Réflexions sur les potentialités des logiciels et des calculatrices symboliques pour l'enseignement des mathématiques. Une approche didactique.

Fernando Hitt
Département des Mathématiques, CIRADE-UQAM, Cinvestav-IPN
hitt.fernando@uqam.ca

Résumé

L'utilisation croissante de calculatrices symboliques et de logiciels impose une réflexion sur leur influence dans l'enseignement et dans l'apprentissage des mathématiques. À partir de quel point de vue devons-nous analyser les potentialités à priori des calculatrices symboliques et des logiciels destinés à l'enseignement des mathématiques ? À partir de celui de la construction des concepts ? De la résolution de problèmes ? De ce qu'enseignent et évaluent les enseignant(e)s ? Ou de ce qu'apprennent les étudiant(e)s ?

Introduction

Dans le présent document nous voulons faire une réflexion sur le rôle des représentations dans le développement des mathématiques, dans l'apprentissage des mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques. Pour quoi les mathématiques sont-elles devenues une science anti-illustrative ? A t-on besoin de l'utilisation des représentations visuelles pour comprendre les mathématiques ? L'utilisation de différentes représentations des objets mathématiques est-elle importante pour l'enseignement ? Nous allons essayer de discuter de cette problématique en faisant un lien avec les outils technologiques. Déjà nous pouvons avancer que la visualisation mathématique a été présente à l'origine même des mathématiques. L'utilisation de figures et de l'intuition y ont joué un rôle prépondérant. Nous retrouvons ceci, par exemple, dans la mathématique grecque.

Exercices et problèmes

Dans le contexte dans lequel nous voulons situer le changement de l'enseignement des mathématiques, nous avons besoin de faire la distinction entre un exercice et un problème. Quand un énoncé mathématique fait appel à une procédure déjà établie par un individu, nous pouvons classer cet énoncé comme un exercice. Un problème sera plus complexe qu'un exercice du point de vue cognitif. C'est-à-dire que si un énoncé ne fait pas appel à une procédure déterminée, et qu'il nous oblige à la construction d'une représentation interne particulière qui fera la liaison entre différentes représentations de ce qui est en jeu, qui va promouvoir l'articulation entre ces différentes représentations et qu'il va aussi nous permettre de produire des représentations sémiotiques particulières liées à l'énoncé en question, alors cet énoncé là, sera pour nous un problème.

Dans les années 80, le NCTM (National Coulcil of Teachers of Mathematics) nous proposait quelques exemples de réflexion sur l'enseignement de l'algèbre dans le livre « Year Book 1988. Ideas of Algebra, K-12 », où il présentait 24 problèmes sous le titre: « Can your algebra class solve this? ». Nous allons analyser un des problèmes proposés dans cette ouvrage du point de vue du savoir-faire d'une part, sans l'utilisation de la technologie, et d'autre part, avec une technologie déjà utilisée dans les années 90 (par exemple, en utilisant une calculatrice TI 92 ou Voyage 200). Voici le problème :

Trouver toutes les valeurs réelles de x telles que $\left(x^2-5x+5\right)^{x^2-9x+20}=1$

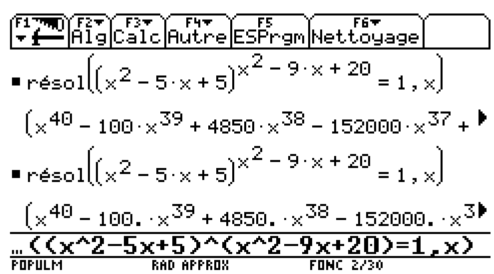
Sans technologie	Avec technologie (p. e., avec TI92)
Décomposition du problème en parties. Résolution de $x^2 - 5x + 5 = 1$. Résolution de $x^2 - 9x + 20 = 0$. Résolution de $x^2 - 5x + 5 = -1$ et résolution de $x^2 - 9x + 20 = 0$ (et multiples de ± 2), $x^2 - 9x + 20 = \pm 2, \pm 4, \ldots$ Et nous aurons comme résulta que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ et $x_5 = 5$ sont les solutions.	De façon directe et en mode approximatif la réponse n'est pas satisfaisante (en plus, la machine a pris 10 minutes…) : 

Figure 1.

Nous pouvons voir qu'en général, si nous nous situons dans un contexte de résolution de problèmes dans un environnement papier-crayon, les énoncés proposés par la NCTM sont des problèmes et non des exercices pour la grande majorité des étudiants. Alors, que devons nous faire dans un environnement qui devient technologique à grands pas ?

