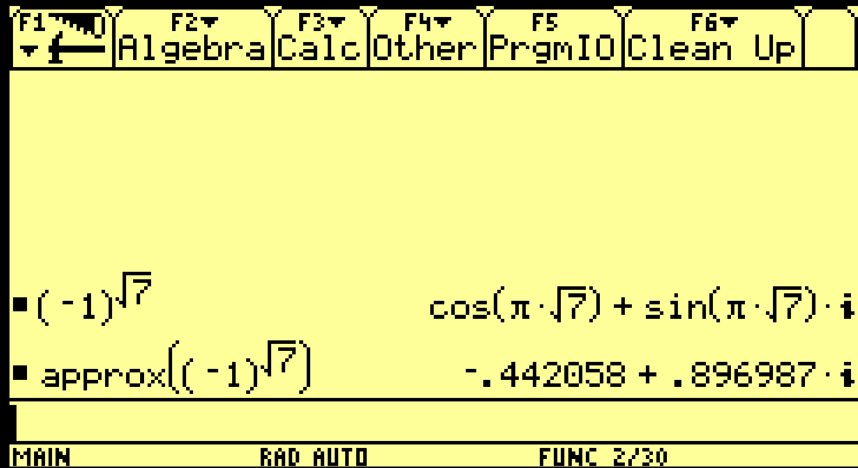
Une piste

CONTS

Le passage en mode approché a mis en évidence une situation problématique :



Pourtant si l'on passe en format complexe : rectangular, on trouve :



il semble bien que la calculatrice « sait » que le nombre (-1)^√7 est un nombre complexe, mais en mode approchée, elle le considère comme un réel

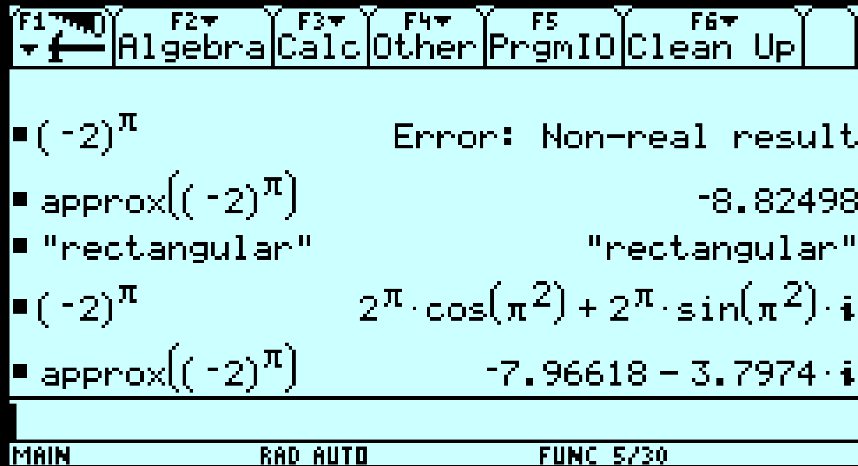
Poussons la recherche

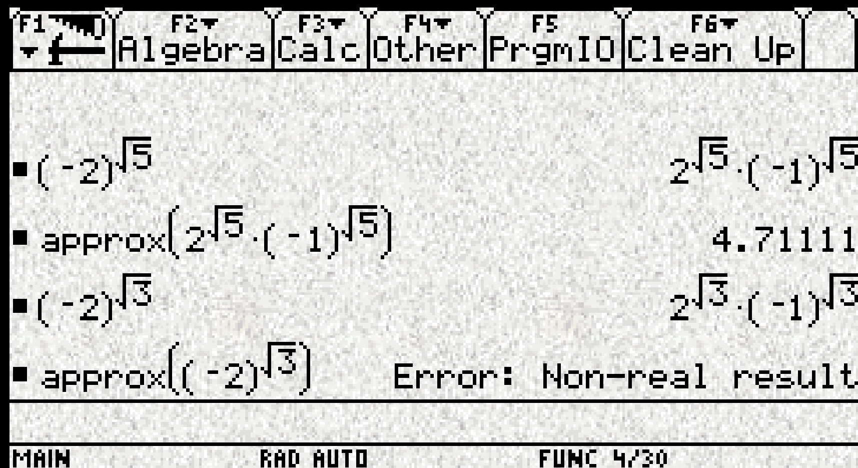
CONTS

Nous avons rencontré un arc aberrant pour x^π. Nous devons avoir une situation identique à celle de x^√7. C’est bien le cas

Cette constatation va permettre des prévisions.

Examinons les deux exemples ci-contre :

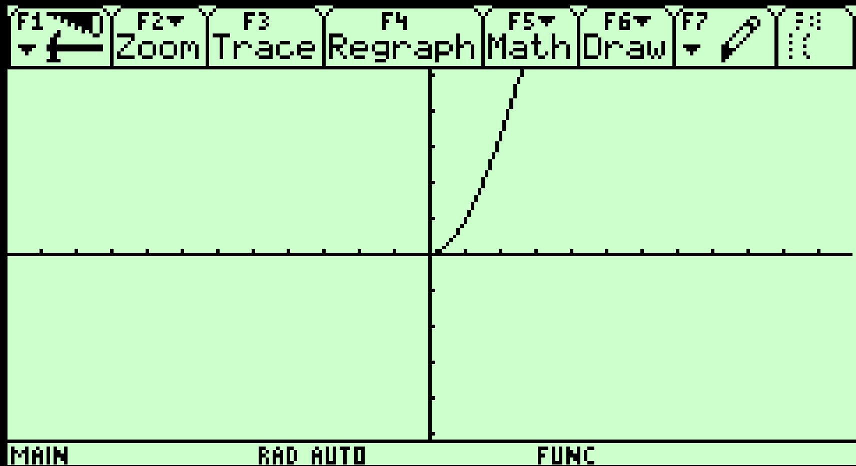


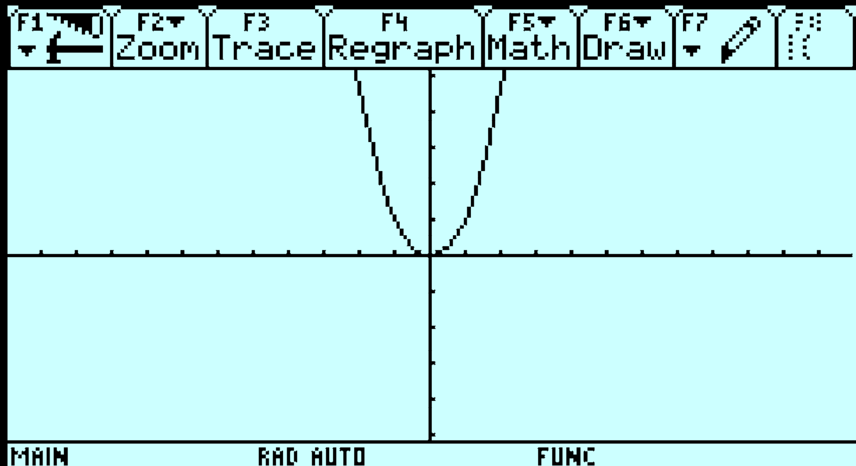


Une petite vérification

Sur la base de nos premiers résultats, on peut penser que sera $x \mapsto x^{\sqrt{3}}$ représentée correctement , mais que $x \mapsto x^{\sqrt{5}}$ sera représentée comme une fonction paire.