Par rapport au problème énoncé ci-dessus, on peut voir que la calculatrice ne nous donne pas la réponse désirée et, par conséquent, nous sommes obligés de chercher une nouvelle stratégie pour résoudre le problème.

Une autre activité peut être conçue en utilisant un problème similaire. Par exemple :

Trouver toutes les valeurs réelles de x telles que $\left(x^2+4x-6\right)^{x^2+4x-3}=1$

La différence avec ce problème là et le précédant, c’est que la machine « va nous proposer des solutions » (mode exact et approximatif):

$$\text{Résol}(\left(x^2+4x-6\right)^{x^2+4x-3}=1\,,\ \text{x})$$

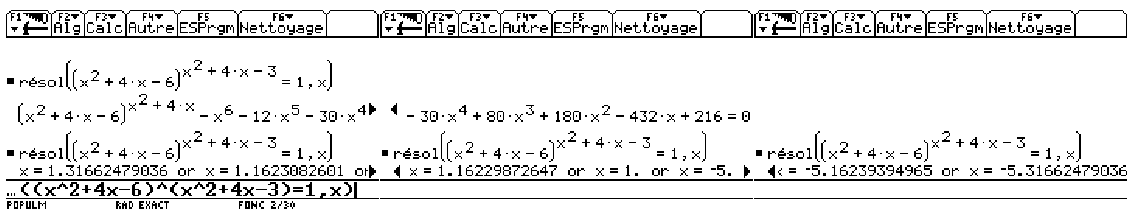


Figure 2.

Si nous demandions aux élèves de vérifier l’exactitude des solutions, il se pourrait qu’ils constatent que quelque chose est erroné. Il se peut qu’ils utilisent alors une stratégie semblable à celle qu’ils utiliseraient avec papier-crayon. C’est-à-dire, qu’au lieu d’utiliser la commande

$$\text{Résol}(\left(x^2+4x-6\right)^{x^2+4x-3}=1\,,\ \text{x})$$

ils utiliseraient une autre stratégie, par exemple la décomposition du problème en parties.
Instruction : Résol($x^2 + 4x - 6 = 1$, x) ; Résol($x^2 + 4x - 3 = 0$, x) ;
Instruction : Résol($x^2 + 4x - 6 = -1$, x) et Résol($x^2 + 4x - 3 = 0$, x) et multiples de ±2, Résol($x^2 + 4x - 3 = \pm 2$, x), …
Pour aboutir à : $x_{1,2} = \pm\sqrt{11} - 2$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{7} - 2$; $x_5 = 1$; $x_6 = -5$.

Construction de concepts

D’un point de vu théorique, la notion de représentation est dans le cœur de l’apprentissage avec ou sans l’utilisation de la technologie (voir, par exemple, Janvier, 1987). Diverses théories sur l’apprentissage mathématique se sont développées pendant les 20 dernières années, et nous nous sommes particulièrement intéressés au rôle des représentations sémiotiques dans la construction de concepts mathématiques. De ce point de vue, nous allons prendre en considération la notion de registre de représentation sémiotique, liée à la construction de concepts mathématiques, développée par Duval (1988, 1993, 1995). Pour

Duval (Idem) la construction des concepts mathématiques est liée à la coordination des différentes représentations d'un objet mathématique. Duval (1988) donne comme exemple : « *En effet, dans l'enseignement et dans certaines études didactiques on s'en tient au passage d'une équation à sa représentation avec construction point par point, et on oublie que c'est le passage inverse qui fait problème. Pour effectuer ce passage inverse l'approche point par point non seulement est inadéquate mais constitue un obstacle.* » Pour lui, les tâches de conversion entre représentations sont très importantes.

Résolution de problèmes bien définis dans un environnement technologique

À partir de ce point de vue théorique qui prend en considération la conversion des différentes représentations pour la construction d'un concept, l'étudiant(e) pourra construire le concept s'il peut articuler de façon cohérente les différentes représentations du concept en question. Pour la construction de concepts, il n'existe pas, à priori, un système de représentation privilégié par rapport à un autre.

Dans ce sens, la technologie aide à coordonner les différentes représentations. Mais, comment faire pour pousser les étudiants à utiliser la technologie de façon réflexive ? Quel type de problèmes devons nous leur proposer dans cet environnement ?

Nous allons donner un exemple où la technologie semble aider les étudiants à mieux comprendre le problème, en nous basant sur la théorie que nous venons de décrire.

Les recherches sur les conceptions sur les fonctions chez les étudiants du niveau secondaire et chez certains enseignants de ce niveau (Hitt, 1994 et 1998) nous ont amenés à construire l'activité suivante. Dans cette activité, la technologie semble aider les étudiants à mieux comprendre le problème.