Ce qui est bien le cas

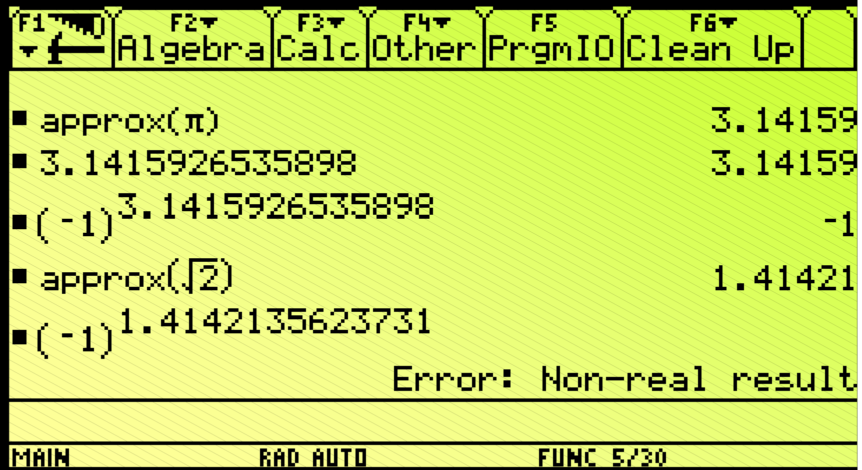




Retour sur x^{π}

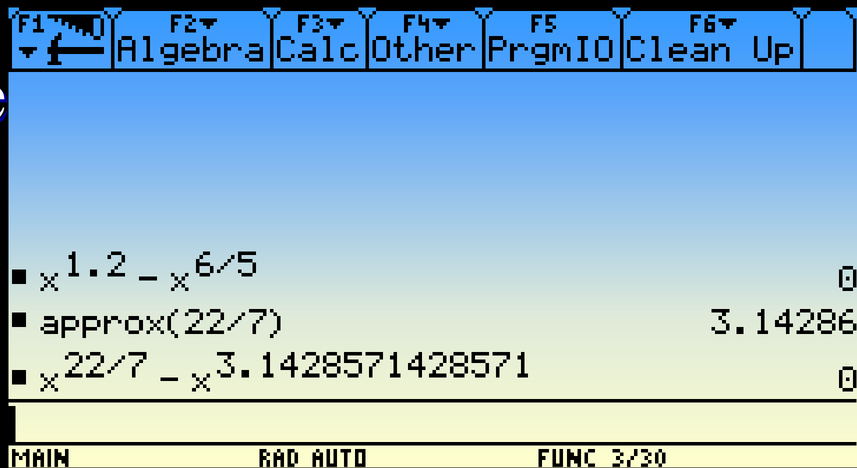
CONTS

En mode approché, π est remplacé par un nombre décimal, √2 également.



On doit donc se demander ce qu'est une puissance d'exposant décimal :

la calculatrice « répond » par une égalité pour tout x qui montre que la représentation en mémoire d'une puissance d'exposant décimal est une puissance d'exposant rationnel



Nous avançons…

CONTS

Pour tracer une courbe, la calculatrice passe en mode approché, donc pour x^π, π est remplacé par un nombre décimal.

Mais pour déterminer effectivement la puissance, ce nombre décimal est remplacé par une fraction d'entiers, dont on peut supposer qu'elle est irréductible…

Il reste à savoir à examiner les puissances dont l'exposant est rationnel.

Regard sur $x^{p/q}$

CONTS

Si p et q sont deux entiers positifs tels que PGCD(p,q)=1, on a trois cas :

1. p et q sont impairs
2. p est pair, q est impair
3. p est impair, q est pair.

On peut toujours écrire : $x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$

Si q est impair, $x \mapsto x^q$ est une bijection dans IR, et donc l'écriture $a^{1/q}$ a un sens dans IR pour tout nombre réel *a*

Point sur l’enquête

CONTS

On peut donc penser que la calculatrice remplace π ou $\sqrt{5}$ par un nombre rationnel dont le dénominateur est impair, et remplace $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ par un nombre rationnel dont le dénominateur est pair.

Nous avons bien avancé…

CONTS

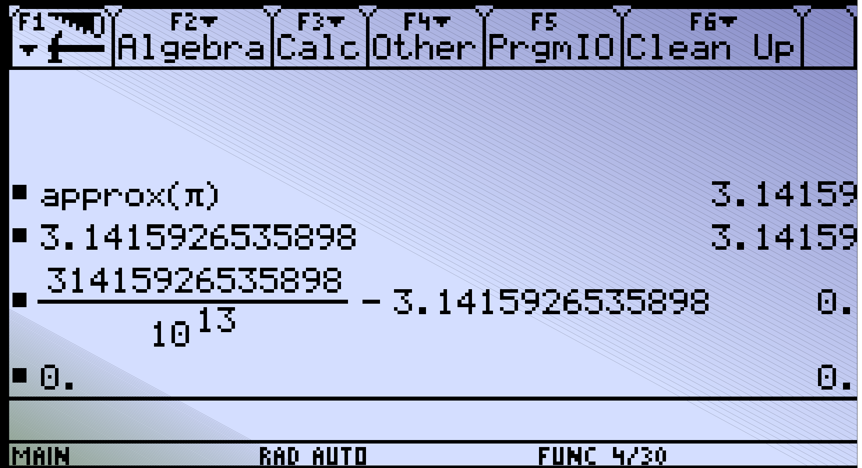
A la recherche du rationnel

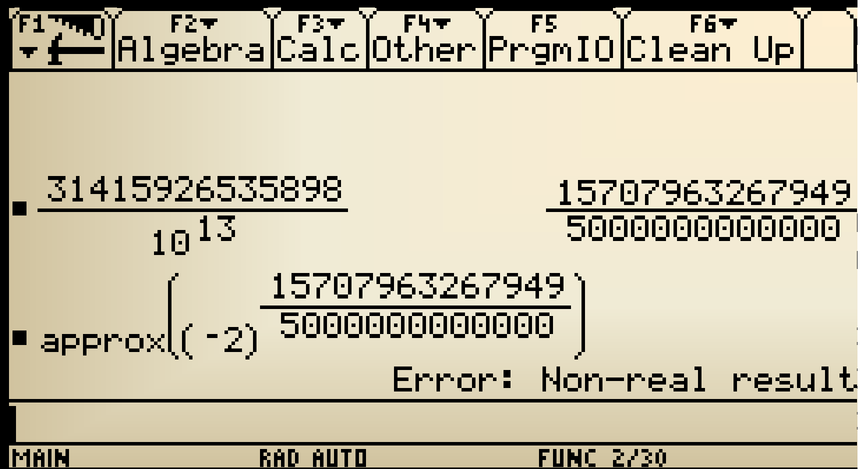
Examinons le cas de x^π.

Dans un premier temps on peut penser que π est remplacé par

$$\frac{31415926535898}{10^{13}}$$

Pourtant cela ne va pas : en simplifiant, on obtient une fraction irréductible avec un dénominateur pair

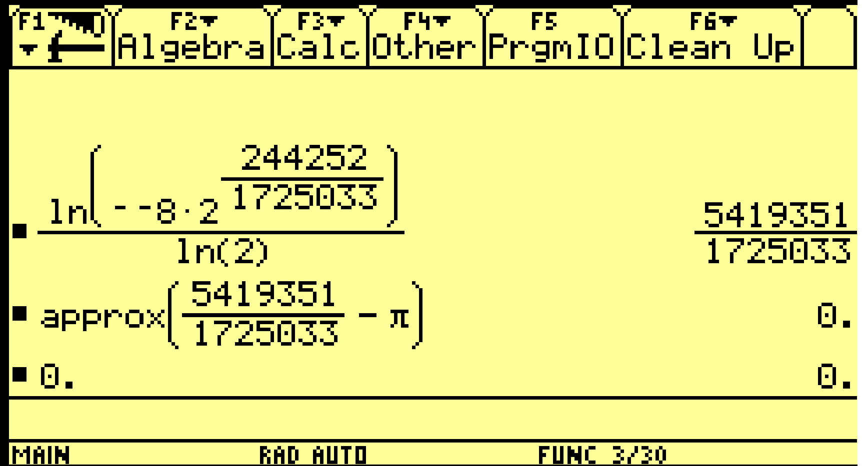




Une idée…

Si nos hypothèses sont justes, pour effectuer le calcul de $(-2)^\pi$ en mode approché, la calculatrice passera à une forme rationnelle.

C'est gagné. Et maintenant, utilisons le calcul formel.



Voilà l'approximation rationnelle utilisée par la calculatrice pour π.

$$\pi \approx \frac{5419351}{1725033}$$

CONTS

$$\pi \approx \frac{5419351}{1725033}$$

Comment et pourquoi la calculatrice prend-elle cette expression rationnelle comme valeur approchée de π?