Soit un carré de côtés 1. Trouver une fonction qui permet de calculer l'aire du triangle ABC en prenant x comme variable indépendante (voir Figure 3). *Existe-t-il une tangente à la courbe pour tout x dans le domaine de la fonction ? Justifier votre réponse.*

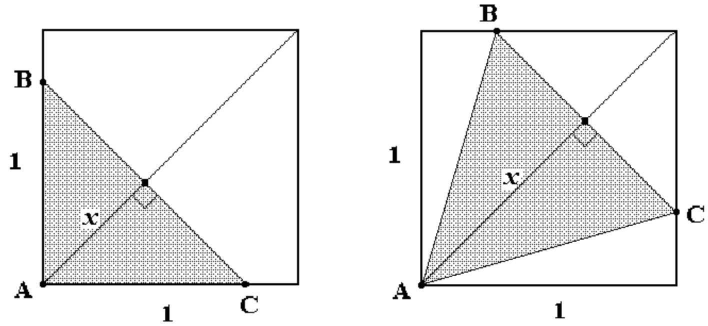


Figure 3

Dans cet exemple, la fonction est définie par deux expressions algébriques, ce qui donne un défi aux étudiants et aussi aux enseignants. Si nous utilisons la calculatrice pour modéliser le phénomène, nous obtenons

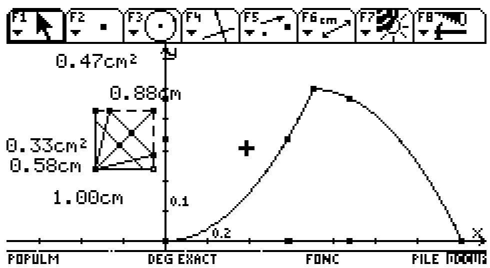


Figure 4

Nous avons ainsi une idée du comportement de la fonction et la technologie nous place dans une situation intéressante : Quels sont les expressions associées à la fonction qui permettent de saisir la situation ? De ce point de vue, avant même de se plonger dans un processus algébrique, nous avons une idée plus au moins précise d'où nous voulons arriver.

Sur la première partie, la fonction est définie ainsi : $f(x)=\frac{2x\cdot x}{2}=x^2$, pour $0<x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sur la deuxième partie, la fonction est définie par : $f(x)=\frac{2\left(\sqrt{2}-x\right)\cdot x}{2}=\sqrt{2}x-x^2$, $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\sqrt{2}$. Nous pourrions nous demander quel est le rôle de la calculatrice dans cette situation. Ici, le graphique peut servir comme moyen de contrôle sur le processus algébrique. Nous savons que dans une activité « purement algébrique » les erreurs qu'on peut commettre sont très difficiles à repérer. Alors, la calculatrice nous fourni une représentation graphique, qui sert de contrôle à l'activité algébrique.

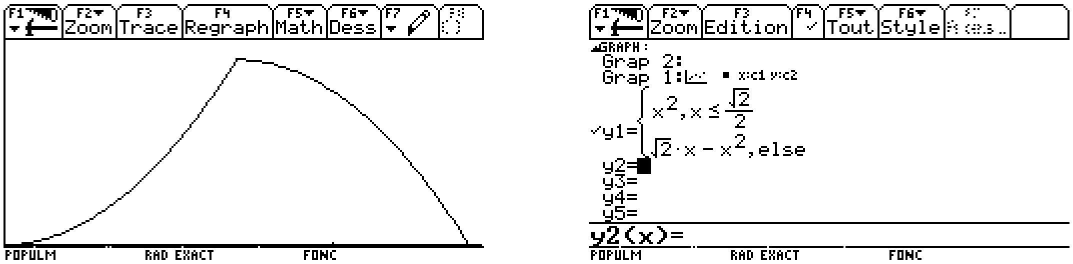


Figure 5

Dans ces conditions, en observant la courbe, nous pouvons conjecturer que l'unique point où il devient nécessaire de vérifier s'il y a une tangente est le point $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; pour le reste des points du domaine $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \sqrt{2}$, il est facile de trouver la tangente. Ce qui nous amène à calculer la dérivée de la fonction par la gauche et par la droite en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