Approcher un nombre réel par un nombre rationnel, c'est un problème connu dont une méthode de résolution est

les fractions continues

Fractions continues (1)

CONTS

$3{,}141592653598 =$

$$3 + 0{,}141592653598 = \quad 3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}141592653598}}$$

Ce qui donne :

$$3{,}141592653598 \approx \quad 3+\frac{1}{7{,}0625133059307}$$

On a donc $3{,}141592653598 \approx \quad 3+\frac{1}{7}\left(=\frac{22}{7}\right)$

Fractions continues (2)

CONTS

Deuxième épisode :

$$3{,}141592653598 \approx 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}0625133059307}}}$$

$$\approx 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15{,}99594406774}}$$

$$\approx 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=\frac{333}{106}$$

Fractions continues (3)

CONTS

On peut écrire donc $$\pi \approx q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + 0,9959\ldots}}$$

avec $q_1 = 3, q_2 = 7, q_3 = 15\ldots$

Si l'on appelle $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ les fractions continues

successives, on a ici :

$$a_1 = 3, b_1 = 1, a_2 = 22, b_2 = 7, a_3 = 333, b_3 = 106$$

Fractions continues (4)

CONTS

Si l'on pose $x = \pi$, si l'on pose

$$e_{n+1} = \frac{1}{e_n} - q_{n+1} \text{ avec } e_1 = x - \mathrm{ipart}(x)$$

on démontre par récurrence que

$$q_{n+1} = \mathrm{ipart}\left(\frac{1}{e_n}\right)$$

$$a_{n+1} = q_{n+1} \times a_n + a_{n-1}$$

$$b_{n+1} = q_{n+1} \times b_n + b_{n-1}$$

en posant $a_0 = 1, b_0 = 0$

CONTS

Fractions continues (5)

On traduit ces résultats par un programme sur la calculatrice qui retourne une liste de fractions approchant un nombre (nb) avec une précision donnée (pres)

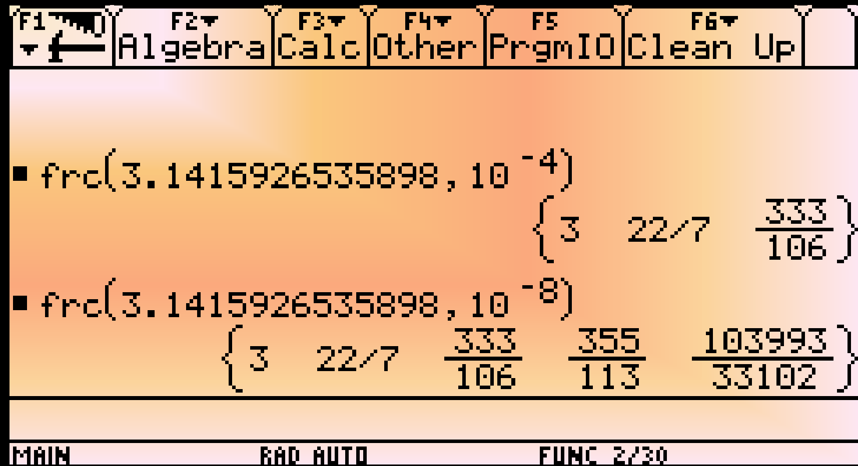
```
F1  F2▾     F3▾ F4▾ F5     F6▾
    Control I/O Var Find... Mode
:frc(nb,pres)
:Func
:Local a0,a1,b0,b1,e,d,q,a,b,ls
:0→b0:1→b1:1→a0:floor(nb)→a1:exact(a1)→a1:nb-a1→e:1→d:{a1}→ls
:While d>pres
:floor(1/e)→q:exact(q)→q:1/e-q→e
:q*a1+a0→a:q*b1+b0→b
:abs(nb-a/b)→d
:augment(ls,{a/b})→ls
:a1→a0:b1→b0:a→a1:b→b1
:EndWhile
:Return ls
:EndFunc
MAIN            RAD AUTO         FUNC
```

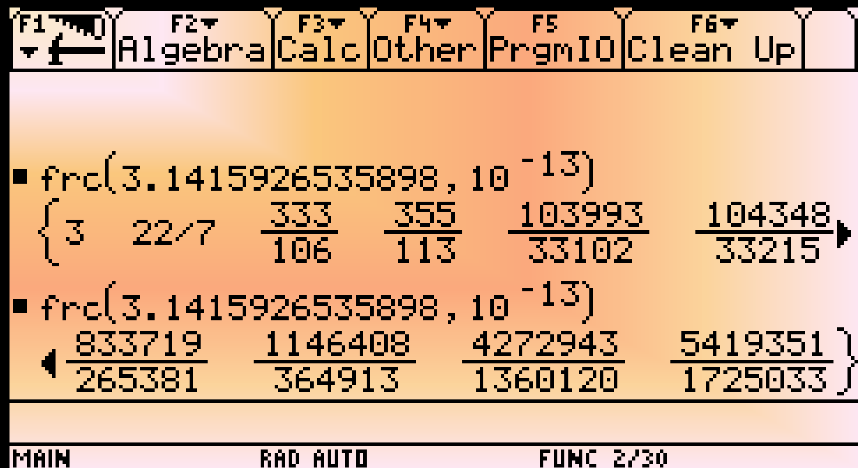
Mise en œuvre du programme

On a par exemple

Mais aussi avec plus de précision :

On retrouve le nombre rationnel utilisé par la calculatrice.

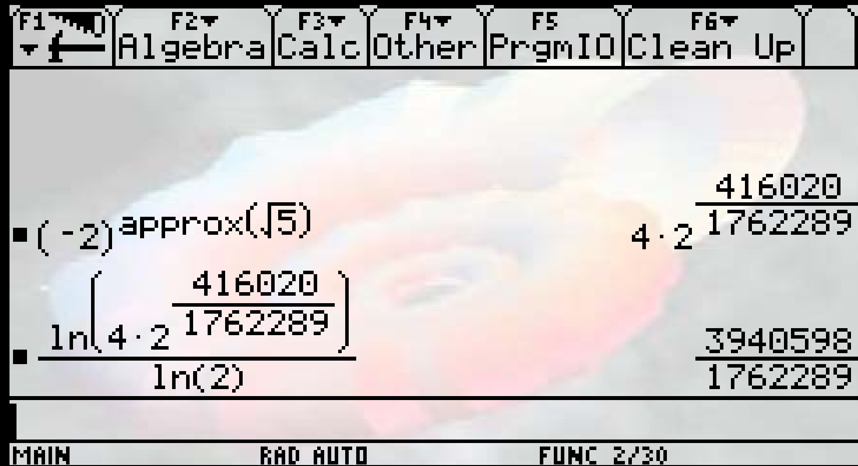




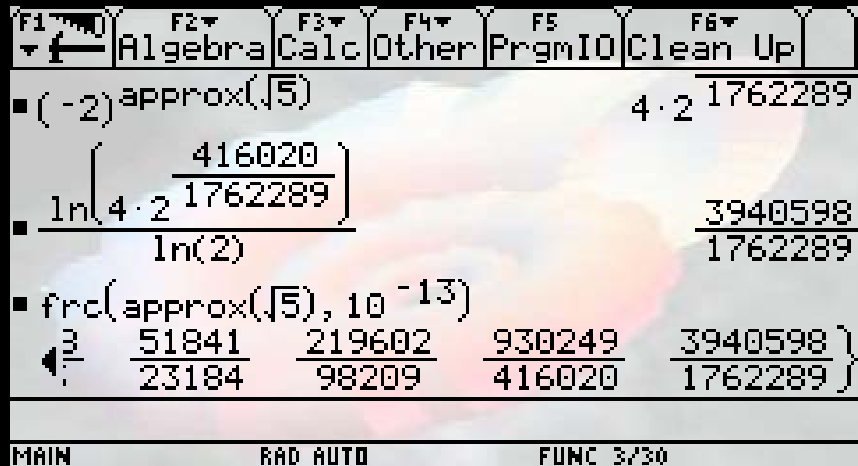
vérification des hypothèses

On reprend le cas de √5.

On a :



On a également :

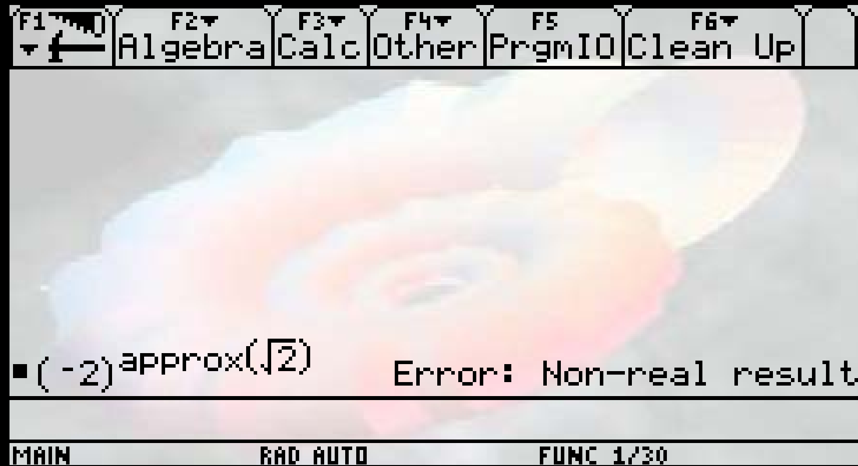


Le résultat est convaincant

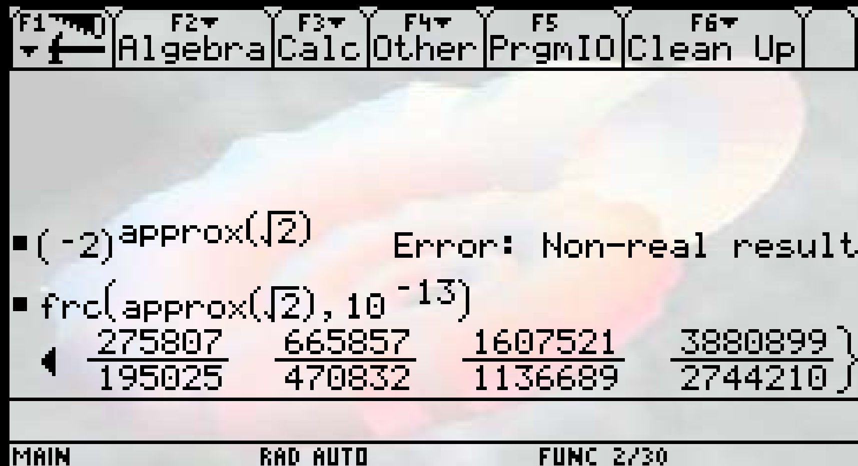
Et avec racine de 2

CONTS

Il n’y avait pas d’anomalies pour la courbe de $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.
Cela se traduit par un accès impossible à l’information :



Essayons par le programme :
la dernière fraction obtenue a un dénominateur pair… ce que l’on attendait.



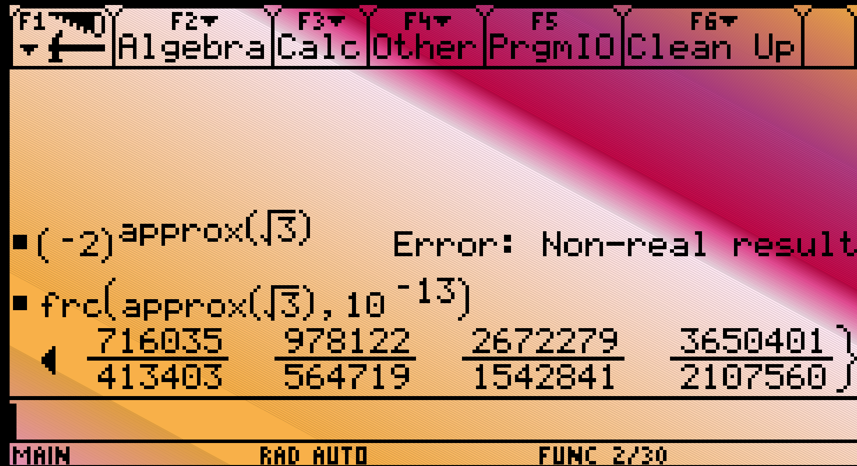
Essayons √3 ou √7

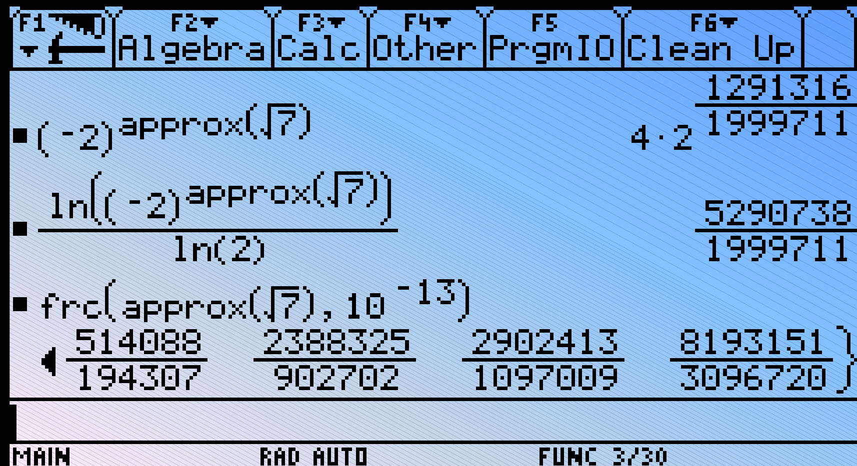
On retrouve des confirmations de nos résultats pour √3 mais…

… pas pour √7.

Pour quelle raison ?

On peut supposer qu'il s'agit d'un problème de précision, notre programme utilisant les valeurs approchées de la calculatrice…





Plus de précision, svp

CONTS

La calculatrice a atteint ses limites. Il faut pousser la recherche du côté d'un logiciel dans lequel nous pouvons choisir la précision. Prenons Derive… On entre le même programme à deux petites variantes près : APPEND à la place de AUGMENT et LOOP à la place de WHILE

Sur Derive

CONTS

```
PROG(
    a0:=1,a1:=FLOOR(nb),b0:=0,b1:=1,e:=nb - a1,d:=1,
    ls:=[a1],
LOOP(
   IF(d < pres, RETURN ls),
   q:=FLOOR(1/e),e:=1/e - q,a:=q*a1 + a0,b:=q * b1 + b0,
   d:=ABS(nb - a/b),ls:=APPEND(ls, [a/b]),
   a0:=a1,b0:=b1,a1:=a,b1:=b)
    )
```

Le résultat surprenant

CONTS

$$\mathrm{frc}(2.6457513110645905905,\ 10^{-13})$$

$$\left[2,\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ \frac{590}{223},\ \frac{717}{271},\ \frac{1307}{494},\ \frac{2024}{765},\right.$$

$$\frac{9403}{3554},\ \frac{11427}{4319},\ \frac{20830}{7873},\ \frac{32257}{12192},\ \frac{149858}{56641},\ \frac{182115}{68833},\ \frac{331973}{125474},\ \frac{514088}{194307},$$

$$\left.\frac{2388325}{902702},\ \frac{2902413}{1097009},\ \boxed{\frac{5290738}{1999711}},\ \frac{8193151}{3096720}\right]$$

Le nombre manquait à notre liste sur la calculatrice …

On peut vérifier que c'est le seul

Une interprétation… à suivre…

CONTS

On peut penser que cet « incident » est due à une situation particulière de l'un des nombres q_n, la précision limitée de la calculatrice faisant le reste.

Une affaire à suivre…

Mais une nouvelle énigme : pourquoi la calculatrice choisit-elle celui qui justement est absent, alors qu'un autre suit …

Qui suit qui ?

Derive va encore donner la solution : la suite est alternée : le plus petit terme est ici l'avant dernier et le résultat est donc cohérent. C'est donc bien pour un problème de précision de calcul que la calculatrice s'est arrêtée.

$$u := \mathrm{frc}(2.6457513110645905905,\ 10^{-13})$$

$$\mathrm{VECTOR}(\mathrm{SIGN}(u_{k+1} - u_k),\ k,\ 1,\ \mathrm{DIM}(u) - 1)$$

[1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]

Et dans le cas général

CONTS

Dans le cas général, la suite des fractions continues a la même propriété. On peut le voir aisément sur les premiers termes de la suite en reprenant les conventions précédentes. On pose :

$$\frac{a_1}{b_1} = q_1, \frac{a_2}{b_2} = q_1 + \frac{1}{q_2}, \frac{a_3}{b_3} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}$$

$$\frac{a_4}{b_4} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4}}}$$

On a évidemment….

CONTS

On a $\dfrac{a_1}{b_1} \leq \dfrac{a_2}{b_2}$.

Mais aussi $q_2 \leq q_2 + \dfrac{1}{q_3}$ donc $\dfrac{a_3}{b_3} \leq \dfrac{a_2}{b_2}$

On a également

$$q_3 \leq q_3 + \frac{1}{q_4} \text{donc} \frac{a_4}{b_4} \leq \frac{a_3}{b_3}$$