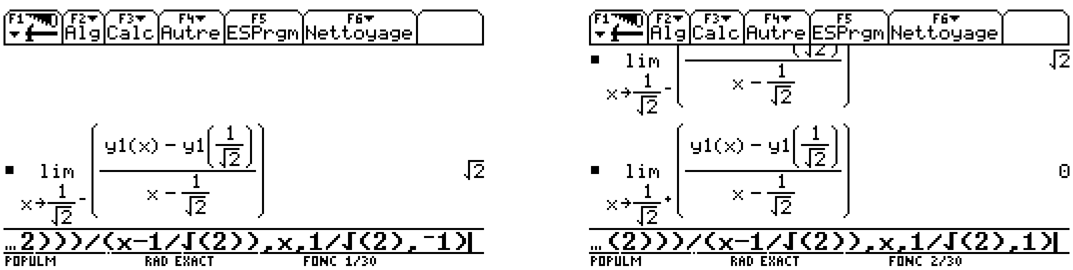


Figure 6

Nous tenons à répéter que ce qui est importante c'est d'arriver à la conjecture en utilisant la calculatrice de façon réflexive. Finalement, nous pouvons faire un lien entre l'idée intuitive que la dérivée de la fonction f n'existe pas pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et la vérification avec la calculatrice.

Résolution de problèmes (situation problème) dans un environnement technologique

L'idée fondamentale des chercheurs en didactique des mathématiques, et plus particulièrement de ceux qui étudient les phénomènes liés à la résolution de problèmes, est de proposer une situation qui éventuellement aboutira à un ou plusieurs problèmes qui amèneront les étudiants à discuter sur la problématique qui émerge de la situation proposée. Des recherches plus récentes sur l'utilisation de la technologie dans le cours de mathématiques, nous montrent de nouvelles approches sur cette problématique. Par exemple, Arcavi et Hadas (2000) nous proposent une situation problème à discuter et à résoudre dans un environnement technologique et, dans lequel la visualisation joue un rôle important, avant de se plonger dans un environnement algébrique. Cett situation problème a été proposé dans un environnement géométrique en utilisant le logiciel 'Geometry inventor'. Dans notre cas, nous allons illustrer la situation avec la calculatrice TI-92 ou la Voyage 200.

Première partie. Construire un triangle isocèle tel que $\overline{AB} = \overline{BC}$.

En traînant le sommet C, on peut produire des triangles isocèles (Figure 7).

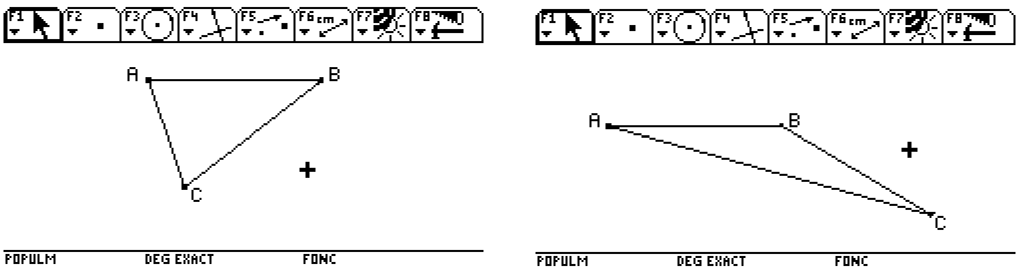


Figure 7. *Construction d'un triangle isocèle par une variation dynamique*

Deuxième partie. Qu'est-ce qui varie et qu'est-ce qui demeure constant?

Après une discussion, les étudiants vont sûrement proposer d'étudier la variation de l'aire en fonction du côté $\overline{AC}$ (Figure 8). [Comme cela s'est effectivement passé lors l'expérimentation d'Arcavi et Hadas].

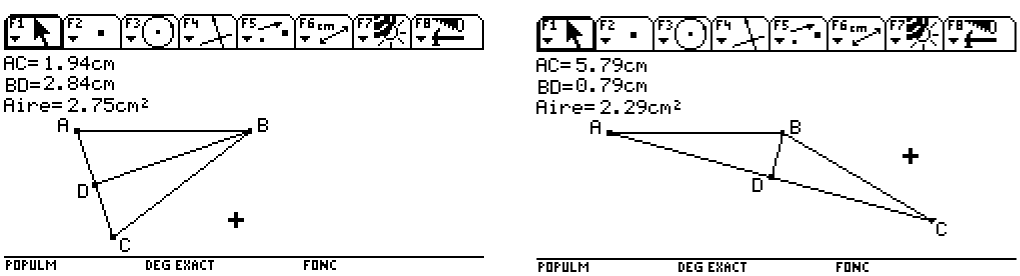


Figure 8. *Visualisation du domaine de la fonction et représentations figurale et numérique*