Et ainsi de suite …

CONTS

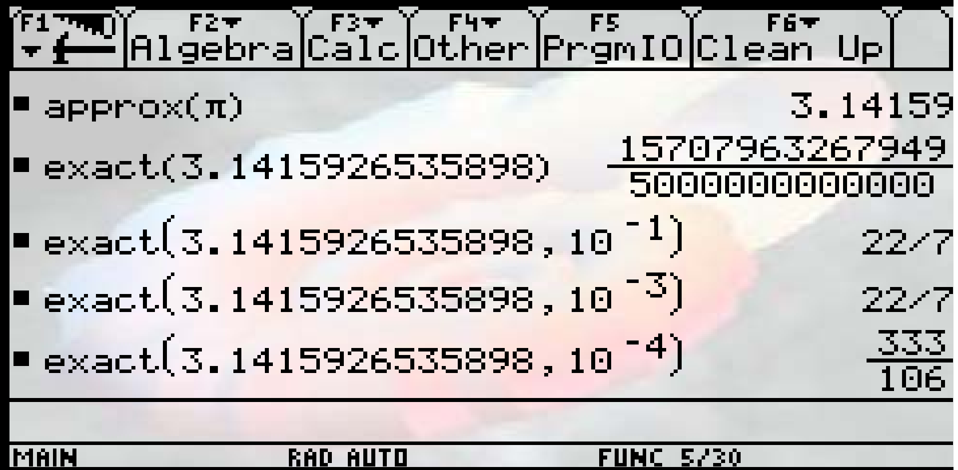
La fonction exact

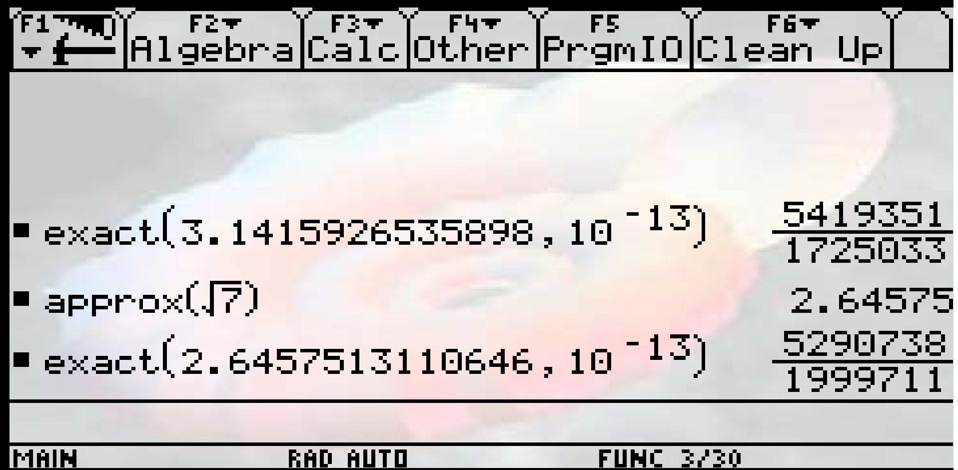
La calculatrice possède une fonction mal décrite par TI : la fonction EXACT.

Cela nous dit quelque chose.

Et si l'on va plus loin :

Il semble que la fonction exact retourne la meilleure fraction continue qui approche un nombre réel à une précision donnée.

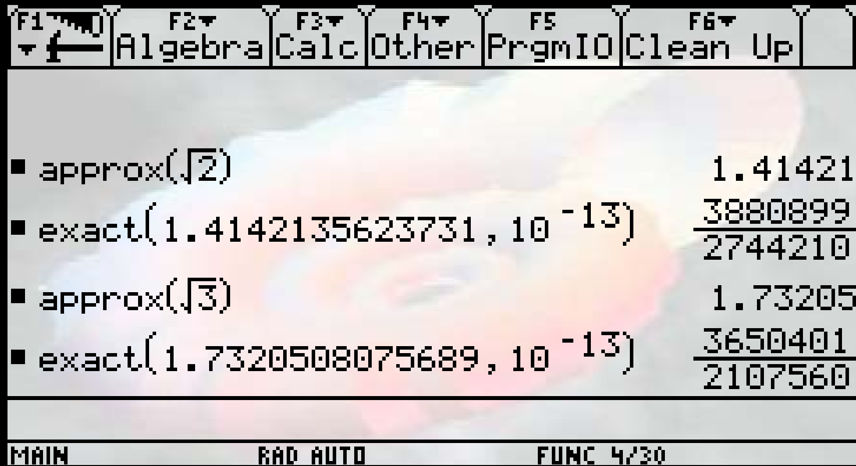




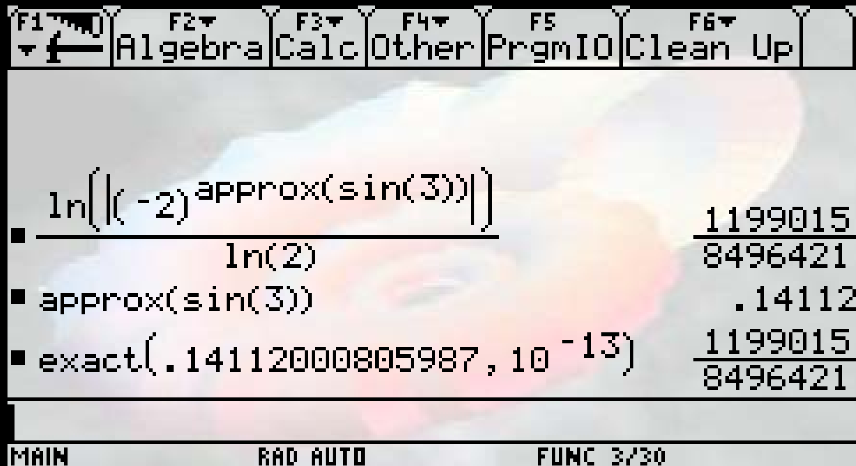
Et avec les autres valeurs…

CONTS

On a semble-t-il de nouvelles confirmations.



On peut essayer avec un nombre tout à fait nouveau



Du côté de x^x

CONTS

Nous avons pu voir que la courbe représentation de cette fonction était très différente suivant le choix du repère.

Dans le repère « décimal », il ne semblait pas y avoir de problème. Dans le repère « standard », des points ou des arcs parasites apparaissent.

Nous sommes maintenant capable de comprendre les différences observées et de les interpréter.

x^x en repère décimal

CONTS

Dans ce cas, la situation peut paraître simple. Les valeurs de x sont des nombres décimaux de la forme k*0,1 où k est un nombre entier. Donc l'écriture x^x est remplacée par :

$$\left(\frac{k}{10}\right)^{k/10}$$

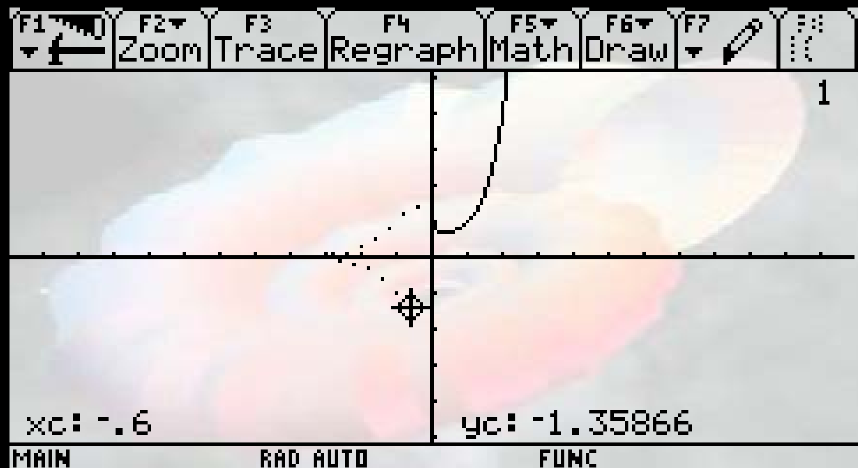
Si k est un nombre négatif, tout dépend s'il s'agit d'un nombre pair la fraction se simplifie et l'on doit aboutir à un problème. Si k est impair le calcul ne peut pas être effectué.

x^x et le choix de la résolution

CONTS

Notre conclusion est que la résolution intervient. Une rapide vérification montre que le dessin sans « problème » était en résolution 2.

Mais en résolution 1, il y a des points parasites correspondant aux valeurs paires de *k*.

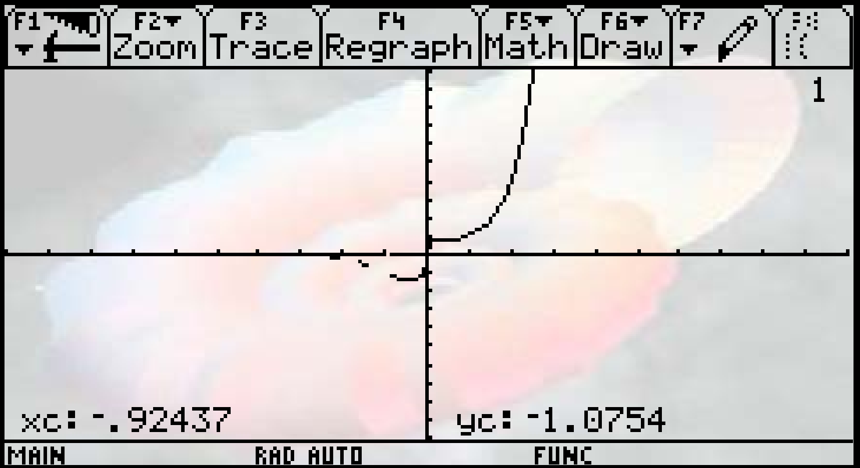


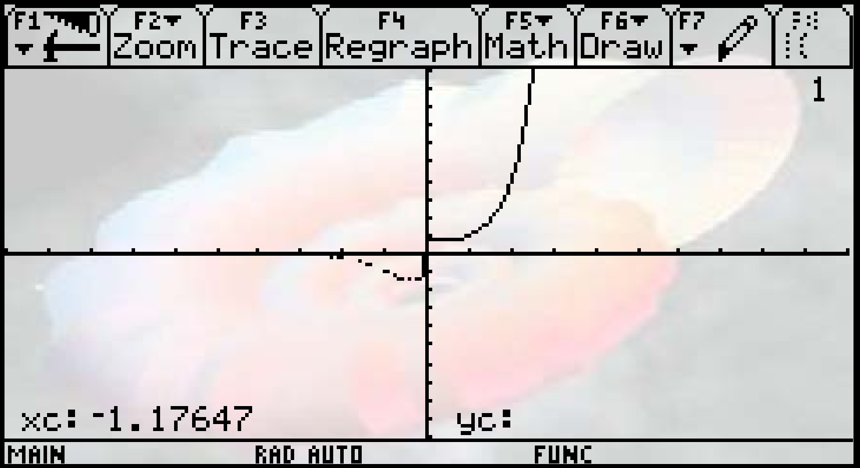
x^x en repère standard

CONTS

Dans ce cas tout est plus compliqué : les points calculés par la calculatrice ont une approximation rationnelle par fraction continue avec un dénominateur pair ou pas et cela change tout…

Examinons ces deux cas.

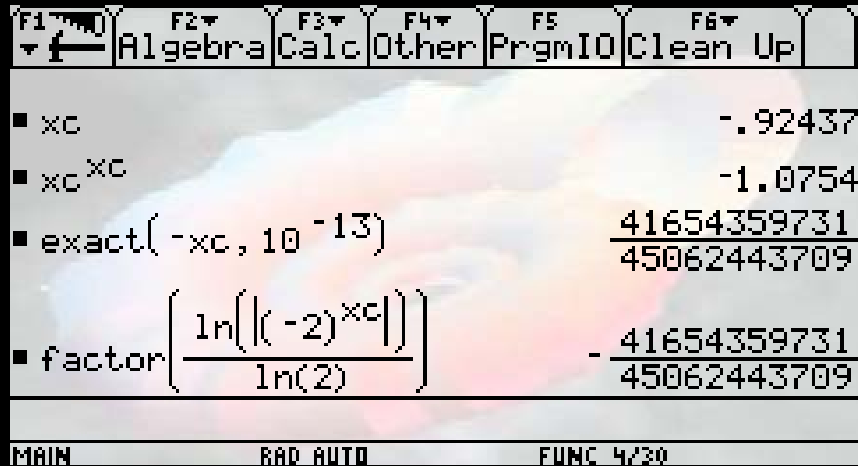


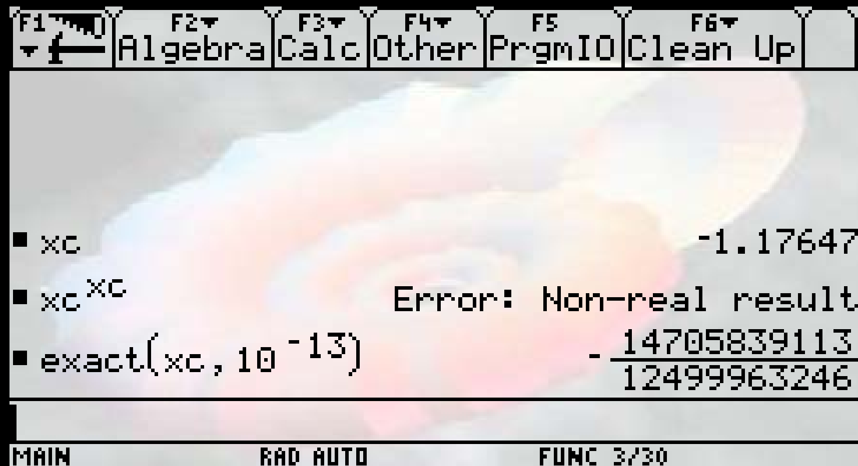


Les deux points choisis

CONTS

Les calculs semblent confirmer nos hypothèses dans les deux cas.

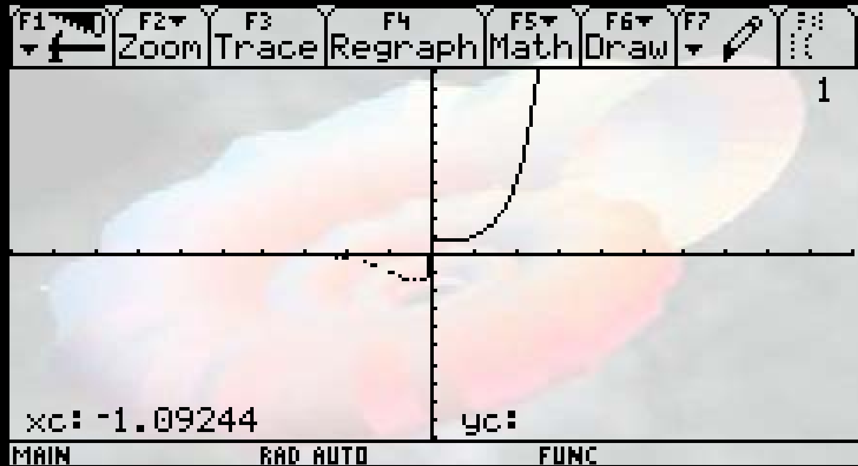


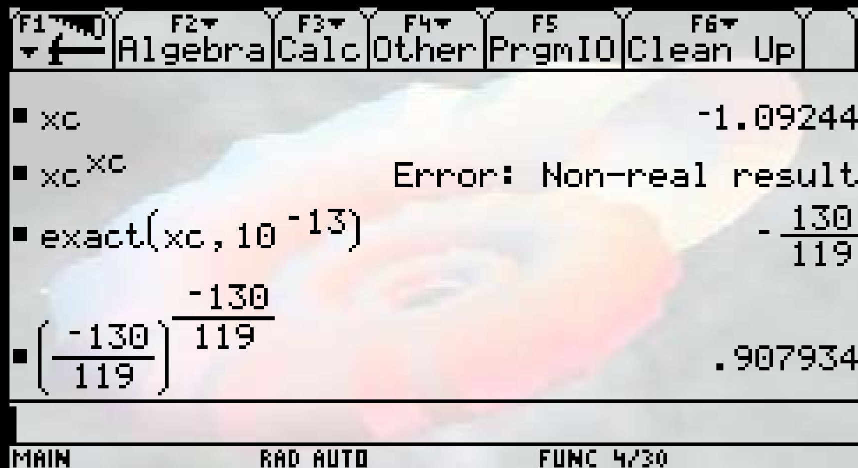


Mais tout n’est pas si simple…

Mais nous aurions pu tomber plus mal comme le montre l’exemple suivant :

cela marche beaucoup moins bien…





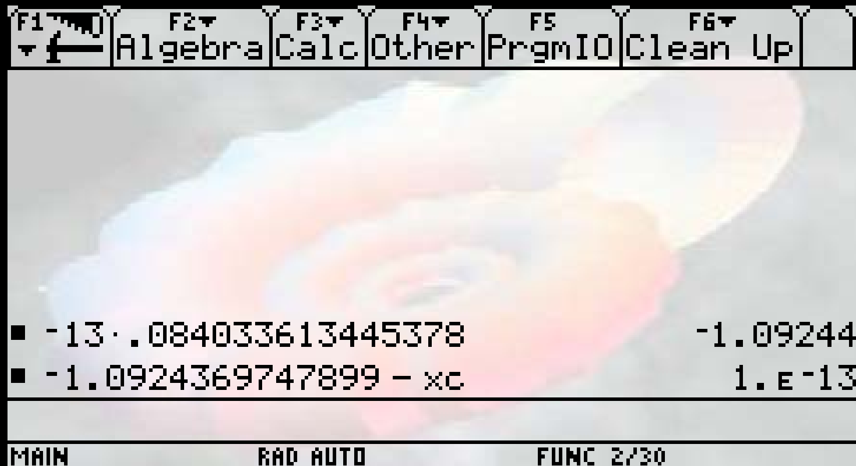
Quel est ce point ?

L'écran de la calculatrice contient 238 pixels calculés.

En mode standard les abscisses vont de -10 à 10.

On peut calculer «plus précisément » la valeur de xc.

On trouve un écart qui montre qu'il est difficile de savoir quel nombre est utilisé par la calculatrice



Une aide de Derive

CONTS

Si par exemple la calculatrice « choisit » la valeur 1.092436974789 pour xc, Derive donne comme fractions continues, la dernière étant la plus petite et plus précise que la précédente. Pourquoi EXACT ne retourne pas cette valeur ?

Nouvelle affaire à suivre …

$$\mathrm{frc}(1.092436974789,\ 10^{-13})$$

$$\left[1,\ \frac{11}{10},\ \frac{12}{11},\ \frac{59}{54},\ \frac{71}{65},\ \frac{130}{119},\ \frac{1002357481}{917431848}\right]$$

$$\frac{1002357481}{917431848} - \frac{130}{119} = -\frac{1}{109174310912}$$

Et si l'on changeait de calculatrice …

CONTS

Examinons ce qui se passe avec la TI-84.