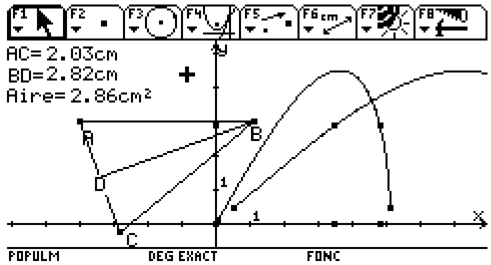


Figure 9. *Représentation figurale, numérique et graphique*

Troisième partie. Construire un triangle ABC, tel que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ *. Qu'est-ce qui varie et qu'est-ce qui demeure constant ?*

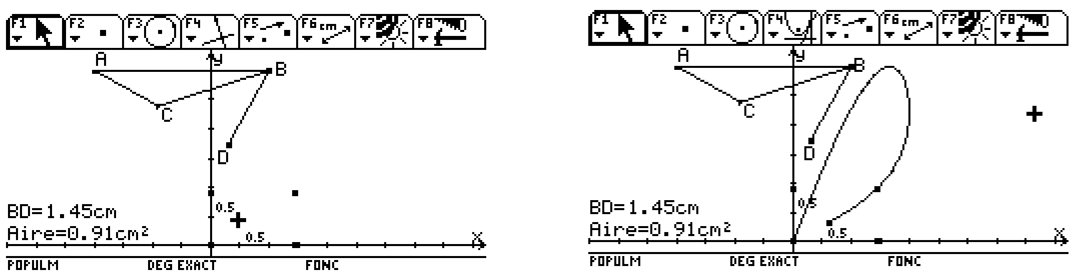


Figure 10. *Représentation d'une courbe que n'est pas le graphique d'une fonction*

Arcavi et Hadas (Idem., p. 26-28) nous proposent alors une réflexion sur les caractéristiques que nous devons prendre en considération pour choisir un problème. Ils émettent l'hypothèse qu'une situation problématique doit être suffisamment riche pour promouvoir les activités cognitives suivantes.

Visualisation*. La visualisation, en général, est en rapport avec l'habileté de représenter, de transformer, de générer, de communiquer, de documenter, et de réfléchir sur l'information visuelle (Hershkovitz, 1989, p. 75). … Une image visuelle, en vertu de son caractère concret, « est un facteur qui crée la sensation d'auto évidence et d'immédiateté » (Fischbein, 1987, p. 101). Alors, la visualisation « non seulement organise les données dans une structure significative, mais elle est aussi, un facteur important qui guide le développement analytique d'une solution. » (Ibid.)*

Expérimentation*. À part la visualisation, le travail avec des environnements dynamiques, permet aux étudiants d'apprendre et d'expérimenter, ainsi que « d'apprécier la facilité de générer beaucoup d'exemples…, pour rechercher les cas extrêmes, exemples négatifs et de non-évidence stéréotype… »*

Surprise. *Le défi c'est de trouver des situations dans lesquelles ce qu'on attend est inattendu ou contre-intuitif, de façon à ce que la surprise (ou le mystère) généré, crée une claire disparité avec les prédictions explicitement avancées.*

Feed-back. *Les surprises comme celles que nous venons de décrire, surgissent de la disparité entre ce qui est attendu, après une action, et le résultat de cette action. Le feed-back est fourni par l'environnement même. Celui-ci répond comme il a été questionné.*

Nécessité de démontrer et d'argumenter. *...À partir de la surprise, beaucoup d'étudiant(e)s peuvent ressentir la nécessité d'une démonstration*.

Réflexions finales

Notre approche sur l'utilisation de la technologie essaye d'effacer l'idée naïve que la technologie peut résoudre bien des problèmes d'enseignement et d'apprentissage. En fait, nous ne le pensons pas. Mais certains problèmes d'apprentissage peuvent être résolus avec la technologie. Il faut expérimenter pour comprendre le potentiel réel de l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques, en étant conscients que la technologie utilisée de façon irrationnelle peut provoquer des problèmes d'apprentissage. C'est à dire, nous devons chercher à comprendre comment cet élément du milieu affecte la construction des concepts et les savoirs mathématiques en jeu dans la situation d'apprentissage. Nous devons chercher l'équilibre entre les activités papier-crayon et les activités qui utilisent la technologie. Enfin, nous devons trouver des situations intéressantes qui puissent promouvoir la construction de concepts et des stratégies dans la résolution de problèmes.

Références

Arcavi A. & Hadas N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **5**, 25-45. Kluwer Academic Publishers.

Duval R. (1988). Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5(1993) 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

NCTM. (1988). Yearbook 1988. Ideas of algebra. K-12. *National Council of Teachers of Mathematics*. USA.