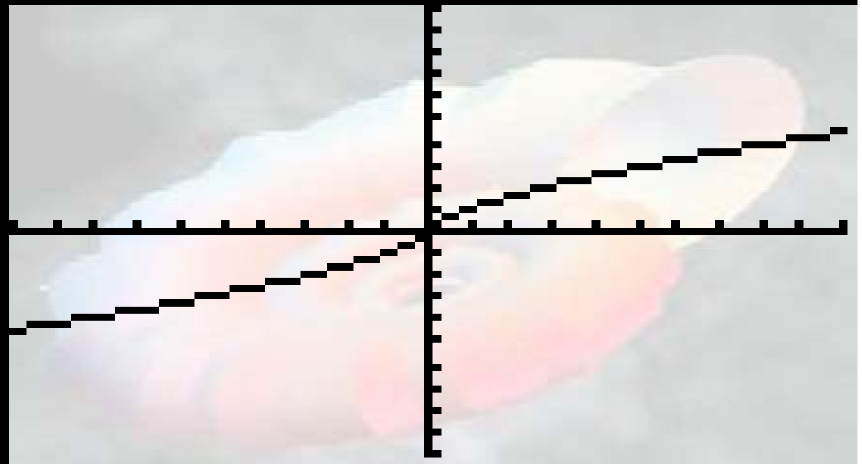
On commence par tracer les courbes de la fonction

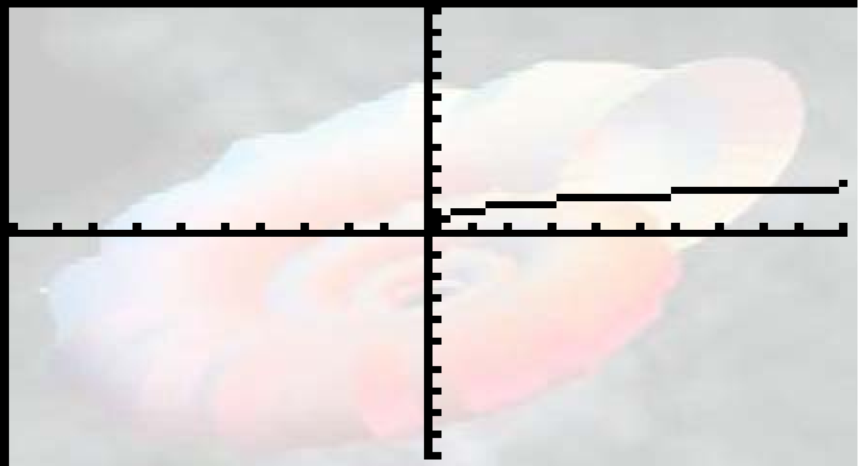
$$x \mapsto x^{A}$$

pour A = 67/103 en haut

et A = 67/208 en bas.

Les résultats sont conformes à nos attentes (dénominateurs impairs ou pairs)





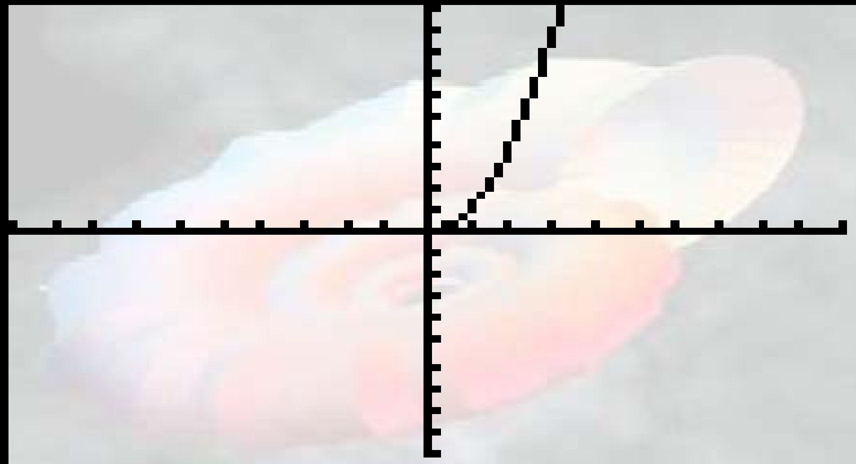
CONTS

Les ennuis commencent

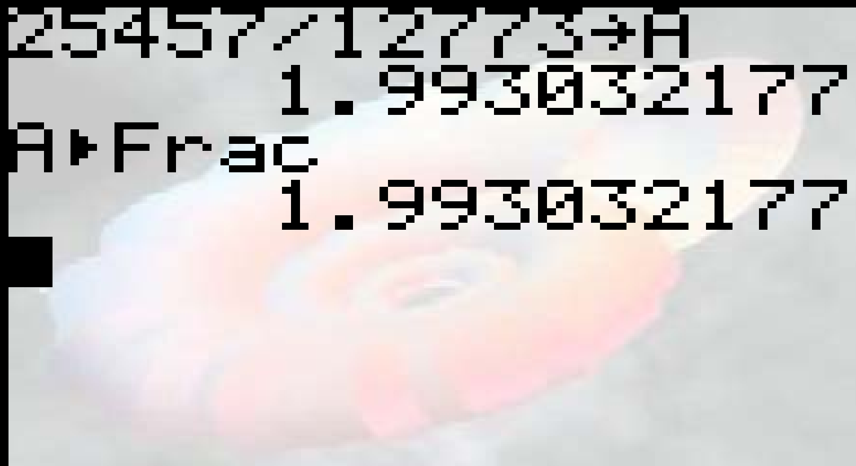
Si nous prenons maintenant

A = 23457/12773

la courbe est « incomplète »



La TI-84 possède une « petite » fonction EXACT : l'instruction FRAC.



Examinons ce qu'elle donne ici.

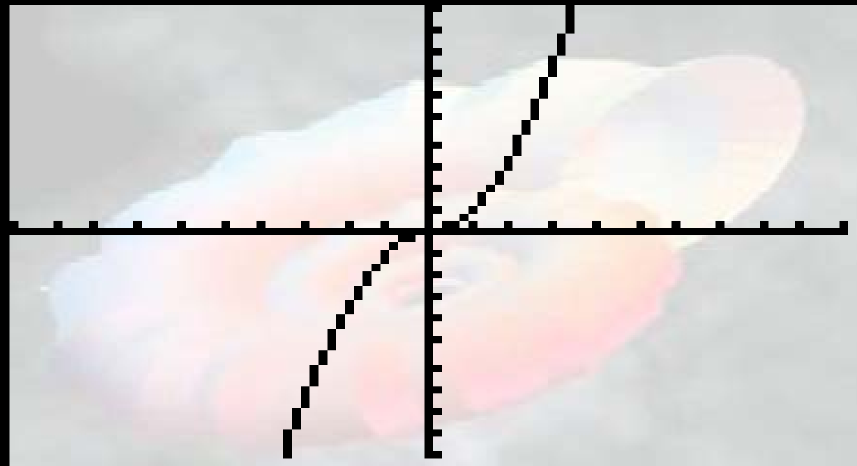
Elle ne modifie rien

CONTS

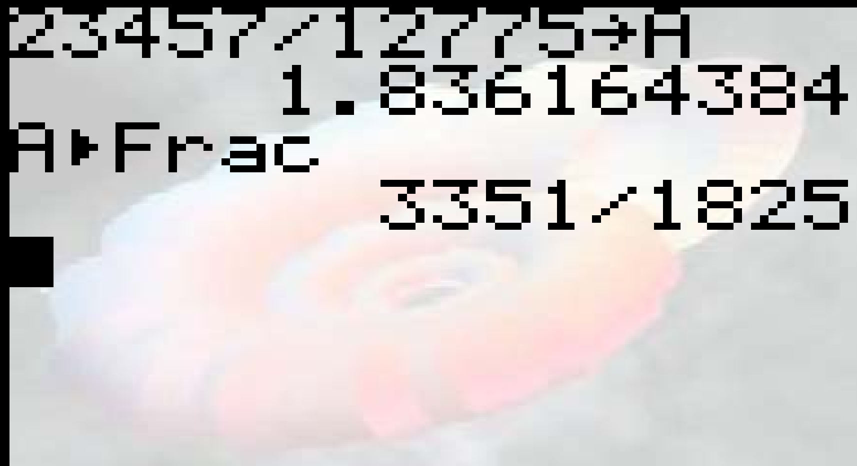
La petite différence

Un petit changement dans la valeur de A et tout fonctionne à nouveau :

A = 23457/12775



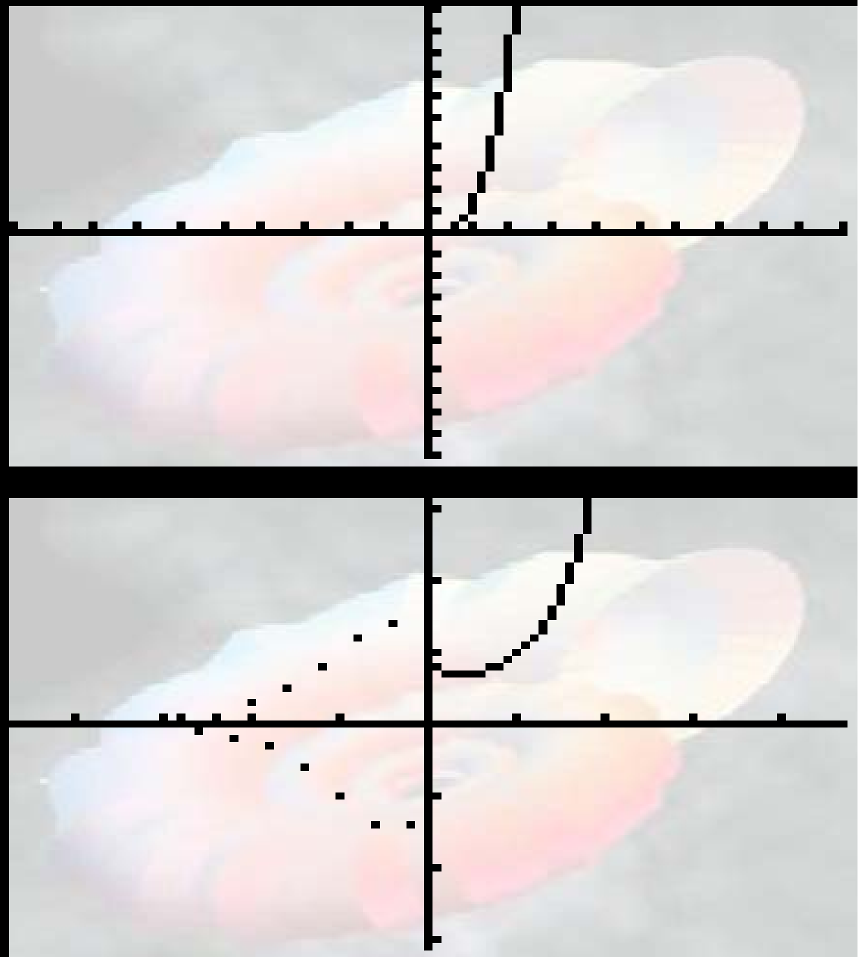
Et du côté de FRAC…



Petite conclusion pour la TI-84

Comme les calculatrices formelles, la TI-84 ne trace d'arc pour les abscisses négatives que si elle peut mettre l'exposant sous la forme d'un rationnel à dénominateur impair,

ce qui évite des problèmes pour x^{π} (écran du haut) mais pas pour x^{x} en mode décimal … (écran du bas)



Et du côté de Derive…

CONTS

Derive a té un assistant précieux, par la possibilité qu'il offre de définir la précision des résultats.

Mais échappe-t-il aux problèmes des fonctions puissances ?

Sur le plan graphique, il semble que c'est le cas. Les courbes sont conformes aux attentes des professeurs de mathématiques, mais sur le plan du calcul nous allons rencontrer encore quelques surprises …

CONTS

Derive et les puissances (1)

Jusque là tout va bien

```
Precision := Approximate

PrecisionDigits := 19
```

$$(-2)^{\pi} = -7.966178303885685737 - 3.797398698989756366 \cdot i$$

```
PrecisionDigits := 18
```

$$(-2)^{\pi} = -7.96617830388568573 - 3.79739869898975636 \cdot i$$

Nous y voilà

CONTS

```
PrecisionDigits := 18

Branch := Real
```

$$(-2)^{\pi} = 8.8249778270762876$$

Et voilà comment $(-2)^{\pi}$ devient un réel positif.

Mais les surprises ne sont pas terminées :

il peut devenir un réel négatif ou même être de nouveau un nombre complexe suivant la précision choisie.

```
PrecisionDigits := 20
```

$$(-2)^{\pi} = -8.8249778270762876238$$

```
PrecisionDigits := 21
```

$$(-2)^{\pi} = -7.96617830388568573823 - 3.79739869898975636583 \cdot i$$

Et ce n'est pas fini…

CONTS

En mode exact, la calculatrice avait un comportement « normal », mais Derive est plus surprenant .

Il faut passer aux nombres complexes pour retrouver ses marques

Precision := Exact

Notation := Rational

$$(-2)^{\pi} = 2^{\pi}$$

Branch := Principal

$$(-2)^{\pi} = 2^{\pi} \cdot e^{\pi^2 \cdot i}$$

Et si Derive fonctionnait comme les calculatrices…

On se place en mode Exact avec une précision de 20 chiffres. Les écrans obtenus parlent d'eux-mêmes

$$(-2)^{\mathrm{APPROX}(\pi)} = -2^{21053343141/6701487259}\cdot(-1)^{948881364/6701487259}$$

$$\mathrm{frc}\left(\mathrm{APPROX}(\pi),\ 10^{-20}\right)$$

$$\left[3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},\ \frac{312689}{99532},\right.$$

$$\frac{833719}{265381},\ \frac{1146408}{364913},\ \frac{4272943}{1360120},\ \frac{5419351}{1725033},\ \frac{80143857}{25510582},$$

$$\frac{165707065}{52746197},\ \frac{245850922}{78256779},\ \frac{411557987}{131002976},\ \frac{1068966896}{340262731},$$

$$\left.\frac{2549491779}{811528438},\ \frac{6167950454}{1963319607},\ \frac{21053343141}{6701487259}\right]$$

Avec une précision de 10^{-18}

```
PrecisionDigits := 18
```

$$(-2)^{\mathrm{APPROX}(\pi)} = -2^{6167950454/1963319607} \cdot (-1)^{277991633/1963319607}$$

$$\mathrm{frc}(\mathrm{APPROX}(\pi),\ 10^{-18})$$

$$\left[3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},\ \frac{312689}{99532},\ \frac{833719}{265381},\ \frac{1146408}{364913},\ \frac{4272943}{1360120},\ \frac{5419351}{1725033},\ \frac{80143857}{25510582},\ \frac{165707065}{52746197},\ \frac{245850922}{78256779},\ \frac{411557987}{131002976},\ \frac{1068966896}{340262731},\ \frac{2549491779}{811528438}\right]$$

Il semble y avoir un petit problème…

Un coup plus loin

$$\mathrm{frc}(\mathrm{APPROX}(\pi),\ 10^{-19})$$

$$\left[3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},\ \frac{312689}{99532},\ \frac{833719}{265381},\ \frac{1146408}{364913},\ \frac{4272943}{1360120},\ \frac{5419351}{1725033},\ \frac{80143857}{25510582},\ \frac{165707065}{52746197},\ \frac{245850922}{78256779},\ \frac{411557987}{131002976},\ \frac{1068966896}{340262731},\ \frac{2549491779}{811528438},\ \frac{6167950454}{1963319607}\right]$$

Il faut aller un peu plus loin pour trouver l'approximation rationnelle. Question de précision ???

Derive plus explicite que la calculatrice

CONTS

PrecisionDigits := 19

$$(-2)^{\mathrm{APPROX}(\pi)} = -\, 2^{14885392687/4738167652} \cdot (-1)^{670889731/4738167652}$$

PrecisionDigits := 18

$$(-2)^{\mathrm{APPROX}(\pi)} = -\, 2^{6167950454/1963319607} \cdot (-1)^{277991633/1963319607}$$

PrecisionDigits := 20

$$(-2)^{\mathrm{APPROX}(\pi)} = -\, 2^{21053343141/6701487259} \cdot (-1)^{948881364/6701487259}$$

On comprend maintenant pourquoi on a trouvé un nombre complexe avec une précision de 19, un nombre réel positif avec une précision de 18 et un nombre réel négatif avec une précision de 20.

Pour conclure

CONTS

Voilà la « fin » d'une enquête mathématique, réalisée avec la complicité d'élèves, qui a abouti pour tous à une meilleure compréhension de situations problématiques rencontrées sur une calculatrice ou sur un ordinateur, et surtout qui a fait visiter des notions mathématiques inattendues.

En définitive, tous ont compris que la confiance que l'on doit faire à un instrument de calcul doit être mesurée. Mais, et c'est le point le plus important, peu seront ceux qui parleront encore de « bugs » ou de « limites » de tels instruments : chacun sait maintenant que ces prétendus limites sont en fait bien souvent celles des mathématiques disponibles.